数理解析研究所講究録
第2075巻 2018年 158-167

Generalized Weyl modules and Demazure submodules of level-zero extremal weight modules.

東京工業大学理工学研究科数学専攻 野本 文彦 (Fumihiko Nomoto)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

概要

本稿は, RIMS 共同研究「表現論と組合せ論」での講演内容をまとめたものである. アフィン Lie 代数の上半三角部分代数上の一般化 Weyl 加群の次数付き指標と量子アフィン代数上の extremal ウエイト加群の Demazure 部分加群のある商加群の次数付き指標が本質的に一致するという結果を紹介する. さらに, その応用として, 後者の次数付き指標のテンソル積分解との関係性を明らかにする.

1 Introduction

$\mathfrak{g}$ を有限次元複素単純 Lie 代数とし, $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ を $\mathfrak{g}$ の untwisted affinization, $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}} = \mathfrak{n}_{\mathrm{aff}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathrm{aff}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathrm{aff}}^-$ を $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ の三角分解とする. Orr-Shimozono [OS] は非対称 Macdonald 多項式の $t=0$ と $t=\infty$ における特殊化を, 量子 alcove path で表す公式を証明した. そして最近 Feigin-Makedonskyi [FM] は, $\mathfrak{g}$ の domiant ウエイト λ と Weyl 群の元 w に対し, $\mathfrak{n}_{\mathrm{aff}}$ 上の一般化 Weyl 加群 $W_{w\lambda}$ を導入し, その次数付き指標が, (始点が w で向きが $t(w_\circ\lambda)$ の reduced expression で与えられるような) 量子 alcove path の集合 $\mathcal{QB}(w; t(w_\circ\lambda))$ の次数付き指標 $C_w^{t(w_\circ\lambda)}$ に一致することを示した. ただし, $w_\circ$ は W の最長元で, $t(w_\circ\lambda)$ は, 拡張アフィン Weyl 群において $w_\circ\lambda$ の平行移動を表す元である. 特に, $w = w_\circ$ のときには, この次数付き指標は非対称 Macdonald 多項式の $t=\infty$ における特殊化 $E_{w_\circ\lambda}(q,\infty)$ へ $w_\circ$ を作用させたものに一致する.

一方で我々は, (degree operator を持つ) 量子アフィン代数 $U_{\mathrm{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$ 上の extremal ウエイト加群の Demazure 部分加群 $V_w^-(\lambda)$ ($U_{\mathrm{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}) = U_{\mathrm{v}}^-(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}) \otimes U_{\mathrm{v}}^0(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}) \otimes U_{\mathrm{v}}^+(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$ を三角分解とすると, $V_w^-(\lambda)$ は $U_{\mathrm{v}}^-(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-加群である) を考え, その商加群 $V_w^-(\lambda)/X_w^-(\lambda)$ の次数付き指標が, λ 型の 量子 Lakshmibai-Seshadri (QLS) パスの集合 $\mathrm{QLS}(\lambda)$ の次数付き指標 $\mathrm{gch}_w\mathrm{QLS}(\lambda)$ に一致することを示した ([NNS]). 特に, $w = w_\circ$ のときには, この次数付き指標は非対称 Macdonald 多項式の $t=\infty$ における特殊化 $E_{w_\circ\lambda}(q,\infty)$ に一致する.

本講演で紹介した主結果は, $\mathfrak{n}_{\mathrm{aff}}$ 上の一般化 Weyl 加群 $W_{w\lambda}$ の次数付き指標 と, $U_{\mathrm{v}}^-(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-加群 $V_w^-(\lambda)/X_w^-(\lambda)$ の次数付き指標の間の関係を明らかにしたことである. 定式化すると, 以下のようになる.

Theorem 1.1 (=Theorem 5.2). λ を dominant ウエイトとし, w を Weyl 群 W の元とする. このとき, 次が成り立つ.

$$w_\circ(\overline{\mathrm{gch} W_{ww_\circ\lambda}}) = \mathrm{gch}(V_{w_\circ ww_\circ}^-(\lambda)/X_{w_\circ ww_\circ}^-(\lambda)).$$

ここで, P を $\mathfrak{g}$ のウエイト lattice とする. さらに, $\overline{\cdot}$ は, $q \mapsto q^{-1}$, $\overline{e^\mu} = e^\mu$ ($\mu \in P$) で与えられる $\mathbb{Q}(q)[P]$ 上の involution であって, $\mathbb{Q}(q)[P]$ 上の $\mathbb{Q}(q)$-線形な Weyl 群の作用は, $w \cdot e^\mu := e^{w\mu}$ ($w \in W$, $\mu \in P$) で与えられるものとする.

本稿では, 一般化 Weyl 加群, QLS パス, extremal ウエイト加群と Demazure 部分加群およびその商加群の定義を述べた上で, 主結果をあらためて紹介する. さらに, 主結果の応用として, QLS パスの集合が, (degree operator を持たない) $U_v'(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-結晶の構造を備えており, テンソル積分解

$$\mathrm{QLS}(\lambda+\mu) \simeq \mathrm{QLS}(\lambda) \otimes \mathrm{QLS}(\mu) \quad \text{as } U_v'(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})\text{-crystal}$$

を持つことを踏まえ, 次数付き指標 $\mathrm{gch}(V^-_{w_\circ w w_\circ}(\lambda+\mu)/X^-_{w_\circ w w_\circ}(\lambda+\mu))$ を $\mathrm{QLS}(\lambda)$ と $\mathrm{QLS}(\mu)$ を用いて表す展開公式を紹介する.

なお, 本稿の主結果 (Theorem 1.1) の詳細及び証明に関しては, [No] を参照していただきたい. 第 6 章「応用」に関しては, 東京工業大学の内藤聡氏, 筑波大学の佐垣大輔氏との共同研究である.

本稿では, 以下の記号を用いる:

$\mathfrak{g}$: 有限次元複素単純 Lie 代数.

I : $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の頂点集合.

$\{\alpha_i\}_{i\in I}$: $\mathfrak{g}$ の単純ルート.

$\{\alpha_i^\vee\}_{i\in I}$: $\mathfrak{g}$ の単純コルート.

$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{C}\alpha_i^\vee$: $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数.

$\mathfrak{h}^* = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{C}\alpha_i$: $\mathfrak{h}$ の双対空間.

$\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}\alpha_i$: $\mathfrak{h}^*$ の実形.

$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$: $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ の双対的な pairing.

$\{\varpi_i\}_{i\in I}$: $\mathfrak{g}$ の基本ウエイト (つまり, $\langle\varpi_i, \alpha_j^\vee\rangle = \delta_{ij}$, $i, j \in I$ を満たす).

$Q := \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$: $\mathfrak{g}$ のルート格子.

$P := \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\varpi_i \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$: $\mathfrak{g}$ のウエイト格子.

$P^+ := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i$: dominant ウエイトの集合.

$P^{++} := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{>0}\varpi_i$: regular dominant ウエイトの集合.

Δ : $\mathfrak{g}$ のルート系.

Δ^+ : $\mathfrak{g}$ の正ルート全体.

Δ^- : $\mathfrak{g}$ の負ルート全体.

$W := \langle s_i \mid i \in I\rangle$: $\mathfrak{g}$ の Weyl 群. ただし, s_i は α_i に関する単純鏡映.

$\ell(w)$ $(w \in W)$: w の長さ.

e : W の単位元.

$w_\circ$: W の最長元.

ただし, s_i, $i \in I$ は, $\mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{h}$ 上に次のように作用する:

$$s_i\nu = \nu - \langle\nu, \alpha_i^\vee\rangle\alpha_i, \quad \nu \in \mathfrak{h}^*,$$
$$s_ih = h - \langle\alpha_i, h\rangle\alpha_i^\vee, \quad h \in \mathfrak{h}.$$

また, $\alpha \in \Delta$ が $\alpha = w\alpha_i$ と表せる時, $\alpha^\vee := w\alpha_i^\vee$ とする.

2 一般化 Weyl 加群と次数付き指標

$\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}} := \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}D$ を アフィン Lie 代数とし, $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}} = \mathfrak{n}_{\mathrm{aff}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathrm{aff}} \oplus \mathfrak{n}^-_{\mathrm{aff}}$ を三角分解とする.

Definition 2.1 ([FM, Definition 2.1]). λ を dominant ウエイトとし, $w \in W$ とする. 一般化 Weyl 加群 $W_{ww_\circ\lambda}$ とは, 生成元 v を持つ cyclic $\mathfrak{n}_{\mathrm{aff}}$-加群であって, 以下の関係式のみを持つものである:

$$(h \otimes t^k)v = 0 \text{ for all } h \in \mathfrak{h}, k > 0,$$
$$(f_\alpha \otimes t)v = 0 \text{ for } \alpha \in w\Delta^- \cap \Delta^-,$$
$$(e_\alpha \otimes 1)v = 0 \text{ for } \alpha \in w\Delta^- \cap \Delta^+,$$
$$(f_{w\alpha} \otimes t)^{-\langle w_\circ\lambda, \alpha^\vee\rangle+1}v = 0 \text{ for } \alpha \in \Delta^+ \cap w^{-1}\Delta^-,$$
$$(e_{w\alpha} \otimes 1)^{-\langle w_\circ\lambda, \alpha^\vee\rangle+1}v = 0 \text{ for } \alpha \in \Delta^+ \cap w^{-1}\Delta^+,$$

ここで, e_α, $f_{-\alpha}$ $(\alpha \in \Delta^+)$ は $\mathfrak{g}$ の Chevalley 生成元である.

一般化 Weyl 加群 $W_{ww_\circ\lambda}$ は関係式

$$hv = \langle ww_\circ\lambda,\ h\rangle v,\ \ h \in \mathfrak{h}$$

を加えることで, $\mathfrak{n}_{\mathrm{aff}} \oplus \mathfrak{h}$-加群と見なせる. これにより, $W_{ww_\circ\lambda}$ は $\mathfrak{h}$-ウエイト加群となる. さらに, $W_{ww_\circ\lambda}$ は, 次の条件により次数付き加群の構造を持つ:

(1) $\deg(v) = 0$,

(2) $x \otimes t^k \in \mathfrak{n}_{\mathrm{aff}}$ 型の元を乗ずると 次数が k 増える.

以上により, 一般化 Weyl 加群 $W_{ww_\circ\lambda}$ の次数付き指標が次で定義される:

$$\mathrm{gch}\, W_{ww_\circ\lambda} := \sum \dim\left(W_{ww_\circ\lambda}[\gamma, k]\right) q^k e^\gamma.$$

ここで, $W_{ww_\circ\lambda}[\gamma, k]$ は, 次数 k, $\mathfrak{h}$-ウエイト γ の元からなる部分空間である. Feigin-Makedonskyi は一般化 Weyl 加群 $W_{ww_\circ\lambda}$ の次数付き指標を量子 alcove path の集合の次数付き指標と一致することを示した [FM, Theorem 2.21]).

Remark 2.2 ([FM]). ウエイト $\mu \in P$ に対応する非対称 Macdonald 多項式を $E_\mu(q,t) \in \mathbb{Q}(q,t)[P]$ とし, その $t = 0$ (resp., $t = \infty$) での特殊化 $\lim_{t\to 0} E_\mu(q,t)$ (resp., $\lim_{t\to\infty} E_\mu(q,t)$) を $E_\mu(q,0)$ (resp., $E_\mu(q,\infty)$) で表す.

(1) $w = e$ の時,

$$E_\mu(q,0) = \mathrm{gch} W_{w_\circ\lambda}$$

が成り立つ ([FM, Corollary 2.23]).

(2) $w = w_\circ$ の時,

$$E_\mu(q^{-1},\infty) = w_\circ \mathrm{gch} W_\lambda$$

が成り立つ ([FM, Corollary 2.24]). 但し, $\mathbb{Q}(q)[P]$ 上の $\mathbb{Q}(q)$-線形な Weyl 群の作用は, $w \cdot e^\mu := e^{w\mu}$ ($w \in W$, $\mu \in P$) で与えられるものとする.

3 量子 Lakshmibai-Seshadri パスと次数付き指標

3.1 量子 Bruhat グラフ

Definition 3.1 ([BFP, Definition 6.1]). 量子 Bruhat グラフ (QBG(W)) とは, 頂点集合が W であって, 次で定まる directed edge を持つ有向グラフである. $u, v \in W$ に対して $u \to v$ が QBG(W) の directed edge であるとは, ある $\beta \in \Delta^+$ が存在して次の 2 条件を満たすことである:

(1) $v = us_\beta$ が成り立つ.

(2) (2a) $\ell(v) = \ell(u) + 1$ あるいは (2b) $\ell(v) = \ell(u) - 2\langle\rho, \beta^\vee\rangle + 1$ のいずれかが成り立つ.

ただし, $\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha$ とする.

頂点 $u, v \in W$ の間に directed edge が存在する時, $\beta \in \Delta^+$ と合わせて, $u \xrightarrow{\beta} v$ と記し, β をこの directed edge のラベルと呼ぶ. また, (2a) を満たす directed edge を Bruhat edge, (2b) を満たす directed edge を quantum edge と呼ぶ.

QBG(W) の directed edge $u \xrightarrow{\beta} v$ $(u, v \in W)$ に対し,

$$\mathrm{wt}(u \to v) := \begin{cases} 0 & \text{if } u \xrightarrow{\beta} v \text{ is a Bruhat edge,} \\ \beta^{\vee} & \text{if } u \xrightarrow{\beta} v \text{ is a quantum edge.} \end{cases} \tag{3.1}$$

と定める. さらに, 任意の $u, v \in W$ に対し, QBG(W) 上の最短な directed path $u = x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_r} x_r = v$ を取り,

$$\mathrm{wt}(u \Rightarrow v) := \mathrm{wt}(x_0 \to x_1) + \cdots + \mathrm{wt}(x_{r-1} \to x_r) \in Q^{\vee};$$

と定める. ウエイト $\mathrm{wt}(u \Rightarrow v)$ は u から v への QBG(W) 上の最短な directed path の取り方に依存しない ([Po, Lemma 1 (2), (3)]). dominant ウエイト $\lambda \in P^+$ に対し, $\mathrm{wt}_\lambda(u \Rightarrow v) := \langle \lambda, \mathrm{wt}(u \Rightarrow v) \rangle$ とし, これを u から v への QBG(W) 上の directed path の λ-ウエイトと呼ぶ.

3.2 量子 Lakshmibai-Seshadri パス

本稿では簡単のために, λ が regular dominant ウエイトのときに限定して量子 Lakshmibai-Seshadri パスの定義を述べる.

Definition 3.2 ([LNSSS2, Definition 3.1]). $\lambda \in P^{++}$ を regular dominant ウエイトとする. Weyl 群の列 $w_1, \ldots, w_s$ と, 増加有理数列 $0 = \sigma_0 < \cdots < \sigma_s = 1$ の組 $\eta = (w_1, w_2, \ldots, w_s; \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ が以下の条件を満たすとき, η を λ 型の量子 Lakshmibai-Seshadri (QLS) パスであるいう:

(C) 各 $1 \leq i \leq s-1$ に対し, w_{i+1} から w_i への $\mathrm{QBG}_{\sigma_i\lambda}(W)$ におけるパスが存在する.

λ 型 QLS パス全体の集合を QLS(λ) で表す.

Remark 3.3. λ が regular ではない一般の dominant ウエイトの場合には, QLS パスの定義はグラフ QBG(W) の代わりに, parabolic 量子 Bruhat グラフ $\mathrm{QBG}(W^{S_\lambda})$ により記述される. $\mathrm{QBG}(W^{S_\lambda})$ は, λ の 固定化部分群 W_{S_λ} の (minimal-length) coset representative の集合 $W^{S_\lambda} = W/W_{S_\lambda}$ をグラフの頂点として持っている.

集合 QLS(λ) は, (degree operator を持たない) 量子アフィン代数 $U'_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$ 上のある量子 Weyl 加群 $W_{\mathsf{v}}(\lambda)$ の結晶基底を実現している (see [LNSSS3, Theorem 4.1.1], [NS1, Theorem 3.2], [Na, Remark 2.15]). さらに, dominant ウエイト $\lambda, \mu \in P^+$ に対し, $U'_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-結晶としての同型

$$\mathrm{QLS}(\lambda + \mu) \simeq \mathrm{QLS}(\lambda) \otimes \mathrm{QLS}(\mu)$$

が存在する. 特に, $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^+$ とすれば, $U'_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-結晶としての同型

$$\mathrm{QLS}(\lambda) \cong \bigotimes_{i \in I} \mathrm{QLS}(\varpi_i)^{\otimes m_i}$$

が (I 上の全順序に取り方に依らず) 存在する.

3.3 QLS(λ) の次数付き指標

λ を dominant ウエイトとする. QLS パス $\eta=(w_1,\dots,w_s;\sigma_0,\dots,\sigma_s)\in \mathrm{QLS}(\lambda)$ と $w\in W$ に対し,

$$\mathrm{wt}(\eta):=\sum_{i=1}^{s}(\sigma_i-\sigma_{i-1})w_i\lambda\in P,$$
$$\mathrm{Deg}_w(\eta):=\sum_{i=1}^{s}\sigma_i\mathrm{wt}_\lambda(w_{i+1}\Rightarrow w_i),\qquad w_{s+1}:=w$$

と定める. QLS パスの定義により, $\sigma_i\mathrm{wt}_\lambda(w_{i+1}\Rightarrow w_i)$ が非負整数であることがわかる $(1\le i\le s-1)$. さらに, $\sigma_s=1$ であることを合わせて, $\mathrm{Deg}_w(\eta)$ が非負整数であることがわかる.

これらを用いて, QLS(λ) の次数付き指標を $w\in W$ ごとに,

$$\mathrm{gch}_w\mathrm{QLS}(\lambda):=\sum_{\eta\in\mathrm{QLS}(\lambda)}q^{-\mathrm{Deg}_w(\eta)}e^{\mathrm{wt}(\eta)}.$$

と定める.

Remark 3.4. λ を dominant ウエイトとする.

(1) $w=e$ の時, $\mathrm{gch}_e\mathrm{QLS}(\lambda)=E_{w_\circ\lambda}(q^{-1},0)$ が成り立つ ([LNSSS2, Lemma 7.7 and Theorem 7.9]).

(2) $w=w_\circ$ の時, $\mathrm{gch}_{w_\circ}\mathrm{QLS}(\lambda)=E_{w_\circ\lambda}(q,\infty)$ が成り立つ ([NNS, Theorem 3.2.7]).

4 extremal ウエイト加群

本章では, degree operator を持つ量子アフィン代数 $U_\mathsf{v}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$ 上の extremal ウエイト加群の $V(\lambda)$ $(\lambda\in P^+)$, その Demazure 部分加群 $V_w^-(\lambda)$ $(w\in W)$, そしてその商加群 $V_w^-(\lambda)/X_w^-(\lambda)$ を定義し, 次数付き指標についての先行研究 [NNS] の結果を紹介する.

本章では, untwisted アフィンルート系についての記号として, 以下のものを用いる.

$\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$: $\mathfrak{g}$ の untwisted affinization.

$I_{\mathrm{aff}}:=I\sqcup\{0\}$.

$\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}=\left(\bigoplus_{j\in I_{\mathrm{aff}}}\mathbb{C}\alpha_j^\vee\right)\oplus\mathbb{C}D$: $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ の Cartan 部分代数.

$\{\alpha_j^\vee\}_{j\in I_{\mathrm{aff}}}\subset\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}$: $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ の simple coroot の集合.

$\{\alpha_j\}_{j\in I_{\mathrm{aff}}}\subset\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}^*$: $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ の simple root の集合.

$D\in\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}$: degree operator.

$\Lambda_j\in\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}^*$ $(j\in I_{\mathrm{aff}})$: fundamental ウエイト.

$W_{\mathrm{aff}}:=\langle s_i\mid i\in I_{\mathrm{aff}}\rangle$: $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ の Weyl 群.

$\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}^*\times\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}\to\mathbb{C}$: 標準的な pairing.
(特に, $\langle\alpha_j, D\rangle=\delta_{j,0}$ and $\langle\Lambda_j, D\rangle=0$ $(j\in I_{\mathrm{aff}})$ が成り立つ.)

$\delta=\sum_{j\in I_{\mathrm{aff}}}a_j\alpha_j\in\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}^*$: $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ の null root.

$c=\sum_{j\in I_{\mathrm{aff}}}a_j^\vee\alpha_j^\vee\in\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}$: $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ の 標準的な中心元.

$P_{\mathrm{aff}}:=\left(\bigoplus_{j\in I_{\mathrm{aff}}}\mathbb{Z}\Lambda_j\right)\oplus\mathbb{Z}\delta\subset\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}^*$: $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ の ウエイト格子.

$Q_{\mathrm{aff}}:=\bigoplus_{j\in I_{\mathrm{aff}}}\mathbb{Z}\alpha_j$: $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}$ の ルート格子.

この記号の下で, $\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}D$ となっている. 本章では, $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ は $\langle\lambda, c\rangle=\langle\lambda, D\rangle=0$ により, $\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}^*$ の元とみなす. この同一視の下で, $\varpi_i=\Lambda_i-a_i^\vee\Lambda_0$ となっている $(i\in I)$.

4.1 extremal ウエイト加群

本節では, まず extremal ウエイト加群を定義し, その構造について概説する.

M を可積分 $U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-加群とする. ウエイト λ ($\in P_{\mathrm{aff}}$) を持つウエイトベクトル $u \in M$ が extremal である (see [Kas2, §3.1]) とは, ウエイトベクトルの族 $\{v_x\}_{x \in W_{\mathrm{aff}}}$ が存在して, 以下を満たすことである:

(1) $v_e = v$;

(2) $n := \langle x\lambda, \alpha_j^\vee \rangle \geq 0$ を満たす任意の $j \in I_{\mathrm{aff}}$ and $x \in W_{\mathrm{aff}}$ に対し, $E_j v_x = 0$, $F_j^{(n)} v_x = v_{s_j x}$ が成立.

(3) $n := \langle x\lambda, \alpha_j^\vee \rangle \leq 0$ を満たす任意の $j \in I_{\mathrm{aff}}$ and $x \in W_{\mathrm{aff}}$ に対し, $F_j v_x = 0$, $E_j^{(-n)} v_x = v_{s_j x}$ が成立.

但し, E_j, F_j ($j \in I_{\mathrm{aff}}$) は $U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$ の Chevalley 生成元であり, $E_j^{(k)}$, $F_j^{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は, それらの divided power である. 以下, $S_x v$ で上記の v_x を表す ($x \in W_{\mathrm{aff}}$).

$\lambda \in P_{\mathrm{aff}}$ に対し, extremal ウエイト加群 $V(\lambda)$ は, 生成元 v_λ と, v_λ は extremal ウエイトベクトルであるという定義関係式で生成される可積分 $U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-加群 である (詳細は [Kas1, §8] and [Kas2, §3] を参照). $V(\lambda)$ は, 結晶基底 $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ 及び大域基底 $\{G(b) \mid b \in \mathcal{B}(\lambda)\}$ を持つ ([Kas1, Proposition 8.2.2]). $G(u_\lambda) = v_\lambda$ を満たす $\mathcal{B}(\lambda)$ の元を u_λ とし, u_λ を含む $\mathcal{B}(\lambda)$ の連結成分を $\mathcal{B}_0(\lambda)$ で表す.

また, $U_{\mathsf{v}}'(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}) \subset U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$ であるから, extremal ウエイト加群を $U_{\mathsf{v}}'(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-加群としてみることもできる. このとき, 任意の $i \in I$ に対して, $U_{\mathsf{v}}'(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-加群としての自己同型 $z_i : V(\varpi_i) \to V(\varpi_i); v_{\varpi_i} \mapsto v_{\varpi_i}^{[1]} := G(u_{\varpi_i}^{[1]})$ が存在する. ここで, $u_{\varpi_i}^{[1]} \in \mathcal{B}(\varpi_i)$ は, ウエイト $\varpi_i + \delta$ を持つ唯一の元である. また, この写像 $z_i : V(\varpi_i) \to V(\varpi_i)$ は, 結晶基底の全単射 $z_i : \mathcal{B}(\varpi_i) \to \mathcal{B}(\varpi_i); u_{\varpi_i} \mapsto u_{\varpi_i}^{[1]}$ を誘導する. この全単射は柏原作用素と可換である.

dominant ウエイト $\lambda \in P^+$ を $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in I$ と表せるとする. 頂点集合 I 上の全順序を固定し, $\widetilde{V}(\lambda) := \bigotimes_{i \in I} V(\varpi_i)^{\otimes m_i}$ とする. すると, $U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-加群としての埋め込み $\Phi_\lambda : V(\lambda) \hookrightarrow \widetilde{V}(\lambda); v_\lambda \mapsto \widetilde{v}_\lambda := \bigotimes_{i \in I} v_{\varpi_i}^{\otimes m_i}$ が存在する ([BN, eq. (4.8) and Corollary 4.15]). さらに, $z_{i,k}$ を $V(\varpi_i)^{\otimes m_i}$ 上の k-番目の因子にのみ z_i として作用する (他の因子には恒等写像として作用する) $U_{\mathsf{v}}'(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-加群の自己同型とする. $z_{i,k}$ ($i \in I$, $1 \leq k \leq m_i$) 達は互いに可換である.

dominant ウエイト $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^+$ に対して, 集合 $\overline{\mathrm{Par}(\lambda)}$ (resp., $\mathrm{Par}(\lambda)$) とは, 長さ m_i 以下 (resp., 未満) の分割 $\rho^{(i)}$ ($i \in I$) の $|I|$ 個の組 $\boldsymbol{\rho} = (\rho^{(i)})_{i \in I}$ 全体からなる集合とする. 但し, 長さ 0 未満の分割は, 空分割 $\emptyset$ とみなす. 定義より明らかに $\mathrm{Par}(\lambda) \subset \overline{\mathrm{Par}(\lambda)}$ である.

$\boldsymbol{\rho} = (\rho^{(i)})_{i \in I} \in \overline{\mathrm{Par}(\lambda)}$ に対し,

$$s_{\boldsymbol{\rho}}(z^{-1}) := \prod_{i \in I} s_{\rho^{(i)}}(z_{i,1}^{-1}, \ldots, z_{i,m_i}^{-1}).$$

と定義する. ここで, $s_\rho(x) = s_\rho(x_1, \ldots, x_m)$ は, 長さ $m (\geq 1)$ 以下の分割 $\rho = (\rho_1 \geq \cdots \geq \rho_{m-1} \geq 0)$ に対応する Schur 多項式である. このとき, $\boldsymbol{\rho} = (\rho^{(i)})_{i \in I} \in \overline{\mathrm{Par}(\lambda)}$ に対し $s_{\boldsymbol{\rho}}(z^{-1})(\mathrm{Img}\, \Phi_\lambda) \subset \mathrm{Img}\, \Phi_\lambda$ が成り立つことが直ちにわかる ([NS2, §7.3] 参照). これにより, $U_{\mathsf{v}}'(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-加群の準同型 $z_{\boldsymbol{\rho}} : V(\lambda) \to V(\lambda)$ を, 次の図式が可換になるように定義する:

$$\begin{array}{ccc} V(\lambda) & \xrightarrow{\Phi_\lambda} & \widetilde{V}(\lambda) \\ {\scriptstyle z_{\boldsymbol{\rho}}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle s_{\boldsymbol{\rho}}(z^{-1})} \\ V(\lambda) & \xrightarrow{\Phi_\lambda} & \widetilde{V}(\lambda); \end{array}$$

$U_{\mathsf{v}}'(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-加群の準同型 $z_\rho : V(\lambda) \to V(\lambda)$ は, $\mathbb{C}$-線形写像 $z_\rho : \mathcal{L}(\lambda)/\mathsf{v}\mathcal{L}(\lambda) \to \mathcal{L}(\lambda)/\mathsf{v}\mathcal{L}(\lambda)$ を誘導する. この写像は, 柏原作用素と可換である. この写像 z_ρ を用いると,

$$\mathcal{B}(\lambda) = \{z_\rho b \mid \rho \in \mathrm{Par}(\lambda),\ b \in \mathcal{B}_0(\lambda)\}$$

と表せる ([BN, p. 371]).

4.2 Demazure 部分加群

この節では, extremal ウエイト加群 $V(\lambda)$ の Demazure 部分加群を定義し, その次数付き指標の QLS パスの集合による表示公式を紹介する.

$w \in W$ に対して, extremal ウエイト加群 $V(\lambda)$ の Demazure 部分加群 を $V_w^-(\lambda) := U_{\mathsf{v}}^-(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})S_w v_\lambda \subset V(\lambda)$ で定義する. ここで, $U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}) = U_{\mathsf{v}}^-(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}) \otimes U_{\mathsf{v}}^0(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}) \otimes U_{\mathsf{v}}^+(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$ は量子アフィン代数 $U_{\mathsf{v}}(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$ の三角分解とする. $V_w^-(\lambda)$ は, ウエイト分解を持つ:

$$V_w^-(\lambda) := \bigoplus_{\mu \in P_{\mathrm{aff}}} V_w^-(\lambda)_\mu.$$

これにより, $V_w^-(\lambda)$ の指標 $\mathrm{ch}(V_w^-(\lambda))$ を

$$\mathrm{ch} V_w^-(\lambda) := \sum_{\mu \in P_{\mathrm{aff}}} \dim(V_w^-(\lambda)_\mu) e^\mu$$

と定義する. さらに, $e^\delta = q$ とすることで, 次数付き指標が定義できる.

$$\mathrm{gch} V_w^-(\lambda) := \sum_{\mu \in P, k \in \mathbb{Z}} \dim(V_w^-(\lambda)_{\mu + k\delta}) e^\mu q^k.$$

この次数付き指標は, 次のように QLS パスで表示できる.

Proposition 4.1 ([NNS, Theorem 5.1.1]). $\lambda \in P$ を dominant ウエイト, $w \in W$ の元とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\mathrm{gch} V_w^-(\lambda) = \left(\prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{m_i} (1 - q^{-r})^{-1} \right) \mathrm{gch}_w \mathrm{QLS}(\lambda).$$

4.3 商加群 $V_w^-(\lambda)/X_w^-(\lambda)$

Demazure 部分加群 $V_w^-(\lambda)$ の部分加群 $X_w^-(\lambda)$ を次のように定義する.

$$X_w^-(\lambda) := \sum_{\substack{\rho \in \overline{\mathrm{Par}(\lambda)} \\ \rho \neq (\emptyset)_{i \in I}}} U_{\mathsf{v}}^-(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}) S_w z_\rho v_\lambda = \sum_{\substack{\rho \in \overline{\mathrm{Par}(\lambda)} \\ \rho \neq (\emptyset)_{i \in I}}} z_\rho \left(V_w^-(\lambda) \right).$$

このとき, $\mathrm{gch} V_w^-(\lambda)$ と同様に, 商加群 $V_w^-(\lambda)/X_w^-(\lambda)$ の次数付き指標 $\mathrm{gch}(V_w^-(\lambda)/X_w^-(\lambda))$ が定義される:

$$\mathrm{gch}(V_w^-(\lambda)/X_w^-(\lambda)) := \sum_{\mu \in P, k \in \mathbb{Z}} \dim((V_w^-(\lambda)/X_w^-(\lambda))_{\mu + k\delta}) e^\mu q^k.$$

この次数付き指標は, 次のように QLS パスで表示できる.

Proposition 4.2 ([NNS, Corollary 5.3.3]). $\lambda \in P$ を dominant ウエイト, $w \in W$ の元とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\mathrm{gch}(V_w^-(\lambda)/X_w^-(\lambda)) = \mathrm{gch}_w \mathrm{QLS}(\lambda).$$

5 主結果

$\mathbb{Q}(q)$ 上の involution $\overline{\cdot}$ を $\overline{q} = q^{-1}$ で定義し,

$$\overline{f} := \sum_{\mu \in P} \overline{f_\mu} e^\mu \quad \text{for} \quad f = \sum_{\mu \in P} f_\mu e^\mu \in \mathbb{Q}(q)[P] \text{ with } f_\mu \in \mathbb{Q}(q)$$

とする. 主結果は以下の通りである.

Theorem 5.1 ([No, Theorem 5.1.2]). $\lambda \in P^+$ を dominant ウエイト, w を Weyl 群 W の元とする. このとき, 次が成り立つ.

$$w_\circ \left(\overline{\mathrm{gch} W_{ww_\circ\lambda}}\right) = \mathrm{gch}_{w_\circ ww_\circ} \mathrm{QLS}(\lambda).$$

この定理と Proposition 4.2 から, 次数付き指標についての次の等式が得られる:

Theorem 5.2 ([No, Theorem 5.1.3]). $\lambda \in P^+$ を dominant ウエイト, w を Weyl 群 W の元とする. このとき, 次が成り立つ.

$$w_\circ \left(\overline{\mathrm{gch} W_{ww_\circ\lambda}}\right) = \mathrm{gch}(V^-_{w_\circ ww_\circ}(\lambda)/X^-_{w_\circ ww_\circ}(\lambda)).$$

6 応用

Feigin-Makedonskyi [FM] は, dominant ウエイト λ, $i \in I$, 及び $w \in I$ に対し, 次数付き指標 $\mathrm{gch} W_{ww_\circ(\lambda+\varpi_i)}$ を 一般化 Weyl 加群 $W_{ww_\circ\varpi_i}$ と $W_{vw_\circ\lambda}$ $(v \in W)$ の言葉で記述する公式を証明している. さらに全く同様の証明により, dominant ウエイト λ, μ に対し, 次数付き指標 $\mathrm{gch} W_{ww_\circ(\lambda+\mu)}$ を $W_{ww_\circ\lambda}$ と $W_{vw_\circ\mu}$ $(v \in W)$ の言葉で記述することが出来る (正確な公式の記述には, 量子 alcove walk を必要とする. ここでは省略する). この公式を Theorem 5.2 により, QLS パスの言葉で記述すると, 次が得られる.

Theorem 6.1. λ を regular dominant ウエイト, μ を dominant ウエイトとする. $\eta = (y_1, \ldots, y_s; \sigma_0, \ldots, \sigma_s) \in \mathrm{QLS}(\lambda)$ に対し, $\xi := \sum_{p=0}^{s-1} \langle \mu, \mathrm{wt}(y_{p+1} \Rightarrow y_p) \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と定める. このとき, 次が成り立つ.

$$\mathrm{gch}_{w_\circ ww_\circ} \mathrm{QLS}(\lambda + \mu) = \sum_{\eta = (y_1, \ldots y_s; \sigma_0, \ldots, \sigma_s) \in \mathrm{QLS}(\lambda)} q^{-\mathrm{Deg}_{w_\circ ww_\circ}(\eta) - \xi} x^{\mathrm{wt}(\eta)} \mathrm{gch}_{w_\circ y_s} \mathrm{QLS}(\mu).$$

Remark 6.2. λ が regular でない dominant ウエイトの場合にも, 類似の結果が得られている. この場合, $\mathrm{QLS}(\lambda)$ の元は parabolic 量子 Bruhat グラフ $\mathrm{QBG}(W^{S_\lambda})$ における directed path の存在により条件付けられており, Theorem 6.1 を記述するためには, "lift" という操作により, parabolic 量子 Bruhat グラフ $\mathrm{QBG}(W^{S_\lambda})$ における directed path を (通常の) 量子 Bruhat グラフ $\mathrm{QBG}(W)$ における directed path に持ち上げる必要がある (see [LNSSS1, Theorem 7.1]).

第 3 章で説明した通り, $U'_v(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}})$-結晶としての同型

$$\mathrm{QLS}(\lambda + \mu) \simeq \mathrm{QLS}(\lambda) \otimes \mathrm{QLS}(\mu), \qquad \lambda, \mu \in P^+$$

が存在する. そして特に,

$$\mathrm{QLS}(\lambda) \simeq \bigotimes_{i \in I} \mathrm{QLS}(\varpi_i)^{\otimes m_i}, \qquad \lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i$$

が存在する. Theorem 6.1 は, このテンソル積の分解に沿って, QLS(ϖ_i) の次数付き指標から帰納的に, QLS(λ) の次数付き指標 (すなわち, 一般化 Weyl 加群 $W_{ww_\circ\lambda}$ や Demazure 部分加群の商加群 $(V_w^-(\lambda)/X_w^-(\lambda))$ の次数付き指標) を定める漸化式である.

7 謝辞

最後に, RIMS 共同研究「表現論と組合せ論」において講演の機会を与えて下さった和地輝仁先生にこの場を借りてお礼申し上げます.

参考文献

[BFP] F. Brenti, S. Fomin, and A. Postnikov, Mixed Bruhat operators and Yang-Baxter equations for Weyl groups, *Int. Math. Res. Not.* **8** (1999), 419–441.

[BN] J. Beck and H. Nakajima, *Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras*, Duke Math. J. **123** (2004), no. 2, 335–402.

[FM] E. Feigin and I. Makedonskyi, *Generalized Weyl modules, alcove paths and Macdonald polynomials*, Selecta. Math. (N.S.) **23** (2017), no. 4, 2863–2897, DOI 10.007/s00029-017-0346-2.

[Kas1] M. Kashiwara, *Crystal bases of modified quantized enveloping algebra*, Duke Math. J. **73** (1994), no. 2, 383–413.

[Kas2] M. Kashiwara, *On level-zero representations of quantized affine algebras*, Duke Math. J. **112** (2002), no. 1, 117–175.

[LNSSS1] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals I: Lifting the parabolic quantum Bruhat graph, *Int. Math. Res. Not.* **2015** (2015), 1848–1901.

[LNSSS2] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II: Alcove model, path model, and $P = X$, *Alcove model, path model, and* $P = X$, Int. Math. Res. Not. **14** (2017), 4259–4319.

[LNSSS3] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Quantum Lakshmibai-Seshadri paths and root operators, *Adv. Stud. Pure Math.* Vol. 71, 2016, pp. 267–294.

[NNS] S. Naito, F. Nomoto, and D. Sagaki, *Specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at* $t = \infty$ *and Demazure submodules of level-zero extremal weight modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), no. 4, 2739–3783.

[NS1] S. Naito and D. Sagaki, Crystal of Lakshmibai-Seshadri paths associated to an integral weight of level zero for an affine Lie algebra, *Int. Math. Res. Not.* **14** (2005), 815–840.

[NS2] S. Naito and D. Sagaki, *Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials*, Math. Z. **283** (2016), no. 3–4, 937–978.

[Na] H. Nakajima, Extremal weight modules of quantum affine algebras, *Adv. Stud. Pure Math.* Vol. 40, 2004, pp. 343–369.

[No] F. Nomoto, *Generalized Weyl modules and Demazure submodules of level-zero extremal weight modules*, preprint 2017, arXiv:1701.08377.

[OS] D. Orr and M. Shimozono, *Specialization of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials*, to appear in J. Algebraic Combin., DOI 10.1007/s10801-017-0770-6.

[Po] A. Postnikov, Quantum Bruhat graph and Schubert polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 699–709.