数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 8-14

トレンド再生過程に基づくソフトウェア信頼性モデル

海上保安大学校海上安全学講座　齋藤 靖洋 (Yasuhiro Saito)
Department of Maritime Safety Technology, Japan Coast Guard Academy
広島大学大学院工学研究科　土肥 正 (Tadashi Dohi)
Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1 はじめに

ソフトウェア工学及び信頼性工学の分野において，ソフトウェアの信頼性評価は主要な問題の一つとして取り扱われてきた．ソフトウェア開発のテスト工程においてソフトウェア信頼性を定量的かつ正確に評価するために，過去40年の長きに亘って数多くのソフトウェア信頼性モデルが提案されている．中でも多くの文献において，解析の容易さや優れたデータ適合性を持つ非同次ポアソン過程に基づくソフトウェア信頼性モデル (NHPP モデル) が考察されてきた [2]．従来提案されてきた NHPP モデルのほとんどは，平均値関数の関数形を予め仮定するパラメトリックモデルに分類されるが，その欠点として，数多くあるモデル候補から最良なモデルを選択する際に多大な労力を必要とする点が挙げられる．この欠点を克服するため，少ないながらも複数の著者によって平均値関数を特定することのないノンパラメトリックモデルの考察が行われてきた背景がある．これら NHPP モデルは非同次性を有しているとは言え，ポアソン過程は平均値関数が分散と一致する性質を持つため，非常に大きな統計的ばらつきを持つことが仮定されている．全ての NHPP モデルは上記の性質から逃れることは出来ず，数多く提案されてきたモデルの差は単に平均値関数の違いのみに依存している．更に，一般的な NHPP モデルでは平均値関数をソフトウェア製品内の初期残存フォールト数と任意の確率分布関数の積で表現するが，これは暗に検出されたフォールトのデバック作業によって新たなソフトウェアフォールトが作られる可能性がないことを仮定している．

近年，Saito and Dohi [7] は，NHPP モデルの拡張である非同次ガンマ過程に基づくソフトウェア信頼性モデル (NHGP モデル) を考察した．NHGP モデルは，NHPP の平均値関数に相当する累積トレンド関数によって変調されたガンマ再生過程として特徴付けられる．NHPP が平均値 (トレンド) 関数によって変調された単位パラメータの同次ポアソン過程 (単位パラメータを持つ指数分布再生過程) であるのに対し，NHGP モデルは指数再生時間間隔分布をガンマ分布として一般化した NHPP の拡張モデルと考えられる．Saito and Dohi [7] は様々なソフトウェアフォールト検出パターンを特徴付ける11種類のトレンド関数を持つ NHGP モデルについて考察すると共に，トレンド関数のノンパラメトリック最尤推定法を提案しパラメトリックモデルとの比較を行った，

これに対して，本稿では NHPP モデル及び NHGP モデルを包括するより一般的な確率点過程を用いたソフトウェア信頼性モデルを提案する．Lindqvist ら [4] は NHPP と再生過程 (RP) の要素を併せ持つ確率点過程であるトレンド再生過程 (TRP) を提案した．トレンド再生過程は，NHPP の強度関数に対応するトレンド関数と呼ばれる時間変調関数と，RP の要素である再生分布によって特徴付けられる．トレンド再生過程のノンパラメトリックモデルに関する従来研究として，Heggland and Lindqvist [3] や Lindqvist [5] は再生分布の関数形は既知であるが，トレンド関数が未知である場合のノンパラメトリック推定量を提案した．これとは逆に，Saito and Dohi [8] はトレンド関数は既知であるが再生分布が未知であるという仮定の下でのノンパラメトリック推定量を提案している．これらの従来研究はいずれも修理系システムの故障発生現象を対象としたものであり，ソフトウェア信頼性の分野を対象とした議論は為されていない．したがって本稿では，トレンド関数若しくは再生分布の一方が未知であるという仮定の下で，ソフトウェアのフォールト検出事象を記述するトレンド再生過程モデルを提案する．実データ解析を通じて，数多くのパラメトリックモデル及びノンパラメトリックモデルのデータ適合性を比較し，モデル間の優位性を示す．

2 トレンド再生過程モデル

時刻 $t=0$ から開始されたソフトウェアテスト工程において，n 個のソフトウェアフォールト検出時刻データ t_i $(i=1,2,\ldots,n)$ が観測されたとし，時刻 t までに検出される累積ソフトウェアフォールト数を $N(t)$ とおく．この時，確率過程 $\{N(t);t\geq 0\}$ が以下の式で表される条件付強度関数を持つ場合，これをトレンド再生過程 (TRP) と呼ぶ.

$$\zeta(t\mid H_{t-})=z\left(\Lambda(t)-\Lambda(t_{N(t-)})\right)\lambda(t). \tag{1}$$

ここで，H_{t-} は時刻 t より前のフォールト検出履歴を表し，$t_{N(t-)}$ は時刻 t より前の最後のフォールト検出時刻を意味する．また，$\lambda(t)$ 及び $z(x)$ はそれぞれ非同次ポアソン過程 (NHPP) の強度関数及び再生過程 (RP) の故障率関数に相当し，これらを TRP のトレンド関数及び故障率関数と呼ぶこととする．本稿では，式 (1) の条件付強度関数により定義されるトレンド再生過程に基づくソフトウェア信頼性モデル (TRP モデル) について議論する．

NHPP モデルの場合よく知られている様に，時間スケール変換後の確率変数 $\Lambda(T_i)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ は，あらゆる時刻 $t\geq 0$ に対して単位故障強度 $\lambda(t)=1$ を持つ同次ポアソン過程 (HPP) に従う．ここで，T_i はソフトウェアフォールト検出時刻を表す確率変数であり，$\Lambda(t)(=\int_0^t\lambda(t)dt)$ は NHPP の平均値関数と呼ばれる．これは言い換えれば，時間スケール変換後の時間間隔 $\Lambda(T_{i+1})-\Lambda(T_i)$ が単位尺度パラメータの指数分布を持つ i.i.d. の確率変数であることを意味する．これに対して，TRP モデルにおいては，$\Lambda(T_{i+1})-\Lambda(T_i)$ は任意の確率分布に従う i.i.d. の確率変数となる．つまり $\Lambda(T_{i+1})-\Lambda(T_i)$ は任意の再生分布 $F(x)$ を持つ再生過程に従う．混乱を避けるため，TRP モデルにおける $\Lambda(t)(=\int_0^t\lambda(x)dx)$ は累積トレンド関数と呼ぶ．NHPP モデルと異なり，TRP モデルの平均値関数 $\mathrm{E}[N(t)]$ は $\Lambda(t)$ とは一致しないことが知られている [4]．$\mathrm{TRP}(\lambda(t),F(x))$ をトレンド関数 $\lambda(t)$ 及び再生分布 $F(x)$ を持つトレンド再生過程とする．この場合，TRP モデルの表記は唯一ではなく，任意の実数 c に対して，$\mathrm{TRP}(\lambda(t),F(x))$ と $\mathrm{TRP}(c\lambda(t),F(x/c))$ は同じ条件付強度関数を持つことが容易に確認出来る．

ソフトウェアテストの終了時刻を $T=t_{n+1}$ とし，$\boldsymbol{\theta}_\lambda$ 及び $\boldsymbol{\theta}_F$ をそれぞれトレンド関数及び再生分布が持つモデルパラメータ (ベクトル) と仮定すると，TRP モデルの尤度関数は

$$LF(\boldsymbol{\theta}_\lambda,\boldsymbol{\theta}_F)=\left\{\prod_{i=1}^{n}z\big(\Lambda(t_i)-\Lambda(t_{i-1})\big)\lambda(t_i)\right\}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n+1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}z\big(\Lambda(u)-\Lambda(t_{i-1})\big)\lambda(u)du\right\} \tag{2}$$

によって与えられる．ここで，$t_0=\Lambda(t_0)=0$ であり，再生分布 $F(x)$ に対応する故障率関数 $z(x)$ は $z(x)=(dF(x)/dx)/(1-F(x))$ によって定義される．式 (2) の対数を取ると，TRP モデルの対数尤度関数は

$$LLF(\boldsymbol{\theta}_\lambda,\boldsymbol{\theta}_F)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\log\Big(z\big(\Lambda(t_i)-\Lambda(t_{i-1})\big)\lambda(t_i)\Big)-\int_0^{\Lambda(t_i)-\Lambda(t_{i-1})}z(v)dv\right\}-\int_0^{\Lambda(T)-\Lambda(t_n)}z(v)dv \tag{3}$$

となる．トレンド関数 $\lambda(t)$ 及び再生分布 $F(x)$ の関数形が決まれば，式 (3) の対数尤度関数を最大化することによってそれぞれの関数が持つモデルパラメータ $\boldsymbol{\theta}_\lambda$ 及び $\boldsymbol{\theta}_F$ を推定することが出来る．このことから，トレンド関数 $\lambda(t)$ や再生分布 $F(x)$ を任意に定めることによって無数の TRP モデルを提案することが可能となる．本稿では，トレンド関数に関しては，NHPP モデルでもよく用いられる $\lambda(t)=\alpha\times g(t)$ で表現されるモデルを考察する．ここで，$g(t)=dG(t)/dt$ は任意の確率分布 $G(t)$ の密度関数を表すが，本稿では NHPP モデルに代表される指数分布 (EXP)，ガンマ分布 (GMA)，第二種パレート分布 (PAR)，切断正規分布 (TRN)，対数正規分布 (LGN)，切断ロジスティック分布 (TLG)，対数ロジスティック分布 (LLG)，切断 Gumbel 分布 (TXA)，Frechet 型極値分布 (LXA)，Gompertz 分布 (TXI)，Weibull 分布 (LXI) の 11 種類の分布関数を用いる．同様に，再生分布 $F(x)$ についても同じ 11 種類の確率分布を仮定する．また，パラメトリックモデルを考える場合，TRP の非唯一性から冗長なパラメータを $\alpha=1$ と設定することが出来る．したがって，本稿で提案するパラメトリックモデルは全て上記 11 種類の確率分布の組み合わせとそれぞれが持つモデルパラメータによってのみ特徴付けられることとなる．

ここで，故障率関数 $z(x)=1$ の場合，式 (3) は NHPP モデルの対数尤度関数と一致する．従って，TRP モデルは特別なケースとして NHPP モデルを包括していることが分かる．一方，トレンド関数 $\lambda(t)=1$ の場合，式 (3) は RP の対数尤度関数と一致することから，TRP は任意の再生分布 $F(x)$ を持つ再生過程に帰着される．

3 ノンパラメトリックモデル

3.1 トレンド関数の制約付きノンパラメトリック最尤推定量

Heggland and Lindqvist [3] や Saito and Dohi [7] は，Bartoszynski ら [1] が提案した NHPP の制約付ノンパラメトリック最尤推定量 (CNPMLE) の考え方を応用し，一部の TRP に対する CNPMLE を導出した．本節では，この推定量を適用したソフトウェア信頼性モデルを考察する．具体的には，トレンド関数が未知かつ再生分布が既知である場合において，トレンド関数の CNPMLE に基づくノンパラメトリック TRP モデルを提案する．$\lambda(t)$ が $(0,T]$ において非負で非増加な関数であるという条件の下で，式 (3) で与えられる対数尤度関数を最大化する推定値を求める．この場合，尤度を最大化する $\lambda(t)$ はフォールト検出時刻 t_i でのみ減少する可能性のある左連続の関数で構成される．

今，$\lambda_i=\lambda(t_i)$ 及び $x_i=t_i-t_{i-1}$ $(i=1,2,\cdots,n+1;t_{n+1}=T)$ とおく．時刻 $t>t_n$ における $\lambda(t)$ の推定値に関しては，$\Lambda(T)-\Lambda(t_n)>0$ の場合，式 (3) の最終項の分だけ対数尤度関数は減少するため，$\lambda_{n+1}=0$ である必要がある．また，$\Lambda(t_i)-\Lambda(t_{i-1})$ は $\lambda_i x_i$ と表すことが出来るため，非増加関数の仮定の下で式 (3) を最大化する問題は $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0(=\lambda_{n+1})$ の条件の下で

$$LLF(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\boldsymbol{\theta}_F)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\log\Big(z\big(\lambda_i x_i\big)\Big)+\log(\lambda_i)-\int_0^{\lambda_i x_i}z(v)dv\right\}. \tag{4}$$

を最大化する問題となる．原理的にはあらゆる再生分布に対してこの問題を解くことにより，様々な分布に対してトレンド再生過程の CNPMLE を導出することが可能であるが，それらを解析的に導出することは容易ではない．Bartoszynski ら [1] が提案した解法は，パラメトリックモデルで仮定した 11 種類のトレンド関数の中でも，指数分布 (NHPP モデル) の拡張と言えるガンマ分布 [7]，ワイブル分布 [3] に対してのみ有効となる．ガンマ分布及びワイブル分布を仮定した場合，非増加の単調性を持つ λ_i に対して式 (4) を最大化する問題は，$\omega_1\geq\omega_2\geq\cdots\geq\omega_n\geq 0(=\omega_{n+1})$ の条件の下で以下の問題を最大化する問題と等価となる．

$$\max_{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n}\sum_{i=1}^{n}\left\{z_i\log\omega_i-\omega_i y_i\right\}. \tag{5}$$

ここで，あらゆる i に対して，ガンマ分布については $z_i=\theta,\omega_i=\lambda_i,y_i=x_i$ であり，ワイブル分布については $z_i=1,\omega_i=\lambda_i^\theta,y_i=x_i^\theta$ である．また，θ はそれぞれの分布が持つ形状パラメータを意味し，トレンド関数の CNPMLE を考える場合，TRP の非唯一性から尺度パラメータは常に 1 とみなせる．この問題の解は，

$$\omega_i=\min_{1\leq h\leq i}\max_{i\leq k\leq n}\frac{\sum_{j=h+1}^{k}z_j}{\sum_{j=h+1}^{k}y_j} \tag{6}$$

で与えられ，ω_i と λ_i の関係式からトレンド関数の CNPMLE を求めることが出来る．同様に，非減少の単調整を仮定した場合，尤度を最大化する $\lambda(t)$ はフォールト検出時刻 t_i でのみ増加する可能性のある右連続の関数で構成されることから，$\omega_0\leq\omega_1\leq\omega_2\leq\cdots\leq\omega_n$ の条件の下で

$$\max_{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n}\sum_{i=1}^{n}\left\{z_i\log\omega_i-\omega_i y_i\right\} \tag{7}$$

となる問題を解くことによって導出できる．ここで，ガンマ分布及びワイブル分布について $z_0=\theta-1, z_i=\theta\ (i=1,2,\cdots,n-1), z_n=1$ である．また，ガンマ分布に対しては $\omega_i=\lambda_i\ (i=0,1,\cdots,n), y_i=x_{i+1}\ (i=0,1,\cdots,n-1), y_n=0$ であり，ワイブル分布に対しては $\omega_i=\lambda_i^\theta\ (i=0,1,\cdots,n), y_i=x_i^\theta\ (i=0,1,\cdots,n-1), y_n=0$ である．この問題の解は，

$$\omega_i=\begin{cases}\max_{0\le h\le i}\min_{i\le k\le n-1}\frac{\sum_{j=h+1}^{k}z_j}{\sum_{j=h+1}^{k}y_j}, & i=0,1,\cdots,n-1,\\ \infty, & i=n\end{cases} \tag{8}$$

で与えられる．非減少の CNPMLE においては $w_n=\infty$ とすることにより，原理上，尤度関数を無限に大きくすることが出来る特徴を持つ．

このように単調性を仮定することによって式 (6) 又は式 (8) からトレンド関数の CNPMLE を導出出来るが，同時に再生分布が持つ未知の形状パラメータ θ を推定する必要がある．ここでは，次のような繰り返し手法を用いる．まず，形状パラメータ θ の初期値を決め，式 (6) 又は式 (8) より CNPMLE を導出する．続いて，得られた $\lambda(t)$ の推定値を用いて，TRP モデルの対数尤度関数を最大化するパラメータ θ を推定し，同様の繰り返し手法を θ の値が収束するまで続ける．こうすることで，再生分布の形状パラメータ θ の最尤推定値とトレンド関数の CNPMLE を同時に導出することが可能となる．

3.2 故障率関数の制約付きノンパラメトリック最尤推定量

本節では，3.1 節とは逆にトレンド関数が既知かつ再生分布が未知である場合において，故障率関数の CNPMLE に基づくノンパラメトリック TRP モデルを考察する．Marshall and Proschan [6] は，独立で同一な確率分布 (i.i.d.) からのデータが得られた下で単調な $z(x)$ を仮定した場合，故障率関数の CNPMLE を導出出来ることを示した．この手法も直接的に TRP モデルに応用することが可能である [8]．

TRP モデルの場合，累積トレンド関数 $\Lambda(t;\boldsymbol{\theta}_\lambda)$ での時間スケール変換後の時間間隔 $x_i=\Lambda(t_i;\boldsymbol{\theta}_\lambda)-\Lambda(t_{i-1};\boldsymbol{\theta}_\lambda)\ (i=1,2,\cdots,n)$ が i.i.d. となる性質がある．ここで，$t_0=\Lambda(t_0;\boldsymbol{\theta}_\lambda)=0$ である．この場合，x_i は未知のパラメータ (ベクトル)$\boldsymbol{\theta}_\lambda$ を持つ累積トレンド関数 $\Lambda(t;\boldsymbol{\theta}_\lambda)$ に依存する．したがって，TRP の故障率関数の CNPMLE を計算する際には，累積トレンド関数の変化に伴って時間スケール変換後の時間間隔 x_i もまた変化するという性質を考慮する必要がある．本節ではパラメトリックモデルと同様に 11 種類の確率分布関数 $G(t)$ を用いて $\Lambda(t)=\alpha\times G(t)$ で表される累積トレンド関数を仮定する．ここでもパラメトリックモデルと同様に，TRP の非唯一性により計算を簡単化するため冗長なパラメータを $\alpha=1$ と設定することが出来る．α を除くトレンド関数のパラメータを $\boldsymbol{\theta}_\lambda^{-\alpha}$ とおけば，ここでの問題は，TRP の対数尤度関数を最大化するトレンド関数のパラメータ $\boldsymbol{\theta}_\lambda^{-\alpha}$ 及び CNPMLE を同時に推定することである．故障率関数の CNPMLE の場合，3.1 節で示したトレンド関数の CNPMLE の推定手法のような，モデルパラメータを更新していくようなアルゴリズムでは収束が保障されない．これは，モデルパラメータ $\boldsymbol{\theta}_\lambda^{-\alpha}$ の変化に応じて，時間間隔 x_i だけでなく CNPMLE 自体も同時に変化するためである．そこで，以下のような推定手法を考える．モデルパラメータ $\boldsymbol{\theta}_\lambda^{-\alpha}$ を任意に仮定した場合，あらゆる $i\ (=1,2,\cdots,n)$ に対して $x_i=\Lambda(t_i;\boldsymbol{\theta}_\lambda^{-\alpha})-\Lambda(t_{i-1};\boldsymbol{\theta}_\lambda^{-\alpha})$ の大小関係が確定する．これを $x_{(i)}\ (0=x_{(0)}\le x_{(1)}\le\cdots\le x_{(n)})$ とおくと，TRP モデルの対数尤度関数は

$$LLF=\sum_{i=1}^{n}\Big\{\log\big(z(x_{(i)})\big)+\log\big(\lambda(t_i)\big)-\int_0^{x_{(i)}}z(v)dv\Big\} \tag{9}$$

と書き直すことが出来る．

今，非増加の故障率関数を仮定すると，式 (9) を最大化する CNPMLE は以下の式で求めることが出来る．

$$z(x)=\begin{cases}\max_{i\le k\le n}\min_{0\le k\le i-1}\frac{k-h}{\sum_{i=h}^{k-1}\{(n-i)(x_{(i+1)}-x_{(i)})\}}, & x_{(i-1)}<x\le x_{(i)}, (i=1,2,\cdots,n),\\ \delta, & x>x_{(n)},\end{cases} \tag{10}$$

ここで δ は $\delta < z(x_{(n)})$ を満たす任意の実数である．ここから分かるように尤度関数の大きさが $x \leq x_{(n)}$ の $z(x)$ のみに依存することから，非増加の場合には TRP モデルの故障率関数の CNPMLE は唯一ではない．それゆえ，単調性の性質を崩さない範囲で δ は任意に決定することが可能である．本稿では便宜上 $\delta = 0$ として扱う．

同様に，非減少の故障率関数を考える場合，式 (9) を最大化する CNPMLE は

$$z(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)}, \\ \min_{i+1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq u \leq i} \frac{k-h}{\sum_{i=h}^{k-1}\{(n-i)(x_{(i+1)}-x_{(i)})\}}, & x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)},\ (i = 1, 2, \cdots, n-1), \\ \infty, & x \geq x_{(n)} \end{cases} \tag{11}$$

で与えられる．非減少のトレンド関数の CNPMLE と同様に，$z(x) = \infty$ $(x \geq x_{(n)})$ とすることにより，原理上，尤度関数を無限に大きくすることが出来る特徴を持つ．これらの結果から，一度モデルパラメータ $\boldsymbol{\theta}_{\lambda}^{-\alpha}$ が固定されれば $x_{(i)}$ $(x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)})$ が決まるため，単調性に応じて式 (10) 若しくは式 (11) より故障率関数 $z(x)$ の CNPMLE を計算出来ることが分かる．この性質を利用して，モデルパラメータ $\boldsymbol{\theta}_{\lambda}^{-\alpha}$ の可能解を列挙することによって式 (9) の対数尤度関数を最大化する最適なモデルパラメータを求めることが出来る．

トレンド関数の CNPMLE に基づくノンパラメトリックモデルと故障率関数の CNPMLE に基づくノンパラメトリックモデルを比較した場合，後者の持つメリットとして現時点以降の予測を行うことが出来る点が挙げられる．トレンド関数の CNPMLE の場合，最終フォールト検出時刻 t_n 以降のトレンド関数の推定値が 0 若しくは無限大となることに対して，故障率関数の CNPMLE の場合，パラメトリックな関数形で表現されるトレンド関数は最終フォールト検出時刻 t_n 以降も連続的に変化していく．これらの性質から，モンテカルロシミュレーションを行った場合，前者が最終フォールト検出時刻以降のフォールト検出予測時刻を適切に生成出来ないのに対し，後者では問題なくシミュレーションが機能する．この点を踏まえれば，ソフトウェア信頼性モデルとしては故障率関数の CNPMLE に基づくノンパラメトリック TRP モデルの方が大きなアドバンテージを持つと言える．

4 実データ解析

ここでは，上述した TRP モデルのデータ適合性を定量的に測ることを目的とし，パラメトリックモデル及びノンパラメトリックモデルの結果を比較した．実際のソフトウェアテスト工程で観測された $n = 54$ 個のソフトウェア検出時刻データ ($t_{54} = 30.197$) で構成されるデータセットを用いて，データ適合性を比較する．全データの 10%から 100%までの各観測時点における最大対数尤度 (MLL) を計算することで，最良なソフトウェア信頼性モデルを同定する．ここで，非減少の CNPMLE を適用した場合，上述したように MLL を無限に大きくすることが出来る．しかしながら，この結果は必ずしもデータ適合性が最も優れていることを示している訳ではない．したがって本稿では，適切な比較を行うことを目的として，トレンド関数及び故障率関数の CNPMLE に対して，それぞれ $w_n = w_{n-1}$ 及び $z(x_{(n)}) = z(x_{(n-1)})$ として計算を行なった．また，予測精度を測るための指標として

$$\mathbf{PMSE} = \frac{\sqrt{\sum_{i=m+1}^{n}\{\mathrm{E}[N(t_i)] - i\}^2}}{n-m} \tag{12}$$

で表される予測二乗誤差を用いる．ここで，n 及び m はそれぞれ全データ数及び観測時点までのデータ数を表す．TRP モデルでは，$\mathrm{E}[N(t)]$ を直接求めることは出来ないため，モンテカルロシミュレーションを適用し，$m = 1000$ 組のサンプルパスから各時刻 t_i における平均値 $\mathrm{E}[N(t_i)]$ を算出した．

まず，パラメトリックモデルとノンパラメトリックモデルのデータ適合性を比較する．表 1 はパラメトリックモデルと 2 種類のノンパラメトリックモデルのそれぞれにおいて最も高いデータ適合性を示したモ

デルの MLL を表している．また，下線の数字は各観測時点において全てのモデルの中で最良のデータ適合性を示した結果を表す．これらの結果から，どの観測時点においてもノンパラメトリックモデルがパラメトリックモデルと比較してより良いデータ適合性を示していることが分かる．中でも特に故障率関数の CNPMLE に基づくノンパラメトリックモデルが多くの場合において他のモデルよりも優れたデータ適合性を持つことが分かった．

続いて，予測精度に関して考察する．表 2 はパラメトリックモデル及び故障率関数の CNPMLE に基づくノンパラメトリックモデルの予測精度を表したものである．いずれのモデルにおいても表 1 と同様に各観測時点で最も高いデータ適合性を示したトレンド関数及び再生分布の組み合わせを用いており，下線の数字は各観測時点においてより優れた予測精度を示した結果を表している．これらの結果から，より小さな PMSE の値を示したモデルは各モデルにおいてほぼ同数であり，パラメトリックモデル及びノンパラメトリックモデルのいずれが優れた予測精度を有するかを明確に議論することは難しい．また，各観測時点の PMSE の平均値をモデル毎に計算した結果，いずれのモデルにおける平均値もほぼ等しい値を示した．これらの結果からは単純にパラメトリック及びノンパラメトリックモデルのどちらの予測精度が優れているかを結論付けること出来ない．しかしながら，パラメトリックモデルが 121 種類のモデル候補から最良なモデルを選択していることを踏まえれば，ノンパラメトリックモデルはより低い計算コストで同程度の精度を示していると言える．このことから計算コストの面から考える場合，ノンパラメトリックモデルがより良いモデルの枠組みであると言えよう．

表 1: 適合性評価の比較結果

	パラメトリックモデル			CNPMLE(トレンド関数)			CNPMLE(故障率関数)		
%	$F(x)$	$\lambda(t)$	MLL	$F(x)$	$\lambda(t)$	MLL	$F(x)$	$\lambda(t)$	MLL
10	LXA	LGN	21.79	LXI	非増加	<u>46.19</u>	非減少	TXI	33.78
20	LXA	LGN	27.04	LXI	非増加	29.28	非減少	GMA	<u>42.02</u>
30	TXI	LGN	26.56	LXI	非増加	27.53	非減少	TXA	<u>40.57</u>
40	TLG	LXA	29.96	LXI	非増加	32.9	非減少	LXA	<u>40.35</u>
50	TLG	GMA	31.26	LXI	非増加	37.76	非減少	LXA	<u>42.21</u>
60	TXI	LXI	26.42	LXI	非増加	35.04	非減少	LLG	<u>37.80</u>
70	TXI	PRT	19.77	LXI	非増加	23.47	非減少	GMA	<u>33.55</u>
80	TXI	LGN	11.53	LXI	非増加	20.14	非減少	GMA	<u>27.74</u>
90	TLG	LXA	6.16	LXI	非増加	10.02	非減少	TXI	<u>26.59</u>
100	TLG	LXA	-1.8	LXI	非増加	3.87	非減少	TXI	<u>23.94</u>

5 まとめと今後の展望

本稿では，11 種類の確率分布関数の組み合わせで表現された 121 種類のトレンド再生過程に基づくパラメトリックなソフトウェア信頼性モデルの提案と共に，トレンド関数及び再生分布の一方が未知であるという仮定の下でのノンパラメトリック TRP モデルを提案した．いずれのノンパラメトリックモデルについても，単調性を仮定した上で尤度を最大化する制約付きノンパラメトリック最尤推定量 (CNPMLE) を適用した．トレンド関数及び故障率関数の CNPMLE を比較した場合，予測が行える点やデータ適合性の高さの点から，故障率関数の CNPMLE に基づくソフトウェア信頼性モデルがより優れたモデルの枠組みであると結論付けることが出来た．

表 2: 予測制度の比較結果

	パラメトリックモデル			CNPMLE(故障率関数)		
%	$F(x)$	$\lambda(t)$	PMSE	$F(x)$	$\lambda(t)$	PMSE
10	LXA	LGN	3.693	非減少	TXI	1.520
20	LXA	LGN	3.460	非減少	GMA	0.337
30	TXI	LGN	1.362	非減少	LXA	3.344
40	TLG	LXA	0.895	非減少	LXA	1.842
50	TLG	GMA	1.826	非減少	LXA	1.603
60	TXI	TXI	2.498	非減少	LLG	2.341
70	TXI	PRT	1.276	非減少	GMA	2.353
80	TXI	LGN	1.384	非減少	GMA	1.983
90	TLG	LXA	0.107	非減少	TXI	1.167
	平均		1.833	平均		1.832

今後の課題として，トレンド関数及び再生分布が共に未知である場合を想定したソフトウェア信頼性モデルの提案やカーネル推定量を応用したノンパラメトリックソフトウェア信頼性モデルの考察が挙げられる.

謝辞

本研究の一部は，JSPS 科研費 JP17K12986 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] R. Bartoszynski, B. W. Brown, C. M. McBride and J. R. Thompson, "Some nonparametric techniques for estimating the intensity function of a cancer related nonstationary Poisson process," *Annals of Statistics*, **9** (5), pp. 1050–1060 (1981).

[2] M. R. Lyu, *Handbook of Software Reliability Engineering*, McGraw-Hill, New York (1996)

[3] K. Heggland and B. H. Lindqvist, "A nonparametric monotone maximum likelihood estimator of time trend for repairable systems data," *Reliability Engineering and System Safety*, **92** (5), 575–584 (2007).

[4] B. H. Lindqvist, G. Elvebakk and K. Heggland, "The trend-renewal process for statistical analysis of repairable systems," *Technometrics*, **45** (1), 31–44 (2003).

[5] B. H. Lindqvist, "Nonparametric estimation of time trend for repairable systems data," *Mathematical and Statistical Models and Methods in Reliability* (Eds. V. V. Rykov, N. Balakrishnan and M. S. Nikulin), 277–288, Springer, New York (2010).

[6] A. W. Marshall and F. Proschan, "Maximum likelihood estimation for distributions with monotone failure rate," *The Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 69–77 (1965).

[7] Y. Saito and T. Dohi, "Nonparametric estimation in software reliability assessment based on non-homogeneous gamma processes," *IEICE Technical Report*, **115** (47), 13–18 (2015).

[8] Y. Saito and T. Dohi, "Another look at nonparametric estimation for trend renewal processes," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **59** (4), 312–333 (2016).