数理解析研究所講究録
第2076巻 2018年 197-202

可積分系における rogue wave 解の数理的構造

神戸大学・理学部　太田 泰広
Yasuhiro Ohta
Faculty of Science, Kobe University

1　はじめに

Rogue wave とは freak wave などとも呼ばれ, 水面において前兆もなく突然現れる大振幅波のことであり, 海洋の波の運動などにおいて観測されている. 海洋における rogue wave は, ある場所に突然出現し短時間で消滅するため, その発生を予測することが困難である一方, 波高が非常に大きくなり船舶に被害をもたらすことがあるため, これまでも詳しく研究されてきている. このような時間的空間的に局在した大振幅波の発生は, 線形波動の重ね合わせによる偶発的な現象として理解される場合もあるが, 非線形の波動現象として捉えられるとする考え方もある.

空間 1 次元における波動の変調を記述する非線形な発展方程式として, 最も基本的なものの一つに非線形 Schrödinger (NLS) 方程式

$$iu_t = u_{xx} + \frac{1}{2}|u|^2 u \tag{1}$$

がある. ここで u は搬送波に比べて波長の長い変調波の複素振幅であり, $i=\sqrt{-1}$ である. この方程式に対しては, 時間的空間的に局在した構造をもつ解が無限個存在することが知られており, それらの解は rogue wave のモデルになり得ると期待されるため, しばしば rogue wave 解と呼ばれている. 無限個の解を具体的に構成できることは, NLS 方程式が非線形可積分系の構造をもつことに起因している. 可積分系とは平たく言えば, ソリトン方程式に代表されるような解ける発展方程式系のことであり, それらの方程式系に対しては, ソリトン解などの様々な特解を導出することが可能である. 有名な非線形可積分系として, Korteweg-de Vries (KdV) 方程式, 変形 KdV 方程式, Kadomtsev-Petviashvili 方程式, sine-Gordon 方程式などがある. これらの方程式は物理系のモデル方程式として現れ, 応用上の意義をもつというだけでなく, 方程式系とその解の空間が豊富な数理的構造をもつために, 数学や数理科学においても興味深い研究対象となっている. 可積分系の研究においては, ソリトン方程式に対する解のうち, 時間的に局在した構造をもつもののことを, 広い意味で rogue wave 解と呼んでいる.

本稿では読者として可積分系の非専門家を想定し, 可積分発展方程式系に対する rogue wave 解の特徴について概説する. 特に, ソリトン方程式系のどのような時間的局在解が研究対象となっているのか, どのような方程式がそれらの時間的局在解をもつのか, 解の数理的構造とはどういうものなのかといった点について, 細かい話には深入りせずに手っ取り早く理解できるように解説することを目標とする.

2 Rogue wave 解の具体形

近年盛んに研究されているソリトン方程式の rogue wave 解は, 本質的に有理式解のことである. NLS 方程式 (1) の場合で rogue wave 解の具体例を見てみる. 複素振幅の変数変換 $u=ve^{-it/2}$ によって (1) は,

$$iv_t = v_{xx} + \frac{1}{2}(|v|^2-1)v$$

と書き換えられる. この方程式において v は有理式解

$$v = 1 - 4\frac{1-it}{1+x^2+t^2} \tag{2}$$

をもつことが直接計算により簡単に確められる. 元の NLS 方程式 (1) では

$$u = (\text{有理式}) \times (\text{指数関数})$$

の形をしており, これが様々なソリトン方程式に対する rogue wave 解の基本形である. 指数関数の部分は平面波を表すので, (2) は $t\to\pm\infty$ または $x\to\pm\infty$ においては振幅 1 の搬送波に対応することになり, 変調された構造は原点 $(x,t)=(0,0)$ の近傍だけに局在している. 波高 $|u|$ は原点において最大値 3 をとる. この時間的空間的に局在した解を, NLS 方程式の最低次の rogue wave 解という. NLS 方程式は x と t の有理式で表される解を無限個もち, 例えばひとつ高次の有理式解は,

$$v = 1 - 4\frac{g}{f} \tag{3}$$

$$f = (1+x^2+t^2)^2 + (x - \frac{x^3}{3} + xt^2 + a)^2 + (3t - x^2t + \frac{t^3}{3} + b)^2$$

$$g = (x^2-(1-it)^2)(1+x^2+t^2) + 2x(1-it)(x-\frac{x^3}{3}+xt^2+a) + i(x^2+(1-it)^2)(3t-x^2t+\frac{t^3}{3}+b)$$

で与えられる. ここで a, b は任意の実定数である. この解はパラメーター a, b の値によって様々な波形の変調を記述するが, それらはすべて, 基本的には最低次の rogue wave 解の非線形の重ね合わせに相当している. もっと高次の有理式で与えられる解も存在し, これらの無限個の有理式解の系列は高次の rogue wave 解と呼ばれ, いずれも時間的空間的に局在した構造をもつ. $t\to-\infty$ において平面波であった解が, 方程式の非線形項による集束効果によって, ある時刻ある地点の近傍において大きな振幅をもつ局在波を形成した後, 時間が経過し $t\to\infty$ になると再び平面波に戻る.

同様の有理式解は, 空間 2 次元のソリトン方程式である Davey-Stewartson (DS) 方程式

$$\begin{aligned} iA_t &= A_{xx} - A_{yy} - (|A|^2 + 2Q)A \\ Q_{xx} + Q_{yy} &= -(|A|^2)_{xx} \end{aligned} \tag{4}$$

などに対しても存在する. DS 方程式の場合にも rogue wave 解は, 複素振幅 A が (有理式)×(指数関数) の形で与えられ, 時間的に局在した構造をもち, ある時刻 (例えば $t=0$) の近

傍においてのみソリトン的構造が現れる. 最低次の rogue wave 解の場合, $t \to -\infty$ において平面波 (搬送波) だけであった解が, $t = 0$ の近傍において, 空間的に 1 次元的に局在した線ソリトンのような構造を形成し, $t \to \infty$ で再び平面波に戻る. 時間的には局在しているが, 空間的には 2 次元的局在はせずに 1 次元的に広がった線ソリトンを成す点が, 空間 2 次元における最低次の rogue wave 解の特徴である. 高次の rogue wave 解は, この最低次の rogue wave 解の非線形の重ね合わせによって与えられる. DS 方程式 (4) の高次の rogue wave 解においては, パラメーターの値によって有限時間で爆発する解を構成することもできる. 例えば, 時空間の 1 点 $(x, y, t) = (0, 0, 0)$ でのみ発散し, それ以外の点では正則な rogue wave 解が存在する. このようにパラメーターを含む無限個の有理式解の系列から, 様々な挙動を記述する解が得られる点が興味深い.

最後に有理式解以外の rogue wave 解について触れておく. NLS 方程式のような空間 1 次元の方程式に対しては, 時間的に局在し空間的に局在しない解が知られている. それは最低次の rogue wave 解を空間的に等間隔に配置したような解であり, 指数関数を用いて表され, breather 解の特殊な場合に相当している. DS 方程式のような空間 2 次元の方程式に対しては, そのような解はまだ明示的に構成されていないようである.

3 Rogue wave 解をもつ方程式

現時点で rogue wave 解 (時間的に局在する解) が構成されている方程式は, NLS 方程式の系列の方程式に限られている. NLS 方程式と DS 方程式以外では, 例えば以下のような方程式がある.

Yajima-Oikawa 方程式

$$iS_t = S_{xx} + LS$$
$$L_t = (|S|^2)_x$$

Ablowitz-Ladik 方程式 (離散 NLS 方程式)

$$i\frac{d}{dt}u_n = (1 \pm |u_n|^2)(u_{n+1} + u_{n-1})$$

微分型 NLS 方程式

$$iu_t = u_{xx} + |u|^2 u_x$$

結合型 NLS 方程式

$$iu_t = u_{xx} + (|u|^2 + |v|^2)u$$
$$iv_t = v_{xx} + (|u|^2 + |v|^2)v$$

複素変形 KdV 方程式

$$u_t = u_{xxx} + |u|^2 u_x$$

上記のような NLS 方程式と類似の構造をもつ方程式に対してしか, rogue wave 解が得られていないのは, rogue wave 解が有理式解の中でも特別なクラスの解であるためと思わ

れる．搬送波だけの状態から局在構造が発生するのだから，方程式は変調不安定性をもっていなければならない．エネルギー保存則のもとで，何もないところに大振幅の波が生じるためには，有限振幅をもつ搬送波を背景としている解に限定されるであろう．そのような方程式に対する解の中で局在構造をもち得るものが，(有理式) × (指数関数) の形の解であったわけである．有理式解というだけならば，すべてのソリトン方程式に対して存在するが，それらのうちで正則でかつ時間的に局在するものに限定すると，基本的に前章で与えた解のクラスしか知られていないというのが現状である．

4　Rogue wave 解の行列式構造

一般のソリトン方程式に共通する性質として，解が行列式を用いて簡潔に表現できるという点がある．NLS 方程式の rogue wave 解に対してこの行列式構造を見てみよう．最低次の rogue wave 解 (2) を

$$v = \frac{m_{11}^{(1)}}{m_{11}^{(0)}}$$

$$m_{11}^{(n)} = x^2 + t^2 + 1 - 4n^2 + 4int$$

と書くと，ひとつ高次の rogue wave 解 (3) は

$$v = \frac{\begin{vmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{11}^{(0)} & m_{12}^{(0)} \\ m_{21}^{(0)} & m_{22}^{(0)} \end{vmatrix}}$$

$$\begin{aligned} m_{12}^{(n)} &= (x^2+t^2+1)((x+3+it)^2+6it-4nx)+6(a+ib)(x-it+2n) \\ &\quad +8(t^2-1+2ixt+n((it-n)((x+it)(3-2n+it)+3it+2n^2)+4it)) \\ m_{21}^{(n)} &= (m_{12}^{(-n)} \text{の複素共役}) \\ m_{22}^{(n)} &= (x, t \text{ の多項式, 具体形は複雑なので省略}) \end{aligned}$$

と書くことができる．さらに高次の rogue wave 解は一般に

$$v = \frac{\begin{vmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} & \cdots & m_{1N}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} & \cdots & m_{2N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{N1}^{(1)} & m_{N2}^{(1)} & \cdots & m_{NN}^{(1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{11}^{(0)} & m_{12}^{(0)} & \cdots & m_{1N}^{(0)} \\ m_{21}^{(0)} & m_{22}^{(0)} & \cdots & m_{2N}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{N1}^{(0)} & m_{N2}^{(0)} & \cdots & m_{NN}^{(0)} \end{vmatrix}}$$

のような行列式表示をもつ. ここで行列式の成分 $m_{ij}^{(n)}$ は x, t の多項式である.

このように, ある種の条件をみたす関数を成分とする行列式によって解が与えられるのが, ソリトン方程式の一般的特徴である. 行列式成分として具体的にどのような関数をもってくるかは, どのようなソリトン方程式のどのような解を構成するかによる. 最も典型的な解であるソリトン解は, 指数関数の多項式を行列式成分とすることによって得られる. Rogue wave 解のような有理式解の場合には, 指数関数をパラメーターで微分した関数を行列式の成分にとる. NLS 方程式の最低次の rogue wave 解の場合, まずパラメーター p, q を含む x, t の指数関数

$$m^{(n)} = \left(\frac{p}{q}\right)^n \frac{1}{p+q} \exp\left(\frac{p+q}{2}x - \frac{p^2-q^2}{4}it\right)$$

を考え, これを p, q で微分した後に $p=q=1$ ととることによって $m_{11}^{(n)}$ が得られる. 実際,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}m^{(n)}\bigg|_{p=q=1} \\
&= \left(\left(\frac{x}{2} - \frac{pit}{2} - \frac{1}{p+q} + \frac{n}{p}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{qit}{2} - \frac{1}{p+q} - \frac{n}{q}\right) + \frac{1}{(p+q)^2}\right) m^{(n)}\bigg|_{p=q=1} \\
&= \frac{1}{4}((x - it - 1 + 2n)(x + it - 1 - 2n) + 1)\, m^{(n)}\Big|_{p=q=1}
\end{aligned}$$

なので, x の原点シフト $x \to x+1$ のもとで行列式成分 $m_{11}^{(n)}$ が

$$m_{11}^{(n)} = \frac{4}{m^{(n)}}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}m^{(n)}\bigg|_{p=q=1}$$

のように求まる. 一般の行列式成分 $m_{ij}^{(n)}$ は, $m^{(n)}$ のパラメーター p, q による高階微分から得ることができる. 以上のような解の行列式構造を明らかにすることによって, 一般的な rogue wave 解を明示的に書き下すことが可能になる.

様々なソリトン方程式の有理式解が, 上のようなパラメーターに関する微分によって導出される. それらの有理式解の中から rogue wave 解を得るためには, 解の正則性条件 (有理式の分母が 0 にならない条件) をみたし, さらに時間に関する局在性条件をみたすような解を構成しなければならない. これは非自明な問題であり, 現在までに得られているのは, NLS 方程式と同じ系列に属するソリトン方程式に対する rogue wave 解のみである.

5 おわりに

可積分系の理論における rogue wave 解とは, ソリトン方程式に対する時間的に局在した構造をもつ解のことであり, 通常は NLS 方程式の系列に対する特殊なクラスの有理式解のことを指す. それらの解は行列式の構造をもち, 一般的な高次の rogue wave 解が, 多項式を成分とする行列式を用いて明示的に構成されている. これらの rogue wave 解のグラフについては, 参考文献などにあるものを参照していただければ幸いである. NLS 方程

式の系列以外のソリトン方程式に対して, rogue wave 解 (時間的に局在した有理式解) を構成することは, 重要な未解決問題のひとつである. また, 有理式解以外の時間的局在解がどこまで一般化できるのかを明らかにすることも, 興味深い問題であり今後の課題である.

元々の流体における rogue wave の研究と, 数理科学における rogue wave 解の研究の間に隔たりがあることは否めない. 例えば NLS 方程式を水面波の運動を近似的に記述する方程式と見なす場合, rogue wave 解のような大振幅の解に対しては, 最早その近似が妥当ではないとも考えられるため, NLS 方程式の rogue wave 解を水面に現れる rogue wave のモデルと見なすことについても賛否が分かれる. NLS 方程式が可積分系であり豊富な数学的構造をもつから, その rogue wave 解が詳しく研究されているが, 実際に観測される rogue wave の現象を理解するためには, 可積分系に限らずもっと広いクラスの方程式を対象として, 有理式解に限定されない広いクラスの関数を対象とした研究を進めることが, 重要であり今後の課題であると思われる.

参考文献

[1] N. Akhmediev, A. Ankiewicz and M. Taki, Phys. Lett. A **373** (2009) 675.

[2] N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo and A. Ankiewicz, Phys. Lett. A **373** (2009) 2137.

[3] P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein and V. B. Matveev, Eur. Phys. J. Special Topics **185** (2010) 247.

[4] P. Dubard and V. B. Matveev, Nat. Hazards Earth Syst. Sci. **11** (2011) 667.

[5] V. M. Eleonskii, I. M. Krichever and N. E. Kulagin, Sov. Phys. Dokl. **31** (1986) 226.

[6] Y. Ohta and J. Yang, Proc. R. Soc. A **468** (2012) 1716.

[7] Y. Ohta and J. Yang, J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013) 105202.

[8] D. H. Peregrine, J. Austral. Math. Soc. Ser. B **25** (1983) 16.