数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 114-120

Nonhomogeneous Semi-Fibonacci Programming

— Identical Duality —

岩本誠一（九州大学·名誉教授）
Seiichi Iwamoto
Professor emeritus, Kyushu University

木村寛（秋田県立大学 システム科学技術学部）
Yutaka Kimura
Department of Management Science and Engineering
Faculty of Systems Science and Technology
Akita Prefectural University

概 要

本報告では、非同次セミフィボナッチ制約 (nonhomogeneous semi-Fibonacci constraints) をもつ2次計画の最小化問題と最大化問題の対を考え、この対の間にはフィボナッチ一致双対性 (Fibonacci identical duality) が成り立つことを示す。

また双対問題の導出をプラス・マイナス法（Plus-minus Method）による方法で示す。さらに、非同次性が特別な場合には、主と双対のそれぞれの問題の最適点がともにダ・ヴィンチ・コードを成していることを紹介する。

まず、8変数の条件付き最小化問題

$$
(\mathrm{P}_1)\qquad
\begin{array}{lrl}
\text{minimize} & \multicolumn{2}{l}{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_7^2+y_8^2-2(b_1y_1+b_3y_3+b_5y_5+b_7y_7)} \\
\text{subject to} & \text{(i)} & y_1+y_2-y_3 = b_2 \\
 & \text{(ii)} & y_3+y_4-y_5 = b_4 \\
 & \text{(iii)} & y_5+y_6-y_7 = b_6 \\
 & \text{(iv)} & y_7+y_8 = b_8 \\
 & \text{(v)} & y \in R^8
\end{array}
$$

と、8変数の条件付き最大化問題

$$
(\mathrm{D}_1)\qquad
\begin{array}{lrl}
\text{Maximize} & \multicolumn{2}{l}{-(\mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_8^2)+2(b_2\mu_2+b_4\mu_4+b_6\mu_6+b_8\mu_8)} \\
\text{subject to} & \text{(i)}' & \mu_1-\mu_2 = b_1 \\
 & \text{(ii)}' & \mu_2+\mu_3-\mu_4 = b_3 \\
 & \text{(iii)}' & \mu_4+\mu_5-\mu_6 = b_5 \\
 & \text{(iv)}' & \mu_6+\mu_7-\mu_8 = b_7 \\
 & \text{(v)}' & \mu \in R^8
\end{array}
$$

を考える。ただし $(b_1, b_2, \ldots, b_8) \in R^8$ は定数。
本報告では8変数を対象に述べるが、一般の $2n$ 変数問題についても成り立つ。
今、(P_1) と (D_1) の目的関数をそれぞれ以下で表す：

$$
\begin{aligned}
f(y) &= y_1^2+y_2^2+\cdots+y_8^2-2(b_1y_1+b_3y_3+b_5y_5+b_7y_7) \\
g(\mu) &= -(\mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_8^2)+2(b_2\mu_2+b_4\mu_4+b_6\mu_6+b_8\mu_8).
\end{aligned}
$$

補題 1 (Fibonacci solution) 8元8連立線形方程式

$$
(\mathrm{NF}) \qquad
\begin{aligned}
y_1 - y_2 &= b_1 & y_1 + y_2 - y_3 &= b_2 \\
y_2 + y_3 - y_4 &= b_3 & y_3 + y_4 - y_5 &= b_4 \\
y_4 + y_5 - y_6 &= b_5 & y_5 + y_6 - y_7 &= b_6 \\
y_6 + y_7 - y_8 &= b_7 & y_7 + y_8 &= b_8
\end{aligned}
$$

は、唯一の解をもつ：

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{pmatrix}
= \frac{1}{34}
\begin{pmatrix}
21b_1 + 13b_2 + 8b_3 + 5b_4 + 3b_5 + 2b_6 + b_7 + b_8 \\
-13b_1 + 13b_2 + 8b_3 + 5b_4 + 3b_5 + 2b_6 + b_7 + b_8 \\
8b_1 - 8b_2 + 16b_3 + 10b_4 + 6b_5 + 4b_6 + 2b_7 + 2b_8 \\
-5b_1 + 5b_2 - 10b_3 + 15b_4 + 9b_5 + 6b_6 + 3b_7 + 3b_8 \\
3b_1 - 3b_2 + 6b_3 - 9b_4 + 15b_5 + 10b_6 + 5b_7 + 5b_8 \\
-2b_1 + 2b_2 - 4b_3 + 6b_4 - 10b_5 + 16b_6 + 8b_7 + 8b_8 \\
b_1 - b_2 + 2b_3 - 3b_4 + 5b_5 - 8b_6 + 13b_7 + 13b_8 \\
-b_1 + b_2 - 2b_3 + 3b_4 - 5b_5 + 8b_6 - 13b_7 + 21b_8
\end{pmatrix}. \tag{1}
$$

Proof. この方程式系は $Ay = b$ で表される。ただし

$$
A = \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}, \quad
y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_8 \end{pmatrix}, \quad
b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_8 \end{pmatrix}.
$$

8×8 行列 A は逆行列をもち

$$
A^{-1} = \frac{1}{34}
\begin{pmatrix}
21 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \\
-13 & 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \\
8 & -8 & 16 & 10 & 6 & 4 & 2 & 2 \\
-5 & 5 & -10 & 15 & 9 & 6 & 3 & 3 \\
3 & -3 & 6 & -9 & 15 & 10 & 5 & 5 \\
-2 & 2 & -4 & 6 & -10 & 16 & 8 & 8 \\
1 & -1 & 2 & -3 & 5 & -8 & 13 & 13 \\
-1 & 1 & -2 & 3 & -5 & 8 & -13 & 21
\end{pmatrix}
$$

になる。したがって、この方程式系は唯一の解 $y = A^{-1}b$ をもち、(1) を得る。 □

補題 2 (Complementarity) $(y_1, y_2, \ldots, y_8)$ と $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8)$ が条件 (i)〜(iv) と (i)′〜(iv)′

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 - y_3 &= b_2 & \mu_1 - \mu_2 &= b_1 \\ y_3 + y_4 - y_5 &= b_4 & \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 &= b_3 \\ y_5 + y_6 - y_7 &= b_6 & \mu_4 + \mu_5 - \mu_6 &= b_5 \\ y_7 + y_8 &= b_8 & \mu_6 + \mu_7 - \mu_8 &= b_7 \end{aligned}$$

を満たすとき、次の関係式が成り立つ：

$$\sum_{k=1}^{8} y_k \mu_k = (b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) + (b_2 \mu_2 + b_4 \mu_4 + b_6 \mu_6 + b_8 \mu_8).$$

補題 3

(i) (Inequality) 任意の実行可能解 y, μ に対して $g(\mu) \leq f(y)$ が成り立つ。

(ii) (Equality) 等号は $y = \mu$ のときのみ成立する。

(iii) (Linearity) このとき、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} f(y) &= -(b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) + (b_2 y_2 + b_4 y_4 + b_6 y_6 + b_8 y_8) \\ g(\mu) &= -(b_1 \mu_1 + b_3 \mu_3 + b_5 \mu_5 + b_7 \mu_7) + (b_2 \mu_2 + b_4 \mu_4 + b_6 \mu_6 + b_8 \mu_8). \end{aligned}$$

Proof. さて、最小化問題 (P_1) から最大化問題 (D_1) をプラス・マイナス法（Plus-minus Method）で導こう [10]。この方法では目的関数の 2 次性に着目して、双対変数を係数とする 1 次式を引いて加えている。さらに平方完成も行っている。

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_8) \in R^8$ を (P_1) の実行可能解とする。任意の $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8) \in R^8$ に対してこの 1 次式を引いて加え、制約式 (i)-(iv) を用いると

$$\begin{aligned} & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 - 2(b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) \\ =\ & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 - 2(b_1 y_1 + b_3 y_3 + b_5 y_5 + b_7 y_7) \\ & \quad - 2\mu_1 y_1 - 2\mu_2 y_2 - \cdots - 2\mu_8 y_8 + 2\mu_1 y_1 + 2\mu_2 y_2 + \cdots + 2\mu_8 y_8 \\ =\ & (y_1 - \mu_1)^2 - \mu_1^2 + (y_2 - \mu_2)^2 - \mu_2^2 + \cdots + (y_8 - \mu_8)^2 - \mu_8^2 \\ & \quad + 2\big[(\mu_1 - \mu_2 - b_1) y_1 + (\mu_2 + \mu_3 - \mu_4 - b_3) y_3 \\ & \qquad + (\mu_4 + \mu_5 - \mu_6 - b_5) y_5 + (\mu_6 + \mu_7 - \mu_8 - b_7) y_7\big] + 2(b_2 \mu_2 + b_4 \mu_4 + b_6 \mu_6 + b_8 \mu_8) \end{aligned}$$

が成り立つ。特に条件

$$\begin{aligned} &(\mathrm{i})' \ \mu_1 - \mu_2 = b_1 & &(\mathrm{iii})' \ \mu_4 + \mu_5 - \mu_6 = b_5 \\ &(\mathrm{ii})' \ \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 = b_3 & &(\mathrm{iv})' \ \mu_6 + \mu_7 - \mu_8 = b_7 \end{aligned}$$

の下では

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7)$$
$$= (y_1 - \mu_1)^2 - \mu_1^2 + \cdots + (y_8 - \mu_8)^2 - \mu_8^3 + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8)$$

であり、不等式

$$\begin{aligned} & y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_8^2 - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) \\ \geq\ & -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ。等号は

$$\text{(e)} \quad y_k = \mu_k \quad 1 \leq k \leq 8$$

のときに限り成り立つ。すなわち、(i)〜(iv) を満たす y と (i)$'$〜(iv)$'$ を満たす μ に対して、不等式 (2) が成り立つ。等号は条件 (i)〜(iv), (e), (i)$'$〜(iv)$'$ が成り立つときに限り成立する。この 16 元 16 連立 1 次方程式系は、補題 1 の (NF) に同値になり、唯一の解

$$(\hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\ \ldots,\ \hat{y}_8) = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_8^*)$$

をもち、(1) で与えられる。よって、 (P_1) から (D_1) が導かれた。

同様に逆も導こう。$\mu \in R^8$ を (D_1) の実行可能解とする。このとき任意の $y \in R^8$ に対して

$$\begin{aligned} & -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \\ =\ & -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \\ & + 2y_1\mu_1 + 2y_2\mu_2 + \cdots + 2y_8\mu_8 - 2y_1\mu_1 - 2y_2\mu_2 - \cdots - 2y_8\mu_8 \\ =\ & -\mu_1^2 + 2y_1\mu_1 - \mu_2^2 + 2y_2\mu_2 - \cdots - \mu_8^2 + 2y_8\mu_8 + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \\ & - 2y_1(b_1 + \mu_2) - 2y_2\mu_2 - 2y_3(b_3 + \mu_4 - \mu_2) - 2y_4\mu_4 \\ & - 2y_5(b_5 + \mu_6 - \mu_4) - 2y_6\mu_6 - 2y_7(b_7 + \mu_8 - \mu_6) - 2y_8\mu_8 \\ =\ & -(\mu_1 - y_1)^2 + y_1^2 - (\mu_2 - y_2)^2 + y_2^2 - \cdots - (\mu_8 - y_8)^2 + y_8^2 \\ & - 2(y_1 + y_2 - y_3 - b_2)\mu_2 - 2(y_3 + y_4 - y_5 - b_4)\mu_4 \\ & - 2(y_5 + y_6 - y_7 - b_6)\mu_6 - 2(y_7 + y_8 - b_8)\mu_8 - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) \end{aligned}$$

が成り立つ。特に条件

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & y_1 + y_2 - y_3 = b_2 \\ \text{(ii)} & y_3 + y_4 - y_5 = b_4 \\ \text{(iii)} & y_5 + y_6 - y_7 = b_6 \\ \text{(iv)} & y_7 + y_8 = b_8 \end{array}$$

の下では

$$\begin{aligned} & -(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_8^2) + 2(b_2\mu_2 + b_4\mu_4 + b_6\mu_6 + b_8\mu_8) \\ =\ & -(\mu_1 - y_1)^2 + y_1^2 - \cdots - (\mu_8 - y_8)^2 + y_8^2 - 2(b_1y_1 + b_3y_3 + b_5y_5 + b_7y_7) \end{aligned}$$

であり、不等式

$$-(\mu_1^2+\mu_2^2+\cdots+\mu_8^2)+2(b_2\mu_2+b_4\mu_4+b_6\mu_6+b_8\mu_8)$$
$$\leq y_1^2+y_2^2+\cdots+y_8^2-2(b_1y_1+b_3y_3+b_5y_5+b_7y_7) \tag{3}$$

が成り立つ。等号は

$$\text{(e)}\quad \mu_k = y_k \quad 1\leq k\leq 8$$

のときに限り成立する。すなわち、(i)′〜(iv)′ を満たす μ と (i)〜(iv) を満たす y に対して、不等式 (3) が成り立つ。等号は条件 (i)〜(iv), (e), (i)′〜(iv)′ が成り立つときに限り成立する。この 16 元 16 連立 1 次方程式系は、補題 1 の (NF) に同値になり、唯一の解

$$(\hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\ \ldots,\ \hat{y}_8) = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_8^*)$$

をもち、(1) で与えられる。よって、 (D_1) から (P_1) が導かれた。したがって、両問題は互いに双対である。

また $y=\mu$ のとき (iii) であることは、$f(y)$, $g(\mu)$ の定義と、補題 2 の結果より得る。 □

したがって、以下の定理を得る。

定理 1 (Duality Theorem)

(i) (Weak Duality) (P_1), (D_1) の実行可能解 (y,μ) に対して $g(\mu)\leq f(y)$ が成り立つ。

(ii) (Strong Duality) $f(\hat{y}) = g(\mu^*)$ を満たす実行可能解 $(\hat{y},\mu^*)$ が存在する。

(iii) (Optimal Solution) $\hat{y}$ は (P_1) の最小点であり μ^* は (D_1) の最大点である。

Proof. (i), (ii) は、補題 3 より明らか。また (i), (ii) より (iii) を得る。 □

さらに、(P_1) と (D_1) の間には **Fibonacci identical duality** (FID) が成り立つ。ここに、(FID) とは以下の三位一体の関係が成り立つことをいう [9,10]。

1. (duality) (P_1) と (D_1) は互いに双対である。
2. (identical) それぞれの最適点と最適値は共に一致する。
3. (Fibonacci) (P_1) は $\hat{y} = A^{-1}b$ のとき、最小値 $m = (b,\ Bb)$ をもつ。(D_1) も $\mu^* = A^{-1}b$ のとき、最大値 $M = (b,\ Bb)$ をもつ。ただし、$b=(b_1,b_2,\ldots,b_8)$,

$$A^{-1} = \frac{1}{F_9}\begin{pmatrix} F_8 & F_7 & F_6 & F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 \\ -F_7 & F_7F_2 & F_6F_2 & F_5F_2 & F_4F_2 & F_3F_2 & F_2F_2 & F_2 \\ F_6 & -F_6F_2 & F_6F_3 & F_5F_3 & F_4F_3 & F_3F_3 & F_2F_3 & F_3 \\ -F_5 & F_5F_2 & -F_5F_3 & F_5F_4 & F_4F_4 & F_3F_4 & F_2F_4 & F_4 \\ F_4 & -F_4F_2 & F_4F_3 & -F_4F_4 & F_4F_5 & F_3F_5 & F_2F_5 & F_5 \\ -F_3 & F_3F_2 & -F_3F_3 & F_3F_4 & -F_3F_5 & F_3F_6 & F_2F_6 & F_6 \\ F_2 & -F_2F_2 & F_2F_3 & -F_2F_4 & F_2F_5 & -F_2F_6 & F_2F_7 & F_7 \\ -F_1 & F_2 & -F_3 & F_4 & -F_5 & F_6 & -F_7 & F_8 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{F_9}\begin{pmatrix} -F_8 & -F_7 & -F_6 & -F_5 & -F_4 & -F_3 & -F_2 & -F_1 \\ -F_7 & F_7F_2 & F_6F_2 & F_5F_2 & F_4F_2 & F_3F_2 & F_2F_2 & F_2 \\ -F_6 & F_6F_2 & -F_6F_3 & -F_5F_3 & -F_4F_3 & -F_3F_3 & -F_2F_3 & -F_3 \\ -F_5 & F_5F_2 & -F_5F_3 & F_5F_4 & F_4F_4 & F_3F_4 & F_2F_4 & F_4 \\ -F_4 & F_4F_2 & -F_4F_3 & F_4F_4 & -F_4F_5 & -F_3F_5 & -F_2F_5 & -F_5 \\ -F_3 & F_3F_2 & -F_3F_3 & F_3F_4 & -F_3F_5 & F_3F_6 & F_2F_6 & F_6 \\ -F_2 & F_2F_2 & -F_2F_3 & F_2F_4 & -F_2F_5 & F_2F_6 & -F_2F_7 & -F_7 \\ -F_1 & F_2 & -F_3 & F_4 & -F_5 & F_6 & -F_7 & F_8 \end{pmatrix}.$$

ここに $F_1, F_2, \ldots, F_9$ はフィボナッチ数列の第 1 項から第 9 項である（表 1）。両問題の最適解（点と値）は共にフィボナッチ数列で表されている。一般に、**フィボナッチ数列** (Fibonacci sequence) は 2 階線形差分方程式（3 項間漸化式）

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \qquad x_1 = 1,\ x_0 = 0$$

の解として定義される（表 1）[7–10]。

表 1　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

次に、(P_1) と (D_1) に対して、$b_1 = b_2 = \cdots = b_7 = 0,\ b_8 = F_9$ とした問題をそれぞれ (P_2) と (D_2) とする。このとき、最小点と最大点は共にダ・ヴィンチ・コード [9] になり、最小値と最大値は $m = M = F_8F_9$ になる。すなわち、(P_2) と (D_2) の間には **Fibonacci identical duality** (FID) が成り立つ：

1. (duality)　(P_2) と (D_2) は互いに双対である。
2. (identical)　それぞれの最適点と最適値は共に一致する。
3. (Fibonacci)　(P_2) は

$$\hat{y} = (\hat{y}_1,\ \hat{y}_2,\ \ldots,\ \hat{y}_8) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8)$$

のとき、最小値 $m = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。(D_2) も

$$\mu^* = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_8^*) = \frac{c}{F_9}(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_8)$$

のとき、最大値 $M = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ をもつ。

なお、映画「ダ・ヴィンチ・コード」(2006年) では冒頭のシーンで10桁の暗証番号

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

が現れている [3]。この10個の数字は、8つの数字からなる列

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21$$

すなわち、フィボナッチ数列 (表 1) の第1項 $F_1 = 1$ から第8項 $F_8 = 21$ までの数列、に他ならない。これがダ・ヴィンチ・コードである [7–9]。

最後に、本問題の由来は文献 [4, 7–10] に遡り、アプローチと方法は [1, 2, 5, 6] に依る。

参考文献

[1] E.F. Beckenbach and R.E. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Ergebnisse **30**, 1961.

[2] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[3] D. Brown, ダ・ヴィンチ・コード (上・下) (越前敏弥訳), 角川書店, 2004; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday(USA) & Bantam(UK), 2003.

[4] 岩本 誠一, 動的計画論, 九大出版会, 1987.

[5] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming I, II, III, J. Math. Anal. Appl. **58**(1977), 113–134, 247–279, 439–448.

[6] S. Iwamoto, Dynamic programming approach to inequalities, J. Math. Anal. Appl. **58**(1977), 687–704.

[7] 岩本 誠一, 「ダ・ヴィンチ・コードは最適か？」, 数理経済学研究センター会報, 第37号, 平成21(2009)年9月, pp.1–9.

[8] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之, 「ダ・ヴィンチ・コード」, 経済学研究 (九大経済学会), 第76巻 (2009年10月) 23号, pp.1–21.

[9] 岩本 誠一, 最適化の数理 II — ベルマン方程式 — (Mathematics for Optimization I I – Bellman Equation –)、数理経済学研究センター「数理経済学叢書5」, 知泉書館, 2013年10月, pp.449.

[10] 岩本 誠一・木村 寛, 「セミフィボナッチ計画法 — 不等式アプローチ — 」, 京大数理研講究録, Vol.2044, pp. 112–119, 2017.