

# 質量交換型 2 粒子模型のソリトン相互作用への応用 III

富山大・工 角 昌 浩 (Hiroshi Kakuhata), 山 埜 井 翔 吾 (Shogo Yamanoi)  
Faculty of Engineering, University of Toyama

## 1 はじめに

ソリトンが粒子のように振る舞い、ソリトン同士の衝突によって軌道が変化し位相シフトが起こることはよく知られている [1]。その挙動から、ソリトンを粒子としてとらえ、原子核や素粒子のモデルとしても用いられている [2]。このような見方にとって、これまでにソリトンを粒子として扱うために、ソリトンの相互作用に類似した相互作用をする二粒子系の振る舞いを調べ、その理論形式を考察してきた [3, 4, 5]。

ソリトン系の例として用いたのは、外部磁場中の内部電流を持つストリングの運動を記述する連立非分散方程式 [7, 8]

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}) \tag{1}$$

で、そのソリトン解は双方向に進行するループソリトンである。ここで、 $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$  はストリングの位置ベクトル、 $\mathbf{J}$  は一定の外部電流ベクトル、 $\tau$  は時間、 $\sigma$  はストリングに沿う弧長に対応するパラメータである。それぞれ位相速度  $v$  と  $-v$  でソリトンが同一平面内で正面衝突するとき、連立非分散方程式の厳密な 2 ソリトン解の  $Z$  は、

$$\begin{aligned} F &= \beta(\tau) + v^2 \cosh 2\gamma\sigma, \\ \beta(\tau) &= \cosh 2\gamma v\tau + (1 - v^2) \cos \theta_{12} \end{aligned} \tag{2}$$

より、

$$Z = \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \ln F \tag{3}$$

で与えられる。右に向かうソリトン 1 と左に向かうソリトン 2 の位置をそれぞれ  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  とする。同じスピード  $v$  でのソリトンの正面衝突のとき二つのソリトンのピーク ( $\partial^2 Z = 0; \partial^3 Z > 0$ ) を求める方程式は、波数が同じなので、 $e^{2\gamma\sigma}$  ( $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ ) の 4 次方程式になる。しかし、厳密解は非常に複雑なので、これまで十分遠方での衝突前の近似解

$$\begin{aligned} e^{2\gamma\sigma_1} &\approx \frac{v^2[1 + 2(1-v)\cos\theta]e^{2\gamma v\tau}}{1 + 2(1-v)(2+v)\cos\theta e^{2\gamma v\tau}}, \\ e^{2\gamma\sigma_2} &\approx \frac{1 + 2(1+v)(2-v)\cos\theta e^{2\gamma v\tau}}{v^2[1 + 2(1+v)\cos\theta e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}} \end{aligned} \tag{4}$$

と衝突後の近似解

$$\begin{aligned} e^{2\gamma\sigma_1} &\approx \frac{1 + 2(1-v)(2+v)\cos\theta e^{-2\gamma v\tau}}{v^2[1 + 2(1-v)\cos\theta e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}, \\ e^{2\gamma\sigma_2} &\approx \frac{v^2[1 + 2(1+v)\cos\theta e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 2(1+v)(2-v)\cos\theta e^{-2\gamma v\tau}} \end{aligned} \quad (5)$$

を用いてきた。しかし、近似解のオーダリングの取り方によって対応する粒子モデルにおけるポテンシャルが高くなりすぎたり低すぎたりしていた。これは十分遠方の解だけでは相互作用しているときの情報は全く不十分だからと考えられる。そこで本稿では、ソリトンが近距離に迫ったときの運動を記述する試みについて述べたい。

## 2 近距離での解の導出

ソリトンのピークの位置を表す方程式は

$$\begin{aligned} v^2(\beta(\tau) + v \sinh 2\gamma v\tau)y^4 + 2[2v^4 - \beta(\tau)(\beta(\tau) + v \sinh 2\gamma v\tau)]y^3 \\ - 6v^3 \sinh 2\gamma v\tau y^2 + 2[\beta(\tau)(\beta(\tau) - v \sinh 2\gamma v\tau) - 2v^4]y \\ - v^2(\beta(\tau) - v \sinh 2\gamma v\tau) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

である。ここで  $y = e^{2\gamma\sigma}$  である。さらに、ここで  $x = e^{2\gamma v\tau}$  とすれば、

$$a_4y^4 + a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0 = 0 \quad (7)$$

を得る。ただし、係数  $a_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) は

$$\begin{aligned} a_4 &= v^2(1+v)x^3 + 2v^2(1-v^2)\cos\theta_{12}x^2 + v^2(1-v)x \\ a_3 &= -x^4 - (1-v^2)(2+v)\cos\theta_{12}x^3 + 2[4v^4 - 1 - 2(1-v^2)^2\cos^2\theta_{12}]x^2 \\ &\quad + (1-v^2)(2-v)\cos\theta_{12}x - 1 \\ a_2 &= -6v^3(x^2 - 1)x \\ a_1 &= (1-v)x^4 + 2(1-v^2)(2-v)\cos^2\theta_{12}x^3 + 2[1 - v^4 + 2(1-v^2)^2\cos^2\theta_{12}]x^2 \\ &\quad + 2(1-v^2)(2+v)x + 1 + v \\ a_0 &= -v^2(1-v)x^3 - 2v^2(1-v^2)\cos\theta_{12} - v^2(1+v)x \end{aligned} \quad (8)$$

である。 $v = 0.1$  の場合に、方程式 (7) の左辺の関数を  $x$  を固定して、 $y$  の関数として図示 (縦軸が (7) の左辺の値、横軸が  $y$ ) すると図 1 のようになる。この関数の零点が解である。一番右にある大きな零点は意外と大きな値であるが、 $x$  が大きくなるに従って、右から左に移動して、また右に引き返していくことがわかる。これはこの零点が、 $v$  が小さい場合に衝突前に右から左に移動し、衝突後には跳ね返って右に向かうソリトン 2 のピーク  $\sigma_2$  であることを意味する。また、図 1 の曲線は 4 次関数に見えないかもしれないが、 $v = 0.1$  の場合の原点付近での様子を拡大してみると確かに 4 次関数になっていることがわかる (図 2)。この場合には、左右対称のように見えるが、例えば、 $v = 0.7$  の場合には図 3 のように非対称になっている。この 4 次関数の零点としては、 $y \approx -1$ ,  $y \approx 0$ ,  $y \approx 1$ ,  $y \approx 400$  の 4 点があるが、 $y = e^{2\gamma\sigma}$  であるから、 $y \approx -1$  は非物理的な解で、 $y \approx 0$  の零点は小さいが正の量で、 $\sigma_1$  に対応する。2 つのソリトンはおおむね  $\sigma \approx 0$

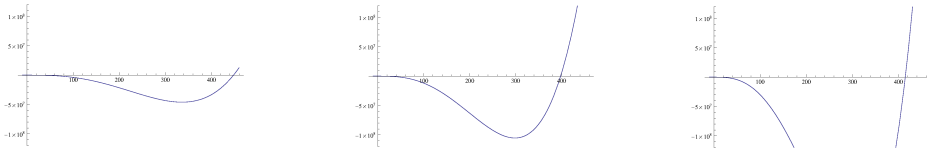
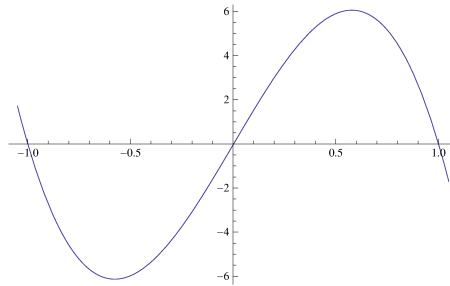
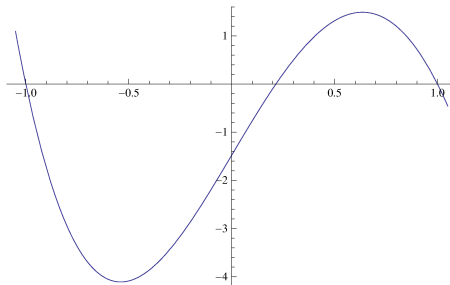


図 1

 $x = 0.5,$  $x = 1.0,$  $x = 1.5$ 図 2  $x = 1$ での原点付近 ( $v = 0.1$ )図 3  $x = 1$ での原点付近 ( $v = 0.7$ )

付近において、 $\tau \approx 0$  で衝突する、すなわち、 $y \approx 1$  で  $x \approx 1$  で衝突すると考えられる。するとこの付近での方程式の右辺の  $y \approx 1$  と  $x \approx 1$  付近での振る舞いがわかれば、衝突時刻の近くでの解を得ることができるはずである。しかし、上記の4次方程式(7)の解の1つはソリトンとソリトンの「谷間」を含むと予想されるので、解が1個だけでは不十分であるので、右辺を Taylor 展開の2次まで  $x = y = 1$  のまわりで展開する。すると、方程式は、

$$\begin{aligned}
 & 2[1 + v^2 + (1 - v^2) \cos \theta_{12}](x - 1) \\
 & - 2[(1 + v^2)(1 - 2v^2) + (1 - v^2)(2 - v^2) \cos \theta_{12} + (1 - v^2)^2 \cos^2 \theta_{12}](y - 1) \\
 & \quad - 3v[1 + v^2 + (1 - v^2) \cos \theta_{12}](x - 1)^2 \\
 & - 4(1 - v)[1 + 2v + (1 + v) \cos \theta_{12}][1 + v^2 + (1 - v^2) \cos \theta_{12}](x - 1)(y - 1) \\
 & \quad - 3[1 + v^2 + (1 - v^2) \cos \theta_{12}][1 - 2v^2 + (1 - v^2) \cos \theta_{12}](y - 1)^2 = 0 \quad (9)
 \end{aligned}$$

となる。やや複雑ではあるが、これは  $y$  に対する 2 次方程式であって、容易に解くことができ、解は

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{f_1 + \sqrt{f_2}}{f_3} \\ y_2 &= \frac{f_1 - \sqrt{f_2}}{f_3} \end{aligned} \quad (10)$$

である。ここで、 $f_1, f_2, f_3$  はそれぞれ

$$f_1 = -2(2+v-4v^2) + (1-v^2)[1+2v+(1+v)\cos\theta_{12}] + 2(1-v)[1+2v+(1+v)\cos\theta_{12}]x \quad (11)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= 4[1+v-2v^3+4v^4+2(1-v)(2-4v^2)\cos\theta_{12} - (1-v^2)\cos^2\theta_{12}] \\ &\quad - 8[2(1-2v^2+4v^4) + 4(1-v^2)(1-2v^2)\cos\theta_{12} + 2(1-v^2)^2\cos^2\theta_{12}]x \\ &\quad + 4[4-v-12v^2+2v^3+16v^4 + (1-v^2)(8-v-16v)\cos\theta_{12} + 4(1-v^2)^2\cos^2\theta_{12}]x^2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$f_3 = -3[1-2v^2+(1-v^2)\cos\theta_{12}] \quad (13)$$

である。これらの解曲線をいくつか図示（縦軸は  $y$ 、横軸は  $x$ ）すると以下ようになる。 図 4、

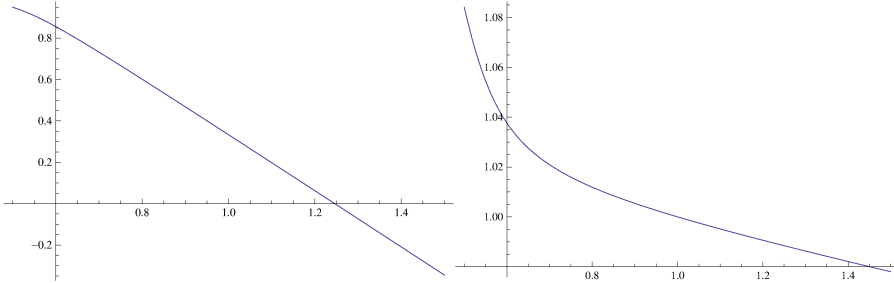


図 4  $y_1$  と  $y_2$  の解曲線 ( $v = 0.1$ )

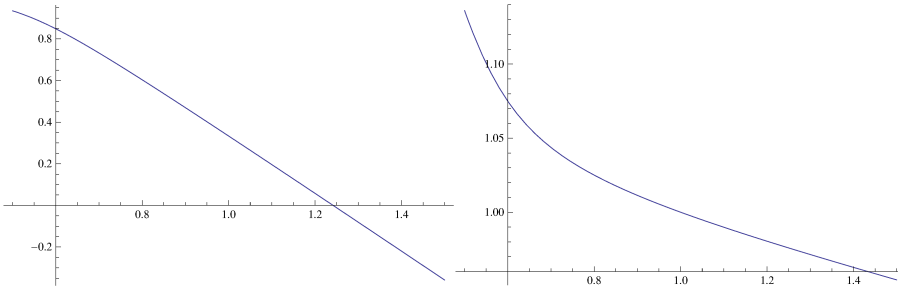


図 5  $y_1$  と  $y_2$  の解曲線 ( $v = 0.2$ )

5, 6, 7 では左図が  $y_1$ 、右図が  $y_2$  である。 $x = 1$  付近での値が 1 より小さいので、 $y_1$  が衝突前に左から右に移動する  $\sigma_1$  に、 $y_2$  が  $y \approx x \approx 1$  なのでソリトン間の「谷間」に対応する。同様の近似で、 $\sigma_2$  に対応する解は  $x = e^{-2\gamma v \tau}$  とすることにより得ることができるが本稿では触れない。

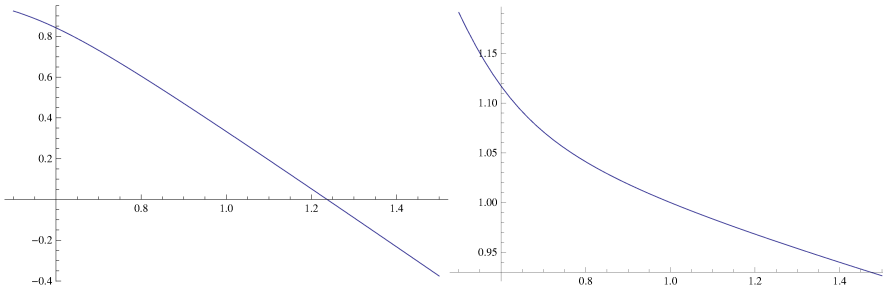


図6  $y_1$  と  $y_2$  の解曲線 ( $v = 0.3$ )

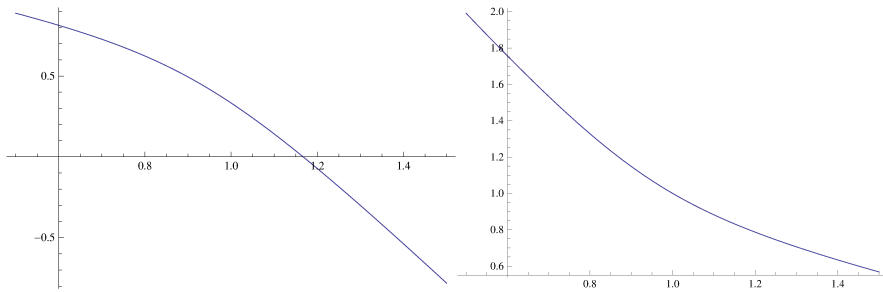


図7  $y_1$  と  $y_2$  の解曲線 ( $v = 0.7$ )

### 3 Discussion

衝突するソリトンの近距離の軌道を求めることを試みた。2次までで近似した解(図7)では近似のない解(図3)と比較してソリトン1の位置は概ね合っているが、小さな $v$ では非常に誤差が大きい。これは $v$ が小さいときにはソリトン同士が弾くことにより、近似が有効な十分近くまで接近しないことによると考えられ、従って、Taylor展開が十分に機能しないためである。また、これらの解は、 $x$ が大きくなると $y$ が負の領域に入ってしまうので、有効な範囲が限られている。しかし、衝突の際のソリトンの位置の形がだいたいでもわかれば、衝突前の解(4)と衝突後の解(5)をどのようにつなげばよいのかの情報は得られよう。近距離でのソリトンの軌道の考察はまだはじめばかりなのでわからないことは多く、更なる研究が必要である。

### 参考文献

- [1] 例えば, M. J. Ablowitz and H. Segur, "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM", SIAM, 1981.
- [2] 例えば, V. G. Makhankov, Y. P. Rybakov, V. I. Sanyuk, "The Skyrme Model: Fundamentals

Methods Applications”, Springer-Verlag, 1993.

- [3] 角島浩, 「質量交換を伴う二粒子系」, 数理解析研究所講究録 1890 「非線形波動現象の数理と応用」, p.228, 京都大学数理解析研究所, 2014 年
- [4] 角島浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」, 数理解析研究所講究録 1701 「波動現象の数理と応用」, p.197, 京都大学数理解析研究所, 2010 年
- [5] 角島浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II」, 数理解析研究所講究録 1761 「非線形波動現象の多様性と普遍性」, p.1118, 京都大学数理解析研究所, 2011 年
- [6] 角島浩, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II」, 数理解析研究所講究録 1800 「非線形波動現象の研究の新たな進展」, p.120, 京都大学, 2012 年
- [7] H. Kakuhata and K.Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [8] H. Kakuhata and K.Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.