数理解析研究所講究録
第2077巻 2018年 22-35

2つのGegenbauer多項式を含むある積分公式*

東京大学 大学院数理科学研究科、カブリ数物連携宇宙研究機構　小林 俊行
Toshiyuki Kobayashi
Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo,
Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe

東京大学 大学院数理科学研究科　レオンチエフ アレックス
Alex Leontiev
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

Abstract

2変数関数 $|s+t|^{\alpha}$ を2つの Gegenbauer 多項式 $C_{\ell}^{\lambda}(s)$ と $C_m^{\mu}(t)$ を用いて展開する公式を与え、さらに、それと関連するトピックを紹介する。得られた公式の一般化や特殊値や極限値と、古典的な積分公式や Warnaar、Varchenko，Tarasov 積分などによる種々の Selberg 型積分の特殊値との関連について説明したい。また、展開公式の複数の証明方法を挙げる。最後に、この展開公式の動機である対称性破れ作用への応用について触れる。

1　主結果

最初に、Gegenbauer 多項式の定義と性質を復習する。Gegenbauer 多項式 $y=C_n^{\lambda}(x)$ は2階の常微分方程式

$$(1-x^2)y''-(2\lambda+1)xy'+n(n+\lambda)y=0 \tag{1.1}$$

を満たす多項式である。さらに、λ が零でない実数で $\lambda>-\frac{1}{2}$ をみたすとき、Gegenbauer 多項式 $\left\{C_n^{\lambda}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ は $L^2\left([-1,1],(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dx\right)$ の直交多項式となる。最初の数項を挙げておく。

$$\begin{aligned}
C_0^{\lambda}(x)&=1,\\
C_1^{\lambda}(x)&=2\lambda x,\\
C_2^{\lambda}(x)&=-\lambda+2\lambda(1+\lambda)x^2,\\
C_3^{\lambda}(x)&=-2\lambda(1+\lambda)x+\frac{4}{3}\lambda(1+\lambda)(2+\lambda)x^3,\\
C_4^{\lambda}(x)&=\frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)-2\lambda(1+\lambda)(2+\lambda)x^2+\frac{2}{3}\lambda(1+\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda)x^4.
\end{aligned}$$

* RIMS 共同研究「表現論とその周辺分野の広がり」(世話人：阿部紀行氏), 京都大学数理解析研究所、2017年6月20日 (火)–6月23日 (金) の講演記録

本稿の主結果を述べる。λ,μ,ν の有理型関数 $b(\lambda,\mu,\nu)$ を

$$b(\lambda,\mu,\nu):=2^{-2\nu}\Gamma(\lambda+\mu+2\nu+1)\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)\Gamma(2\nu+1)$$

と定め、さらに、$\ell,m\in\mathbb{N}$ に対して λ,μ,ν の正則関数 $a_{\ell,m}^{\lambda;\mu,\nu}$ を以下の式で定義する：

$$\frac{(\lambda+\ell)(\mu+m)}{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{\ell-m}{2}+1\right)\Gamma\left(\mu+\nu-\frac{\ell-m}{2}+1\right)\Gamma\left(\lambda+\mu+\nu+\frac{\ell+m}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu+1-\frac{\ell+m}{2}\right)}.$$

定理 1.1. $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{C}$ が

$$\operatorname{Re}\nu>|\lambda|+|\mu|+1,\operatorname{Re}\lambda>0,\operatorname{Re}\mu>0$$

を満たすならば、$|s+t|^{2\nu}$ は $(s,t)\in[-1,1]^2$ で絶対一様収束する以下の級数に展開される。

$$|s+t|^{2\nu}=b(\lambda,\mu,\nu)\sum_{\substack{\ell,m=0\\ \ell+m:\text{even}}}^{\infty}a_{\ell,m}^{\lambda;\mu,\nu}C_\ell^\lambda(s)C_m^\mu(t). \tag{1.2}$$

定理 1.1 は次の積分公式から導かれる。

命題 1.2. $\operatorname{Re}\lambda>0,\operatorname{Re}\mu>0,\operatorname{Re}\nu>0$ の時、次の積分公式が成り立つ。

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|s+t|^{2\nu}(1-s^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{\mu-\frac{1}{2}}C_\ell^\lambda(s)C_m^\mu(t)dsdt$$
$$=\frac{(-\nu)_{\frac{\ell+m}{2}}(-1)^{\frac{\ell+m}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}(2\lambda)_\ell(2\mu)_m\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda+\mu+2\nu+1)}{\ell!m!\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{\ell-m}{2}+1\right)\Gamma\left(\mu+\nu-\frac{\ell-m}{2}+1\right)\Gamma\left(\lambda+\mu+\nu+\frac{\ell+m}{2}+1\right)}. \tag{1.3}$$

ここで $(y)_n$ は Pochhammer 記号を表し、以下のように定義される。

$$(y)_n:=\frac{\Gamma(y+n)}{\Gamma(y)}=y(y+1)\cdots(y+n-1).$$

第 3 節で、命題 1.2 の 4 通りの証明を紹介する。

より一般に、定理 1.1 における $|s+t|^{2\nu}$ にパラメータ x を追加した $|s+xt|^{2\nu}$ の展開式は以下の形で与えられる。

命題 1.3. $\ell,m\in\mathbb{N}$ に対して $A_{\ell,m}^{\lambda;\mu,\nu}(x)$ を

$$\frac{(-1)^{\frac{\ell+m}{2}}(-\nu)_{\frac{\ell+m}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)(\lambda+l)x^m}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+m)\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{\ell-m}{2}+1\right)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{\ell+m}{2}-\nu,\frac{m-\ell}{2}-\nu-\lambda\\ \mu+m+1\end{matrix};x^2\right)$$

とおくと、$-1\leqslant x\leqslant 1$ のとき、

$$|s+tx|^{2\nu}=\sum_{\substack{\ell,m=0\\ \ell+m\ \text{even}}}^{\infty}A_{\ell,m}^{\lambda,\mu,\nu}(x)\,C_\ell^\lambda(s)C_m^\mu(t)$$

が成り立つ。

ガウスの超幾何関数 ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};x\right)$ の $x=1$ における値

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};1\right)=\frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad \mathrm{Re}(c-a-b)>0 $$

を用いると、

$$ A^{\lambda,\mu,\nu}_{\ell,m}(1)=b(\lambda,\mu,\nu)a^{\lambda,\mu,\nu}_{\ell,m} $$

が成り立つ。従って、定理 1.1 は命題 1.3 において $x=1$ を代入した特殊値であるということが分かる。命題 1.3 は次の積分公式から導かれる。これは命題 1.2 の一般化である。

定理 1.4. $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{C}$ は $\mathrm{Re}\,\lambda,\mathrm{Re}\,\mu>-\frac{1}{2},\mathrm{Re}\,\nu>0$ を満たし、x は $-1\leqslant x\leqslant 1$ を満たすとする。このとき、$\ell+m$ が偶数であるような任意の $\ell,m\in\mathbb{N}$ に対し、

$$ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|s+xt|^{2\nu}u^{\lambda}_{\ell}(s)u^{\mu}_{m}(t)dsdt $$

$$ =\frac{2^{-2\nu}\pi^2\Gamma(2\nu+1)x^m{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{\ell+m}{2}-\nu,\frac{m-\ell}{2}-\nu-\lambda \\ \mu+m+1\end{matrix};x^2\right)}{\Gamma\left(\nu+1-\frac{\ell+m}{2}\right)\Gamma(\mu+m+1)\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{\ell-m}{2}+1\right)} \tag{1.4} $$

が成り立つ。ここで

$$ u^{\lambda}_{\ell}(s):=\frac{2^{2\lambda-1}\ell!\Gamma(\lambda)}{\Gamma(2\lambda+\ell)}(1-s^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}C^{\lambda}_{\ell}(s) $$

とおいた。

さて、Gegenbauer 多項式は 2 階の常微分方程式 (1.1) を満たすので、$f(s)=u^{\lambda}_{\ell}(s)$ は以下の 2 階の常微分方程式

$$ (1-s^2)^2f''+(1-s^2)(1-2\lambda-(2\lambda+1)s)f'+\left((2s+1)\left(\lambda^2-\frac{1}{4}\right)+\ell(\ell+2\lambda)(1-s^2)\right)f=0 $$

を満たすことに注意しよう。

2 主結果の様々な特殊化

以下では定理 1.1（あるいは同値なことであるが命題 1.2）の特殊値が、既知の積分公式とどのように関連しているかを説明する。この節で述べるいくつかの例は、第 2 節の最後の図 1 で視覚的にまとめる。

2.1 Selberg 積分の特殊値との比較

k 個数の変数 $\mathbf{t}=(t_1,\cdots,t_k)$ とパラメータ $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ に対して

$$\Psi_k(\alpha,\beta,\gamma;\mathbf{t}):=\prod_{i=1}^{k}t_i^{\alpha-1}(1-t_i)^{\beta-1}\prod_{1\le i<j\le k}|t_i-t_j|^{2\gamma}$$

とおく。

Fact 2.1.（[Sel44, セルバーグ積分]） $\mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}(\beta)>0,|\gamma|\ll 1$ とすると

$$\int_{\mathbf{t}\in[0,1]^k}\Psi_k(\alpha,\beta,\gamma;\mathbf{t})d\mathbf{t}=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\Gamma(\alpha+i\gamma)\Gamma(\beta+i\gamma)\Gamma(1+(i+1)\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+(i+k-1)\gamma)\Gamma(\gamma+1)},$$

命題 1.2 で述べた積分公式に $\ell=m=0,\lambda=\mu$ を代入すると、Fact 2.1 における Selberg 積分の $k=2,\alpha=\beta$ の場合と同じ結果が得られる。

$\boxed{\text{命題 1.2}}$ $\xRightarrow{\ell=m=0,\ \lambda=\mu}$ $\xLeftarrow{k=2,\ \alpha=\beta}$ $\boxed{\text{[Sel44]}}$

$$\boxed{\iint_{[-1,1]^2}|s-t|^{2\nu}(1-s^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}dsdt=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\Gamma(\alpha+i\gamma)\Gamma(\beta+i\gamma)\Gamma(1+(i+1)\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+(i+k-1)\gamma)\Gamma(\gamma+1)}.}$$

2.2 Warnaar による $\mathfrak{sl}_3$ Selberg 積分の特殊値との比較

次に、Selberg 積分の 1 つの一般化である Warnaar の $\mathfrak{sl}_3$ Selberg 積分 [War10] と比較しよう。これは 5 つの複素パラメータ $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma$ を含む積分であるが、制約条件 $\beta_1+\beta_2=\gamma+1$ を課すので、実質上は 4 つの自由パラメータを含む多重積分である。

Fact 2.2.（Warnaar [War10, (1.4)]） $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma\in\mathbb{C}$ が $\beta_1+\beta_2=\gamma+1$ および

$$\mathrm{Re}\,\alpha_j,\mathrm{Re}\,\beta_j>0\ (j=1,2),|\gamma|\ll 1,\beta_1+(i-k_2-1)\gamma\notin\mathbb{Z}\ (1\le{}^{\forall}i\le\min(k_1,k_2))$$

をみたすとき、次の積分公式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbf{t},\mathbf{s})\in C^{k_1,k_2}_{\beta_1,\gamma}} & \Psi_{k_1}(\alpha_1,\beta_1,\gamma;\mathbf{t})\Psi_{k_2}(\alpha_2,\beta_2,\gamma;\mathbf{s})\prod_{i,j=1}^{k_1,k_2}|t_i-s_j|^{-\gamma}\,d\mathbf{t}d\mathbf{s} \\ &= \prod_{i=0}^{k_1-1}\frac{\Gamma(\alpha_1+i\gamma)\Gamma(\beta_1+(i-k_2)\gamma)\Gamma((i+1)\gamma)}{\Gamma(\alpha_1+\beta_1+(i+k_1-k_2-1)\gamma)\Gamma(\gamma)}\times \\ \times\prod_{i=0}^{k_2-1}\frac{\Gamma(\alpha_2+i\gamma)\Gamma(\beta_2+i\gamma)\Gamma((i+1)\gamma)}{\Gamma(\alpha_2+\beta_2+(i+k_2-k_1-1)\gamma)\Gamma(\gamma)} & \prod_{i=0}^{k_1-1}\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+(i-1)\gamma)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+(i+k_2-1)\gamma)}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで特異チェイン $C^{k_1,k_2}_{\beta_1,\gamma}$ は (k_1+k_2) 次元単体のある有限和として定義されている。

命題 1.2 で述べた積分公式に $\ell=m=0,\lambda+\mu+2\nu=-1$ を代入すると、Fact 2.2 における Warnaar 積分の $k_1=k_2=2,\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2$ の場合と同じ結果を与える。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \boxed{\text{命題 1.2}} \arrow[dr, Rightarrow, "{\ell=m=0,\ \lambda+\mu+2\nu=-1}"] & & \boxed{\text{[War10]}} \arrow[dl, Rightarrow, "{k_1=k_2=1,\ \alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2}"'] \\ & \boxed{\left(\iint\limits_{\substack{[0,1]^2\\ t<s}}+\frac{\sin(\pi\alpha_1)}{\sin(\pi\alpha_2)}\iint\limits_{\substack{[0,1]^2\\ t>s}}\right)(t(1-t))^{\mu-\frac{1}{2}}(s(1-s))^{\lambda-\frac{1}{2}}|t-s|^{2\nu}dsdt=\text{ガンマ関数の積}} & \end{tikzcd}$$

2.3 Tarasov と Varchenko による Selberg 積分の一般化と定理 1.1 の比較

次に Tarasov と Varchenko による $\mathfrak{sl}_3$ に付随した Selberg 積分の一般化との比較を行う。これは 4 つの自由パラメータ $\alpha,\beta_1,\beta_2,\gamma$ を含む多重積分の公式である。

Fact 2.3. ([TV03, (3.4)]) $\alpha,\beta_1,\beta_2,\gamma\in\mathbb{C}$ が $\mathrm{Re}\,\alpha>0,\mathrm{Re}\,\beta_i>0\ (i=1,2),|\,\mathrm{Re}\,\gamma|\ll 1$

をみたすとき、次の積分公式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbf{t},\mathbf{s})\in C_\gamma^{k_1,k_2}} \Psi_{k_1}(\alpha,\beta_1,\gamma;\mathbf{t})\Psi_{k_2}(1,\beta_2,\gamma;\mathbf{s}) \prod_{i,j=1}^{k_1,k_2} |t_i-s_j|^{-\gamma}\, d\mathbf{t}d\mathbf{s} \\
&= \prod_{j=0}^{k_2-1} \frac{\Gamma(\beta_2+j\gamma)\Gamma(\beta_1+\beta_2-\gamma+j\gamma)\Gamma(1-k_1\gamma+j\gamma)\Gamma(\gamma+j\gamma)}{\Gamma(\beta_2+1+(2k_2-k_1-2-j)\gamma)\Gamma(\alpha+\beta_1+\beta_2+(k_1+k_2-3-j)\gamma)\Gamma(\gamma)}\times \\
&\qquad \times \prod_{j=0}^{k_1-1} \frac{\Gamma(\alpha+j\gamma)\Gamma(\gamma+j\gamma)}{\Gamma(\gamma)} \prod_{j=0}^{k_1-k_2-1} \frac{\Gamma(\beta_1+j\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta_1+(2k_1-k_2-2-j)\gamma)}. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

ここで特異チェイン $C_\gamma^{k_1,k_2}$ は (k_1+k_2) 次元単体のある有限和として定義されている。

命題 1.2 で述べた積分公式に $\ell=m=0, \mu=\frac{1}{2}$ を代入すると、Fact 2.3 における Tarasov–Varchenko 積分の $k=2, \beta_2=1, \alpha=\beta_1$ の場合と同じ結果を与える。

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{命題 1.2}} & & \boxed{\text{[TV03]}} \\
\overset{\ell=m=0,\ \mu=\frac{1}{2}}{\searrow} & & \overset{k=2,\ \alpha=\beta_1,\beta_2=1}{\swarrow} \\
& \boxed{\displaystyle\iint_{0\le t<s\le 1} s^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-s)^{\lambda-\frac{1}{2}}|s-t|^{2\nu}\, dsdt = \text{ガンマ関数の積}} &
\end{array}$$

2.4 Dotsenko と Fateev による積分公式と定理 1.1 との比較

Dotsenko と Fateev [DF85] は 3 つの関係式 (2.4) を満たす 6 つのパラメータ $\alpha,\alpha',\beta,\beta',\rho,\rho'$ を含む以下の多重積分の具体的表示を与えた。

Fact 2.4. ([DF85, (A.35)])

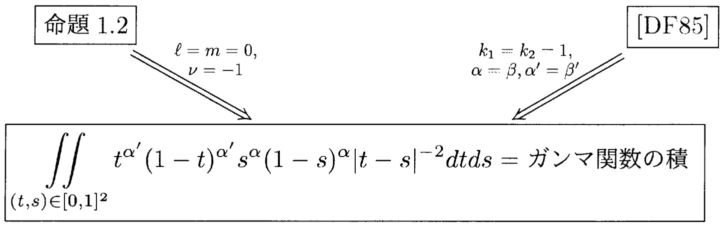
$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbf{t},\mathbf{s})\in[0,1]^{k_1+k_2}} \Psi_{k_1}(\alpha'+1,\beta'+1,\rho';\mathbf{t})\Psi_{k_2}(\alpha+1,\beta+1,\rho;\mathbf{s}) \prod_{i,j=1}^{k_1,k_2} |t_i-s_j|^{-2}\, d\mathbf{t}d\mathbf{s} \\
&\qquad = k_1!k_2!\rho^{2k_1k_2} \prod_{i,j=1}^{k_1,k_2} \frac{1}{j\rho-i} \prod_{i=1}^{k_1} \frac{\Gamma(i\rho')}{\Gamma(\rho')} \prod_{j=1}^{k_2} \frac{\Gamma(j\rho)}{\Gamma(\rho)}\times \\
&\times \prod_{i=0}^{k_1-1} \frac{\Gamma(1+\alpha'+i\rho')\Gamma(1+\beta'+i\rho')}{\Gamma(2-2k_2+\alpha'+\beta'+(k_1-1+i)\rho')} \prod_{j=0}^{k_2-1} \frac{\Gamma(1+\alpha+j\rho)\Gamma(1+\beta+j\rho)}{\Gamma(2-2k_1+\alpha+\beta+(k_2-1+j)\rho)}\times \\
&\qquad \times \prod_{i,j=0}^{k_1,k_2} \frac{1}{(\alpha+j\rho-i)(\beta+j\rho-i)(\alpha+\beta+\rho(k_2-1+j)-(k_1-1+i))}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\alpha' = -\rho'\alpha, \beta' = -\rho'\beta, \rho'\rho = 1, \tag{2.4}$$

$$\operatorname{Re}\rho < 0, \quad \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta > (k_1 - 1) + |\operatorname{Re}\rho|(k_2 - 1).$$

命題 1.2 の $\ell = m = 0, \nu = -1$ の特殊化は [DF85, (A.35)] の $k_1 = k_2 = 1, \alpha' = \beta', \alpha = \beta$ の特別な場合になる：



2.5 特殊化と hierarchy

この節の 4 つの例で見てきたように、命題 1.2 の $\ell = m = 0$ に対する積分公式は Warnaar、Varchenko、Tarasov などによる Selberg 型の積分の一般化の特別な場合と関係する。以上を図 1 にまとめる。青い数字は公式に含まれる連続パラメータの個数である。

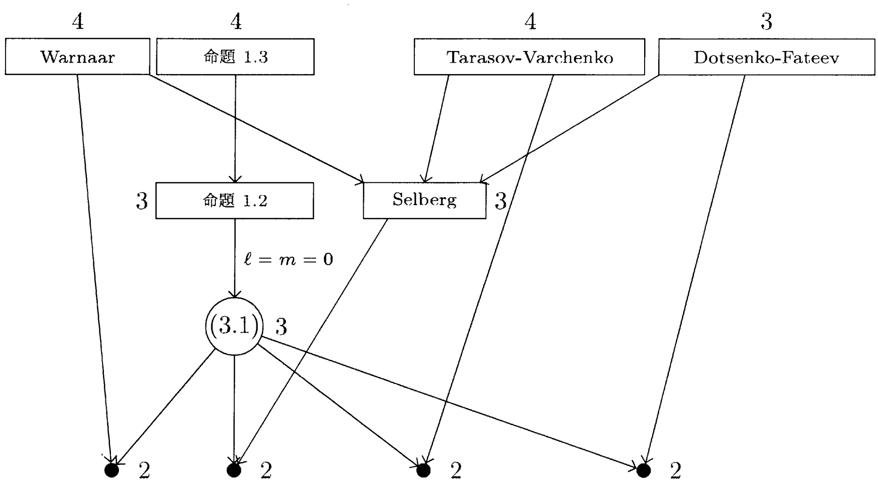


図 1　命題 1.2 の $\ell = m = 0$ の特別の場合とその関連結果。ただし、欄外の青い数字は積分公式に含まれる連続パラメータの個数である.

2.6 定理 1.1 の極限値

最後に、定理 1.1、あるいはこれと本質的に同等である命題 1.2 に関して、パラメータが無限になったときの極限値を考える。

まず、エルミート多項式を復習する。エルミート多項式 $\{H_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は、$L^2\left(\mathbb{R}, e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)$ の直交多項式であり、Gegenbauer 多項式の極限として再現できる:

$$H_n(x) = n! \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\frac{n}{2}} C_n^\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

最初の数項を挙げよう。

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1,\\
H_1(x) &= 2x,\\
H_2(x) &= 4x^2 - 2,\\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x,\\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12.
\end{aligned}$$

命題 1.2 において μ/λ を一定にした上で $\lambda, \mu \to \infty$ という極限をとれば、Gegenbauer 多項式に関する積分公式からエルミート多項式に関する以下の積分公式を得る。

系 2.5. $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$ をみたす複素数 ν と実数 w に対して、$\ell + m$ が偶数のとき、以下の積分公式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x - wy|^{2\nu} e^{-x^2-y^2} H_\ell(x) H_m(y)\,dx\,dy\\
&\qquad = (-\nu)_{\frac{\ell+m}{2}} (-1)^{\frac{\ell-m}{2}} 2^{\ell+m} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)(w^2+1)^{\nu-\frac{\ell+m}{2}} w^m. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

系 2.5 で述べた積分公式の 2 通りの特殊値を考えると、それぞれ Mehta 積分 (Fact 2.6) の特殊値、 Hermite–Rodriguez 関数の畳み込みの公式 (Fact 2.7) が再証明できる。

Fact 2.6. (Mehta 積分, [Meh04])

$$(2\pi)^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{1\le i<j\le k} |t_i - t_j|^{2\gamma} \exp\left(-|\mathbf{t}|^2/2\right) d\mathbf{t} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}.$$

系 2.5 で述べた積分公式において $w = 1, \ell = m = 0$ を代入すると、Mehta 積分 [Meh04] の $k = 2$ の場合になる :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{系 } 2.5} \arrow[dr, Rightarrow, "{\substack{w=1\\ \ell=m=0}}"] & & \boxed{\text{Mehta 積分}} \arrow[dl, Rightarrow, "k=2"'] \\
& \boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x-y|^{2\nu} e^{-x^2-y^2} dx dy = \text{ガンマ関数の積}} &
\end{tikzcd}$$

一方、系 2.5 で述べた積分公式において $s = x - y$ と変数変換し、$w = 1$ を代入すれば、次の公式（正確には、その Mellin 変換）が得られる。

Fact 2.7. ([CMS94, (18)]) Hermite–Rodriguez 関数 [Yus07]

$$w_{\lambda,n}(t) := \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{1}{\sqrt{\pi}\lambda} H_n\left(\frac{t}{\lambda}\right) e^{-\frac{t^2}{\lambda^2}}, \quad \lambda > 0$$

に関して、次の畳込みの公式が成り立つ。

$$w_{\lambda,n} * w_{\lambda,k}(t) = \sqrt{\frac{(n+k)!}{2^{n+k} n! k!}} w_{\sqrt{2}\lambda, n+k}(t). \tag{2.6}$$

3 定理 1.1 の証明について

第 3 節では、定理 1.1（あるいは、実質的に同等である命題 1.2 の積分公式）の 4 通りの証明をあげる。下に述べられている証明法 1 と証明法 3 は最初のステップとして以下の補題を用いる。

補題 3.1. ($\ell = m = 0$ 場合に帰着)

$\ell = m = 0$ 特殊な場合に命題 1.2 が成り立つ

$$\Downarrow$$

命題 1.2 の一般な場合が成り立つ.

証明のスケッチ Gegenbauer 多項式のロドリゲスの公式

$$(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} C_n^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma\left(\alpha+n+\frac{1}{2}\right)} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+\alpha-\frac{1}{2}}$$

と部分積分を用いる。

注意 3.2. 定理 1.1 の一般化である命題 1.3 の証明においても同じアイディアを適用することができ、$\ell = m = 0$ の場合にその証明を帰着することができる（後述の証明法 3 参照)。

証明法 1.（直接）

1. 補題 3.1 より、$\ell = m = 0$ 場合、すなわち、以下の等式を示せばよい：

$$\iint_{[-1,1]^2} |s-t|^{2\nu}(1-s^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{\mu-\frac{1}{2}} = \text{ガンマ関数の積}; \tag{3.1}$$

2. 超幾何関数のオイラー積分表示

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix}; z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-zx)^{-a}dx, \quad \mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0$$

を用い、次の公式に帰着する：

$$\int_{-1}^{1} (1+t)^{\mu-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}-\lambda, \lambda+\frac{1}{2} \\ 2\nu+\lambda+\frac{3}{2} \end{matrix}; \frac{1-t}{2}\right)(1-t)^{2\nu+\lambda+\mu} = \text{ガンマ関数の積};$$

3. 超幾何関数 ${}_2F_1$ の級数展開を用いて、以下の等式に帰着させる。

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}-\lambda, \lambda+\frac{1}{2}, 2\nu+\lambda+\mu+1 \\ 2\nu+\lambda+\frac{3}{2}, 2\nu+\lambda+2\mu+\frac{1}{2} \end{matrix}; 1\right) = \text{ガンマ関数の積};$$

4. Whipple 和（下に記載されている Fact 3.3）によって、超幾何関数 ${}_3F_2(\ ;1)$ をガンマ関数の積で表せる.

Fact 3.3.（Whipple 和）

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 2c+1=d+e \end{cases} \text{ならば、} \quad \Rightarrow {}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix}; 1\right) = \text{ガンマ関数の積}.$$

証明法 2.（cf. セルバーグ積分の証明）　まず、Carlson の定理 [Car14] を復習する：

Fact 3.4.（Carlson の定理）　f が $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$ 右半平面上で連続で、内部 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ で正則であるとする. 更に、f が以下の 3 条件をみたすならば、$f \equiv 0$ となる。

1. ある $C, \tau > 0$ に対して、右半平面上に $|f(z)| \leq Ce^{\tau|z|}$ が成り立つ;
2. ある $C > 0, c < \pi$ が存在し、全ての $y \in \mathbb{R}$ に対して、$|f(iy)| \leq Ce^{c|y|}$ が成り立つ；
3. $f(n) = 0$ が任意の $n \in \mathbb{N}_+$ に対して成り立つ。

Carlson の定理を用いれば、命題 1.2 の積分等式は ν が整数である特別な場合を示せば良いということが分かる。この場合は、$s+t$ のベキ乗が多項式になって、左辺の積分が Beta 積分の有限和になるので、計算可能である。

注意. Atle Selberg の元々のセルバーグ積分の証明 [Sel44] は Fact 3.4 が用いられた。

証明法 3.（命題 1.3 の特殊値） より一般の結果である命題 1.3 を示す。補題 3.1 と同様に $\ell = m = 0$ 場合に帰着できることを最初に証明する。そこで、命題 1.3 の証明は、以下の積分公式

$$2\iint_{[-1,1]^2} (s-tz)_+^{2c-1}(1-s^2)^{a-1}(1-t^2)^{b-1}dsdt$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+c)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -c+\frac{1}{2}, -a-c+1 \\ b+\frac{1}{2} \end{matrix}; z^2\right) \quad (3.2)$$

の証明に帰着される。積分公式 (3.2) は以下の 3 つのステップを用いて示すことができる。

1. オイラー積分表示;
2. 超幾何関数の二次変換:
$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-a, b \\ 2b \end{matrix}; z\right) = \left(1-\frac{z}{2}\right)^{a-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1-a}{2}, \frac{2-a}{2} \\ b+\frac{1}{2} \end{matrix}; \left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right);$$
3. 次の補題：

補題 3.5.
$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i(1-a)_i}{2^i i!(d)_i} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1-d-i}{2}, \frac{2-d-i}{2} \\ b+\frac{1}{2} \end{matrix}; \zeta\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-d)_{2j}\zeta^j}{2^{2j}j!\left(b+\frac{1}{2}\right)_j} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, 1-a \\ d-2j \end{matrix}; \frac{1}{2}\right).$$

証明法 4.（ルジャンドルの陪関数 $P_\beta^\alpha(x)$ に関する積分公式を用いる） 直接、命題 1.2 を示す:

1. まず、[KM11, (7.4.11)] の積分公式
$$\int_{-s}^{1} (s+t)^{2\nu} C_m^\mu(t)(1-t^2)^{\mu-\frac{1}{2}}dt = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2\mu+m)\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\mu)2^{\mu-\frac{1}{2}}m!}(1-s^2)^{\nu+\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}} P_{\mu+m-\frac{1}{2}}^{-2\nu-\mu-\frac{1}{2}}(-s).$$
を用いる (ここで、$P_{\mu+m-\frac{1}{2}}^{-2\nu-\mu-\frac{1}{2}}(-x)$ はルジャンドルの陪関数である);
2. 次の段階は以下の積分に帰着できる
$$\int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\nu+\frac{\mu}{2}+\lambda-\frac{1}{4}} P_{\mu+m-\frac{1}{2}}^{-2\nu-\mu-\frac{1}{2}}(-s) C_\ell^{\lambda-\frac{1}{2}}(s)ds; \quad (3.3)$$

3. 部分積分と公式

$$\left(C_\ell^\lambda(s)\right)' = C_{\ell-1}^{\lambda+1}(s), \quad \left((1-s^2)^{-\frac{a}{2}} P_b^a(s)\right)' = -(1-s^2)^{-\frac{a+1}{2}} P_b^{a+1}(s)$$

を用いて、(3.3) を以下の公式までに簡易化する:

$$\int_{-1}^{1} (1-s^2)^a P_c^b(s) ds; \tag{3.4}$$

4. (3.4) は既知の積分公式 (cf. [KM11, (7.3.4)]) によって Γ 関数の積として表される。

4 表現論における対称性破れ作用素への応用

前述の積分公式の動機を手短に触れよう。詳しくは [Kob15, KS15] を参照されたい。

設定 4.1. G を群、G' をその部分群とし、π、τ をそれぞれ群 G および G' の（連続な）表現とする。

設定 4.1 の下で G' は G の部分群なので、G の表現 π は G' の表現とみなせる。

定義 4.2. 連続な線型写像 $A : \pi \to \tau$ が G' 絡作用素であるとき A を**対称性破れ作用素** (symmetry breaking operator) と呼ぶ。

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, bend right] & \supset & G' \arrow[d, bend left] \\ \pi \arrow[rr, "A"] & & \tau \end{tikzcd}$$

注意 4.3. 以下では π、τ はそれぞれ群 G、G' の既約表現、あるいは少し一般に、長さが有限の表現とする。なお、ここでは G および G' は（非コンパクトな）簡約リー群、π および τ は無限次元の表現であることを想定している。また、表現とその表現空間は同じ記号で表すことにする。

π から τ への対称性破れ作用素に関して以下の問題を考えよう。

目標. （[Kob15]）対称性破れ作用素 $A : \pi|_{G'} \to \tau$ を全て構成し、分類し、さらに関数等式や像を決定する。

この問題は $(G, G') = (O(n+1,1), O(n,1))$ で π、τ がそれぞれ群 G、G' の球主系列表現のとき、Kobayashi–Speh [KS15] によって完全に解決された。その時に用いられた手法を分析する。

1. π と τ は異なる空間に定義された表現であるが、例えば (K, K')-重複度が 1 の場合に（一般化した意味での）固有値を定義することができる。すなわち、それぞれの表現

を極大コンパクト群に制限したときに無重複であり、K から K' への制限も無重複であるという仮定のもとでは、Schur の補題を用いることで、対称性破れ作用素の対角化を行うことができる。

図 2 は、上の段では、それぞれの K-type が K' の表現として無重複に分解されている様子を表している。図では異なる色は互いに同型でない K'-タイプを表す。対称性破れ作用素は G' 準同型なので、特に K' 準同型であり、従って、上段と下段の同じ色の間に写像が誘導される；

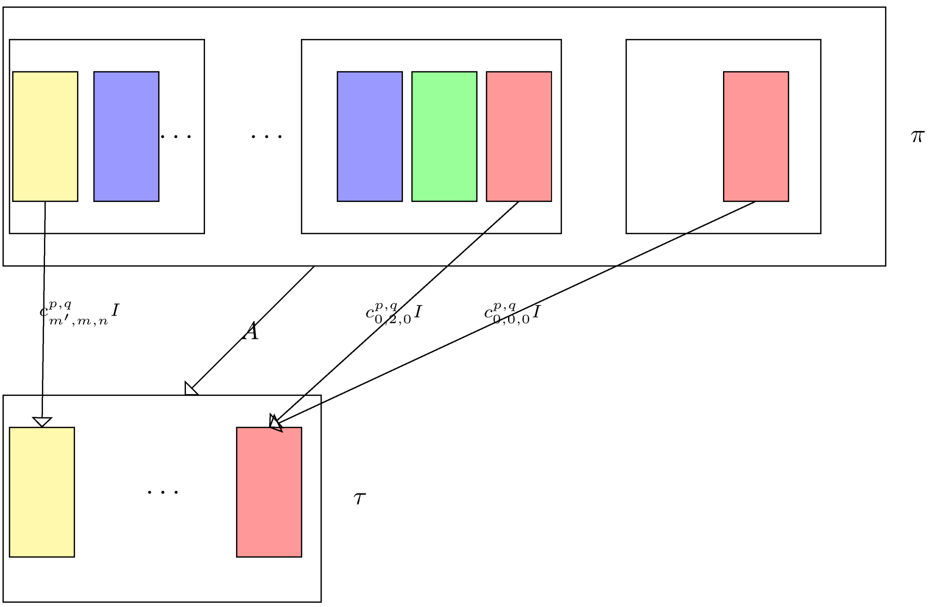


図 2　対称性破れ作用素と (K, K') タイプ

2. (K, K') 固有値がゼロになるかどうかを判定したい;
3. 対称性破れ作用素 $A : \pi|_{G'} \xrightarrow{G'} \tau$ の積分核が別の手法で決定されたとする;
4. 積分核を用いて、(K, K') 固有値を積分の形で表示できる。

群 $(G, G') = (O(p+1, q), O(p, q))$ に対する対称性破れ作用素の (K, K') 固有値の記述に命題 1.2 （および定理 1.4 ）の積分が現れる。命題 1.2 によって、この積分値がガンマ関数の積公式として与えられるので (K, K') 固有値がいつゼロになるかが完全に決定できる。

参考文献

[Car14] F. Carlson. Sur une classe de séries de Taylor. 1914. Dissertation.

[CMS94] L. R. L. Conte, R. Merletti, and G. V. Sandri. Hermite expansions of compact support waveforms: applications to myoelectric signals. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, **41**(12), pp. 1147–1159 , Dec 1994.

[DF85] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev. Four-point correlation functions and the operator algebra in 2D conformal invariant theories with central charge $c \leq 1$. *Nuclear Phys. B*, **251**, pp. 691–734, 1985.

[Kob15] T. Kobayashi. A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups. In Special issue in honor of Vogan's 60th years birthday, Progr. Math. vol. **312**, pp. 277–322 . Birkhäuser, 2015.

[KM11] T. Kobayashi and G. Mano. *The Schrödinger Model for the Minimal Representation of the Indefinite Orthogonal Group $O(p,q)$*. Memoirs of Amer. Math. Soc., vol. **213**, no. 1000 , 2011. ISBNs: 978-0-8218-4757-2 (print); 978-1-4704-0617-2 (online).

[KS15] T. Kobayashi and B. Speh. *Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups*, Memoirs of the Amer. Math. Soc, vol. **238** , 2015. ISBNs: 978-1-4704-1922-6 (print); 978-1-4704-2615-6 (online).

[Meh04] M. L. Mehta. *Random Matrices*, Pure Appl. Math. vol. **142** (Amsterdam). Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004. ISBN: 978-0-12-088409-4.

[Sel44] A. Selberg. Remarks on a multiple integral. *Norsk Mat. Tidsskr.*, **26**, pp. 71–78, 1944.

[TV03] V. Tarasov and A. Varchenko. Selberg-type integrals associated with $\mathfrak{sl}_3$. *Lett. Math. Phys.*, **65**(3), pp. 173–185 , 2003.

[War10] S. O. Warnaar. The $\mathfrak{sl}_3$ Selberg integral. *Adv. Math.*, **224**(2), pp. 499–524 , 2010.

[Yus07] M. A. Yusoff. Application of Hermite–Rodriguez functions to pulse shaping analog filter design. *World Acad. Sci., Eng. Technol.*, **36**, pp. 180–183 , 2007.