数理解析研究所講究録
第2077巻 2018年 98-105

A conjecture of Gross–Prasad and Rallis for metaplectic groups

東京大学 数理科学研究科　跡部 発
Hiraku Atobe
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

Abstract

p-進簡約代数群の既約スムーズ表現が generic であるとは，それが Whittaker 模型を持つ時に言う．Whittaker 模型の一意性のおかげで，generic 表現は表現論及び数論の両分野で多くの応用を持つ．一方で，局所 Langlands 予想 (LLC) とは既約スムーズ表現の L-パラメーターによる分類法である．Gross–Prasad は Rallis に触発されて，generic 表現に対応する L-パラメーターの判定法を予想した．これを Gross–Prasad と Rallis の予想 (GPR) という．近年，古典群に関して (GPR) は Gan–市野により証明された．この寄稿では，シンプレクティック群の二重被覆であるメタプレクティック群に関する (GPR) についての結果を報告する．

1 (GPR) for $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$

Gross–Prasad と Rallis の予想 (GPR) ([6, Conjecture 2.6]) とは，局所体上の連結簡約代数群の既約 generic 表現の分類に関する予想であり，それが実 Lie 群の場合にはすでに知られている (後述)．この節では，実シンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ を例にとり，(GPR) を説明する．

この節では $F = \mathbb{R}$ とし，$\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ を非自明な unitary 加法指標とする．ここでは，$\psi(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ を採用する．$G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ により，$\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ の部分群で

$$
{}^t g \left(\begin{array}{ccc|ccc} &&&&& -1 \\ &&&& \iddots & \\ &&& -1 && \\ \hline && 1 &&& \\ & \iddots &&&& \\ 1 &&&&& \end{array}\right) g = \left(\begin{array}{ccc|ccc} &&&&& -1 \\ &&&& \iddots & \\ &&& -1 && \\ \hline && 1 &&& \\ & \iddots &&&& \\ 1 &&&&& \end{array}\right)
$$

を満たすもののなすシンプレクティック群を表す．この時，上三角行列のなす G の部分群 B は Borel 部分群であり，そのうち，対角成分が全て 1 である行列のなす部分群 U が B の冪単根基となる．加法指標 ψ は U の generic な指標

$$
U \ni u \mapsto \psi(\sum_{i=1}^{n} u_{i,i+1})
$$

を定める．これも ψ と書く．

G の既約許容表現の同型類の集合を $\mathrm{Irr}(G)$ で表す．次の重複度一定理が成り立つ．

定理 1.1 (**重複度一定理** [10]) 任意の $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して，

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_U(\pi_\infty, \psi) \leq 1.$$

但し，π_∞ により π の smooth vectors のなす部分空間を表した．

既約許容表現 π が $\mathrm{Hom}_U(\pi_\infty, \psi) \neq 0$ を満たすとき，π は ψ-generic であるという．Frobenius の相互律により，generic 表現は G 上のある関数 (Whittaker 関数) の空間に実現できる．重複度一定理はこの実現が一意的であることを意味している．(GPR) は，generic 表現を局所 Langlands 対応 (LLC) により分類する予想である．

局所 Langlands 対応 (LLC) とは，$\mathrm{Irr}(G)$ の，局所 Langlands 群 $L_{\mathbb{R}}$ の表現を用いた分類法である．

定義 1.2 実数体 $\mathbb{R}$ の局所 Langlands 群 (または Weil 群)$L_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{R}}$ とは，位相空間として

$$L_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^\times \cup \mathbb{C}^\times j$$

であり，その群構造が

$$j^2 = -1 \in \mathbb{C}^\times, \quad jzj^{-1} = \overline{z} \quad (z \in \mathbb{C}^\times)$$

で与えられる位相群である．

定理 1.3 ($\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ **に対する** (LLC)[9]) 自然な全射で有限対一の写像

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})) \to \Phi(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})) := \{\phi\colon L_{\mathbb{R}} \to \mathrm{SO}(2n+1, \mathbb{C})\}/\sim$$

がある．この全射は ψ には依存しない．但し，$\Phi(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}))$ は連続な準同型 $\phi\colon L_{\mathbb{R}} \to \mathrm{SO}(2n+1, \mathbb{C})$ で，$L_{\mathbb{R}}$ の表現と考えたときに半単純であるものの $\mathrm{SO}(2n+1, \mathbb{C})$-共役類の集合である．パラメーター $\phi \in \Phi(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}))$ の逆像を Π_ϕ で書き，ϕ の L-パケットという．

ここでは $L_{\mathbb{R}}$ の半単純な表現しか考えないので，特に既約表現が重要である．それらを分類する．まず，位相群の同型

$$L_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ab}} \to \mathbb{R}^\times, \quad \mathbb{C}^\times \ni z \mapsto z\overline{z}, \ j \mapsto -1$$

があることに注意する．これは局所類体論の主定理と呼ばれている．これにより，$L_{\mathbb{R}}$ の指標は $\mathbb{R}^\times$ の指標と同一視できる．特に，$L_{\mathbb{R}}$ はノルム写像

$$|\cdot|\colon L_{\mathbb{R}} \twoheadrightarrow L_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{R}^\times \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}_{>0}$$

を持つ．局所 Langlands 群 $L_{\mathbb{R}}$ の既約表現は以下の 2 種類に分かれる．

- 一次元の場合: $\phi = \mathrm{sgn}^{\epsilon}|\cdot|^{\nu}$ ($\epsilon \in \{0,1\}$, $\nu \in \mathbb{C}$) の形である．但し，$\mathrm{sgn}\colon L_{\mathbb{R}} \to \{\pm 1\}$ は，$\mathrm{sgn}(z) = 1$，$z \in \mathbb{C}^{\times}$ と $\mathrm{sgn}(j) = -1$ により定義される指標である．
- 二次元の場合: $\phi = |\cdot|^{\nu}\rho_k$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\nu \in \mathbb{C}$) の形である．但し，$\rho_k\colon L_{\mathbb{R}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は次で定義される 2-次元既約表現である．

$$\mathbb{C}^{\times} \ni z \mapsto \begin{pmatrix} \overline{z}^{-k}(z\overline{z})^{k/2} & 0 \\ 0 & z^{-k}(z\overline{z})^{k/2} \end{pmatrix}, \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定義 1.4　局所 Langlands 群 $L_{\mathbb{R}}$ の半単純表現 ϕ の局所 L-関数 $L(s,\phi)$ を次で定める．

(1) $L(s, \mathrm{sgn}^{\epsilon}|\cdot|^{\nu}) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\epsilon+\nu)$，($\epsilon \in \{0,1\}$，$\nu \in \mathbb{C}$)．但し，$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ と置いた．

(2) $L(s, |\cdot|^{\nu}\rho_k) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s+k/2+\nu)$，($k \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\nu \in \mathbb{C}$)．但し，$\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ と置いた．

(3) $L(s, \phi_1 \oplus \phi_2) = L(s,\phi_1)L(s,\phi_2)$.

注意 1.5　二次元表現 ρ_k の定義において，$k=0$ を代入すると，$\rho_0 \cong \mathbf{1} \oplus \mathrm{sgn}$ となる．その L-関数は，ガンマ関数の duplication formula により，

$$L(s,\rho_0) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s)$$

となる．つまり，定義 1.4 (2) は $k=0$ でも成り立つ．

Gross–Prasad と Rallis の予想 (GPR) ([6, Conjecture 2.6]) は，次のように述べられる．

予想 1.6 ($\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ **に対する** (GPR))　L-パケット Π_{ϕ} が ψ-generic 表現を含むための必要十分条件は，随伴 L-関数 $L(s,\phi,\mathrm{Ad}) = L(s, \mathrm{Ad}\circ\phi)$ が $s=1$ で正則であることである．但し，$\mathrm{Ad}\colon \mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}))$ は随伴表現である．

(GPR) は実簡約代数群で，代数群として連結なものに対してはすでに知られている．([14]，[8]，[11] などを参照せよ．) また，p-進古典群については Gan–市野 [5] が示した．

最後に具体例を与える．

例 1.7　$n=1$，即ち，$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ とする．準同型 $\phi\colon L_{\mathbb{R}} \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ を考える．この時，$L(s,\phi,\mathrm{Ad}) = L(s,\phi)$ であることに注意せよ．

- $\phi = \rho_{2k} \oplus \mathrm{sgn}$ の場合 ($k \in \mathbb{Z}$，$k \geq 0$): この時，

$$L(s,\phi,\mathrm{Ad}) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s+k)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)$$

は $s=1$ で正則である．また，ϕ の L-パケットは，

$$\Pi_{\phi} = \{D_{k+1}^{+}, D_{k+1}^{-}\}$$

で与えられる．但し，D_{k+1}^+ (resp. D_{k+1}^-) は，Blattner パラメーターが $k+1$ (resp. $-(k+1)$) の離散系列表現 (の極限) である．今，$\psi(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ なので，D_{k+1}^+ が ψ-generic である．

- $\phi = \mathrm{sgn}^\epsilon|\cdot|^\nu \oplus \mathbf{1} \oplus \mathrm{sgn}^\epsilon|\cdot|^{-\nu}$ の場合 ($\epsilon \in \{0,1\}$，$\nu \in \mathbb{C}$，$(\epsilon,\nu) \neq (1,0)$): この時，

$$L(s,\phi,\mathrm{Ad}) = \Gamma_\mathbb{R}(s+\epsilon+\nu)\Gamma_\mathbb{R}(s)\Gamma_\mathbb{R}(s+\epsilon-\nu)$$

である．これが $s=1$ で正則であるための必要十分条件は，

$$\epsilon = 0,\ \nu = 1,3,5,\dots \quad \text{or} \quad \epsilon = 1,\ \nu = 2,4,6,\dots$$

である．この条件は，正規化された誘導表現

$$\mathrm{Ind}_P^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(\mathrm{sgn}^\epsilon|\cdot|^\nu) = \left\{ f\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{C} \mid f(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} g) = \mathrm{sgn}^\epsilon(a)|a|^{\nu+1} f(g) \right\}$$

が可約であることと同値である．この時，$\Pi_\phi = \{F_\nu\}$ で与えられる．但し，F_ν は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の唯一の ν-次元既約表現であり，それは完全列

$$0 \longrightarrow D_{\nu+1}^+ \oplus D_{\nu+1}^- \longrightarrow \mathrm{Ind}_P^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(\mathrm{sgn}^\epsilon|\cdot|^\nu) \longrightarrow F_\nu \longrightarrow 0$$

をなす．有限次元既約表現は，generic ではない．

2 (GPR) for $\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{Q}_p)$

この節では $F = \mathbb{Q}_p$ とし，$\psi\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}^\times$ を非自明な unitary 加法指標とする．前節のように，$G = \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p) \supset B \supset U$ をとり，同じ ψ で U 上の generic な指標を表す．この節では，メタプレクティック群 $\widetilde{G} = \mathrm{Mp}(2n,\mathbb{Q}_p)$ を考える．これは G の唯一の非自明な位相的二重被覆である:

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \mathrm{Mp}(2n,\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Q}_p) \longrightarrow 1.$$

$\widetilde{G}$ の既約許容表現 π で，genuine，つまり，$\pi(-1) = -\mathrm{id}$ となるものの同型類の集合を $\mathrm{Irr}(\widetilde{G})$ で表す．冪単根基 U は唯一の分裂 $U \hookrightarrow \widetilde{G}$ を持ち，ゆえに $\widetilde{G}$ の表現 π を U に制限することが考えられる．

定理 2.1 (重複度一定理 [12]) 任意の $\pi \in \mathrm{Irr}(\widetilde{G})$ に対して，

$$\dim_\mathbb{C} \mathrm{Hom}_U(\pi,\psi) \leq 1.$$

既約 genuine 表現 π が $\mathrm{Hom}_U(\pi,\psi) \neq 0$ を満たす時，π は ψ-generic であるという．このような表現を (LLC) により分類することが本研究の目的である．

p-進体 $\mathbb{Q}_p$ の局所 Langlands 群 (または Weil–Deligne 群) を $L_{\mathbb{Q}_p} = WD_{\mathbb{Q}_p}$ と書く．これは局所コンパクトな位相群であり，位相群の同型

$$L_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Q}_p^\times$$

がある (局所類体論の主定理)．特に，$L_{\mathbb{Q}_p}$ はノルム写像

$$|\cdot|\colon L_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow L_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{|\cdot|_p} \mathbb{R}_{>0}$$

を持つ．但し，$|\cdot|_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の p-進絶対値である．

メタプレクティック群 $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{Q}_p)$ に対する (LLC) は Gan–Savin [7] により証明された．これは Adams–Barbacsh の結果 [1] の p-進類似である．

定理 2.2 ($\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{Q}_p)$ **に対する** (LLC) [7]) 加法指標 ψ に依存する全射で有限対一の写像

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{Q}_p)) \to \Phi(\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{Q}_p)) := \{\phi\colon L_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})\}/\sim$$

がある．但し，$\Phi(\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{Q}_p))$ は準同型 $\phi\colon L_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ で，幾つかの性質を満たすものの $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$-共役類の集合である．パラメーター $\phi \in \Phi(\mathrm{Mp}(2n,\mathbb{Q}_p))$ の逆像を Π_ϕ^ψ で書き，ϕ の L-パケットという．

局所 Langlands 群 $L_{\mathbb{Q}_p}$ の表現 ϕ には，局所 L-関数 $L(s,\phi)$ が付随する．

例 2.3 $L(s, |\cdot|^\nu) = \zeta_{\mathbb{Q}_p}(s+\nu)$ $(\nu \in \mathbb{C})$．但し，

$$\zeta_{\mathbb{Q}_p}(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$$

と置いた．これを $\mathbb{Q}_p$ の局所ゼータ関数という．

古典群の場合の (GPR) を考えれば，Π_ϕ^ψ が ψ-generic 表現を持つことと，随伴 L-関数 $L(s,\phi,\mathrm{Ad})$ の $s=1$ での正則性が関係していると推測できるかもしれない．但し，$\mathrm{Ad}\colon \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}))$ は随伴表現である．しかしながら，以下の例で見るように，古典群の場合の (GPR) と完全に同じ主張は成り立たない．

例 2.4 $n=1$，即ち，$\widetilde{G} = \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{Q}_p)$ とする．今，

$$\phi = |\cdot|^{\frac{1}{2}} \oplus |\cdot|^{-\frac{1}{2}}\colon L_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\ w \mapsto \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & 0 \\ 0 & |w|^{-1/2} \end{pmatrix}$$

を考える．この時，

$$L(s,\phi,\mathrm{Ad}) = \zeta_{\mathbb{Q}_p}(s+1)\zeta_{\mathbb{Q}_p}(s)\zeta_{\mathbb{Q}_p}(s-1)$$

は $s=1$ で極を持つ．一方で，(LLC) の性質から $\Pi_\phi^\psi = \{\omega_\psi^e\}$ が分かる．但し，ω_ψ^e は even Weil 表現である．この表現の twisted Jacquet 加群を計算することにより，ω_ψ^e は ψ-generic であることが分かる．

この例から分かるように，メタプレクティック群に対する (GPR) は，主張を修正する必要がある．次が主定理である．

定理 2.5 ($\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{Q}_p)$ **に対する** (GPR) [3, Theorem 3.11]) L-パケット Π_ϕ^ψ が ψ-generic 表現を含むための必要十分条件は，L-関数の商

$$\frac{L(s, \phi, \mathrm{Ad})}{L(s-\frac{1}{2}, \phi)}$$

が $s=1$ で正則であることである．

例 2.6 例 2.4 と同じ ϕ を考えると，

$$L(s, \phi, \mathrm{Ad}) = \zeta_{\mathbb{Q}_p}(s+1)\zeta_{\mathbb{Q}_p}(s)\zeta_{\mathbb{Q}_p}(s-1),$$
$$L(s-\frac{1}{2}, \phi) = \zeta_{\mathbb{Q}_p}(s)\zeta_{\mathbb{Q}_p}(s-1)$$

となる．従って，

$$\frac{L(s, \phi, \mathrm{Ad})}{L(s-\frac{1}{2}, \phi)} = \zeta_{\mathbb{Q}_p}(s+1)$$

であり，これは $s=1$ で正則である．

注意 2.7 この節での結果は全て，体 $\mathbb{Q}_p$ をその有限次元拡大体に置き換えても成り立つ．また，定理 2.5 は実数体 $\mathbb{R}$ の場合でも成り立つと期待している．

3 定理 2.5 の証明の概略

最後に，定理 2.5 の証明の概略を説明する．詳しくは [3, Appendix A] を参照せよ．

パラメーター ϕ が "緩増加" の場合，(GPR) は Shahidi の予想とも呼ばれ，メタプレクティック群については，それは Arthur [2] などの結果と Gan–Savin [7] から従う．

一般に，既約表現 π は standard module $\mathrm{Ind}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}(\pi_0 \otimes e^\nu \otimes \mathbf{1}_N)$ の唯一の既約商と書ける．但し，

- $P = MN$ は G の放物型部分群であり，$\widetilde{P} = \widetilde{M}N$ は $\widetilde{G}$ での逆像である；
- π_0 は $\widetilde{M}$ の既約 genuine 緩増加表現である；
- $\nu \in \mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ は "strictly N-positive" である．

また，w を G の M に関する相対 Weyl 群の最長元とすると，絡作用素

$$\mathcal{A}_w \colon \mathrm{Ind}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}(\pi_0 \otimes e^\nu \otimes \mathbf{1}_N) \to \mathrm{Ind}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}(w\pi_0 \otimes e^{w\nu} \otimes \mathbf{1}_N)$$

が定まり，その像 $\mathrm{Im}(\mathcal{A}_w)$ は π と同型になる．

今，Rodier の結果 (被覆群については [4]) により，

$$\pi \text{ が } \psi\text{-generic} \Longrightarrow \pi_0 \text{ が } \psi\text{-generic}$$

であることが分かっている．ゆえに，π_0 が ψ-generic であるという仮定のもと，π が ψ-generic であるかどうかについて議論すれば良い．この時，π_0 の (nonzero) ψ-Whittaker functional $l_0 \in \mathrm{Hom}_{U\cap M}(\pi_0, \psi)$ から，Jacquet 積分により，誘導表現の (nonzero) ψ-Whittaker functionals

$$\lambda(\nu, \pi_0, \psi) \in \mathrm{Hom}_U(\mathrm{Ind}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}(\pi_0 \otimes e^{\nu} \otimes \mathbf{1}_N), \psi),$$
$$\lambda(w\nu, w\pi_0, \psi) \in \mathrm{Hom}_U(\mathrm{Ind}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{G}}(w\pi_0 \otimes e^{w\nu} \otimes \mathbf{1}_N), \psi)$$

が得られる．定理 2.1 から，定数 $C_\psi(\nu, \pi_0, w)^{-1} \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\lambda(w\nu, w\pi_0, \psi) \circ \mathcal{A}_w = C_\psi(\nu, \pi_0, w)^{-1} \cdot \lambda(\nu, \pi_0, \psi)$$

となることが分かる．この逆数 $C_\psi(\nu, \pi_0, w)$ は local coefficient と呼ばれる．ここで $\mathrm{Im}(\mathcal{A}_w) \cong \pi$ であることから，

$$\begin{aligned} \pi \text{ が } \psi\text{-generic} &\Longleftrightarrow \lambda(w\nu, w\pi_0, \psi) \circ \mathrm{Im}(\mathcal{A}_w) \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow C_\psi(\nu, \pi_0, w)^{-1} \neq 0 \end{aligned}$$

が分かる．

今，$\pi \in \Pi_\phi^\psi$ であるとすると，local coefficient $C_\psi(\nu, \pi_0, w)$ は ϕ から定まるある "γ-因子" により記述することができる [13]．これを Langlands–Shahidi method という．ゆえに，π が ψ-generic であるための必要十分条件を，この "γ-因子" の解析的性質で記述することができる．ここで "γ-因子" とは，L-関数を修正したものである．この "γ-因子" の解析的性質が，L-関数の商

$$\frac{L(s, \phi, \mathrm{Ad})}{L(s - \frac{1}{2}, \phi)}$$

の $s = 1$ で正則性と同値であることが示せる． □

注意 3.1 Gan–市野 [5] は p-進古典群の場合に同様の証明を与えた．結果に相違がでる理由は，local coefficient $C_\psi(\nu, \pi_0, w)$ の "γ-因子" による記述が異なるためである．

参考文献

[1] J. Adams and D. Barbasch, *Genuine representations of the metaplectic group*, *Compositio Math.* **113** (1998), no. 1, 23–66.

[2] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: Orthogonal and symplectic groups*, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, **61** (2013).

[3] H. Atobe, *The local theta correspondence and the local Gan–Gross–Prasad conjecture for the symplectic-metaplectic case*, *Math. Ann.* (2017). DOI 10.1007/s00208-017-1620-5.

[4] W. D. Banks, *Heredity of Whittaker models on the metaplectic group*, *Pacific J. Math.* **185** (1998), no. 1, 89–96.

[5] W. T. Gan and A. Ichino, *The Gross–Prasad conjecture and local theta correspondence*, *Invent. Math.* **206** (2016), no. 3, 705–799.

[6] B. H. Gross and D. Prasad, *On the decomposition of a representation of* SO_n *when restricted to* SO_{n-1}, *Canad. J. Math.* **44** (1992), no. 5, 974–1002.

[7] W. T. Gan and G. Savin, *Representations of metaplectic groups* I*: epsilon dichotomy and local Langlands correspondence*, *Compos. Math.* **148** (2012), 1655–1694.

[8] B. Kostant, *On Whittaker vectors and representation theory*, *Invent. Math.* **48** (1978), no. 2, 101–184.

[9] R. P. Langlands, *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, 101–170, Math. Surveys Monogr., **31**, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 1989.

[10] J. A. Shalika, *The multiplicity one theorem for* GL_n, *Ann. of Math. (2)* **100** (1974), 171–193.

[11] D. Shelstad, *Tempered endoscopy for real groups.* III*: inversion of transfer and L-packet structure*, *Represent. Theory.* **12** (2008), 369–402.

[12] D. Szpruch, *Uniqueness of Whittaker model for the metaplectic group*, *Pacific J. Math.* **232** (2007), no. 2, 453–469.

[13] D. Szpruch, *Some irreducibility theorems of parabolic induction on the metaplectic group via the Langlands–Shahidi method*, *Israel J. Math.* **195** (2013), no. 2, 897–971.

[14] D. Vogan, *Gel'fand–Kirillov dimension for Harish-Chandra modules*, *Invent. Math.* **48** (1978), no. 1, 75–98.