数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 121-126

集合値解析手法による DC計画問題の最適解について

(On Set-valued Analysis for an Optimal Solution of DC Programming Problem)

齋藤裕 Yutaka Saito* , 木村寛 Yutaka Kimura† , 荒谷洋輔 Yousuke Araya‡

秋田県立大学 システム科学技術学部
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University

1 はじめに

本研究は、変数 $y \in Y$ により制約集合が変化するＤＣ計画問題の最適解の存在性、及びそれを導出する Y 上での下半連続性についてを集合値解析の観点から調査しまとめたものである。

凸集合は簡単な問題を考える上で現れる単純な集合である。また、差集合は排他条件の表現としてよく用いられる。ＤＣ計画問題は制約集合が２つの凸集合の差集合で表される最適化問題で、その適用範囲は非常に広く、現在も活発に研究されている数理計画問題である。なお、本研究で扱うDC問題の形は逆凸問題の形である。（これらの背景については [3] によくまとまっている。）

我々はＤＣ計画問題の２つの制約集合が集合値写像の像であると考えることで、「変数により制約集合が変化するＤＣ計画問題」を数理問題へモデル化した。例えば、時間により制約条件が連続変化する問題を扱うことができるだろう。

上述した問題の目的関数と集合値写像にいくつかの連続性を仮定することで、その問題の最適値の下半連続性が保証できる、という定理がある。この定理から最適解の存在性を示すことができた。

本稿では集合値写像の連続性と連続関数との関係性について触れ、定理の仮定がどのようにして与えられるかや、その問題の最適解の存在性定理についてまとめた。

---

*yutakasai@akita-pu.ac.jp
†yutaka@akita-pu.ac.jp
‡y-araya@akita-pu.ac.jp

2 空間と定義の設定

n 次元実数空間 $\mathbb{R}^n$ 上のＤＣ計画問題を

$$(\text{DCP}) \qquad \begin{array}{cc} \min & f(x) \\ \text{subject to} & x \in G := G_1 \setminus G_2 \end{array}$$

ただし、目的関数 $f{:}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$、制約集合 G_1:閉凸集合、G_2:開凸集合 $G \neq \emptyset$ とする。一般に G_1、G_2 はある凸関数の不等式制約、例えば

$$G_1 = \{x \mid g_1(x) \leq 0, g_1\text{:凸関数}\}$$
$$G_2 = \{x \mid g_2(x) < 0, g_2\text{:凸関数}\}$$

のように与えられる。

ここで、(DCP) の制約条件がある制御変数によって変化する場合について考える。すなわち、制約条件を定める変数のある空間を位相空間 Y とし、$y \in Y$ で与えられる n 次元実数空間 $\mathbb{R}^n$ 上のＤＣ計画問題を

$$(\text{DCP})_y \qquad \begin{array}{cc} \min & f(x) \\ \text{subject to} & x \in G(y) := G_1(y) \setminus G_2(y) \end{array}$$

ただし、目的関数 $f{:}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$、制約集合値写像 $G_1, G_2{:}Y \to 2^{\mathbb{R}^n}$、$G_1(\cdot)$:閉凸集合 $G_2(\cdot)$:開凸集合 $G(\cdot) \neq \emptyset$ とする。

集合値写像 F の像 $F(\cdot)$ が開 (閉、有界、凸) 集合であるとき、F は開 (閉、有界、凸) 値であるという。また、集合値写像 F の像 $F(\cdot)$ の補集合 $\{F(\cdot)\}^c$ を像とする集合値写像（以下、F の補集合値写像）F^c を $F_2(\cdot)^c := \{F(\cdot)\}^c$ と書くこととする。このとき、$G(\cdot)$ は

$$\begin{aligned} G(\cdot) &:= G_1(\cdot) \setminus G_2(\cdot) \qquad (1) \\ &= G_1(\cdot) \cap G_2^c(\cdot) \qquad (2) \end{aligned}$$

と書ける。

変数 y と $(\text{DCP})_y$ の最適値は次の $\bar{\phi}{:}Y \to \bar{\mathbb{R}}$ と G の合成写像によって表される:

$$\bar{\phi}(G(\cdot)) := \inf \{f(x) \mid x \in G(\cdot)\}.$$

本稿で集合値写像の連続性を論じるにあたり、点または集合の開近傍族のようなものを次のように定める。

定義 2.1 (開近傍族) 位相空間 Y 上の点 x, 集合 A に対して、

$$\mathcal{N}_Y(x) := \{W \subset Y \mid x \in W = \operatorname{int} W\},$$
$$\mathcal{N}_Y^u(A) := \{W \subset Y \mid A \subset W = \operatorname{int} W\},$$
$$\mathcal{N}_Y^l(A) := \{W \subset Y \mid A \cap W \neq \emptyset, W = \operatorname{int} W\}.$$

集合の開近傍族$\mathcal{N}_Y^u$と$\mathcal{N}_Y^l$ は集合値写像における次の2種類の連続性の定義で、関数の連続性における近傍のように用いられている。

定義 2.2 (連続性 (集合値写像), [2]) 集合値写像$G : Y \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$について、

(i) Gが$\bar{y} \in Y$で *upper-continuous* であるとは、$\forall W \in \mathcal{N}_X^u(G(\bar{y}))$, $\exists U \in \mathcal{N}_Y(\bar{y})$ such that

$$W \in \mathcal{N}_X^u(G(y)) \quad \forall y \in U$$

である。

(ii) Gが$\bar{y} \in Y$で *lower-continuous* であるとは、$\forall W \in \mathcal{N}_X^l(G(\bar{y}))$, $\exists U \in \mathcal{N}_Y(\bar{y})$ such that

$$W \in \mathcal{N}_X^l(G(y)) \quad \forall y \in U$$

である。

$\forall \bar{y} \in Y$で成り立つとき、それぞれ単に *upper-continuous,lower-continuous* と呼ぶ。

3 $(\mathbf{DCP})_y$の下半連続性

集合値写像の値域 (制約集合の空間) が$\mathbb{R}^n$である場合、集合値写像とその補集合値写像の連続性について次の対称性がいえる。

命題 3.1 (補集合値写像の連続性) GをY上の集合値写像とする。

(i) Gが$\bar{y}$で upper-continuous ならば、G^cは$\bar{y}$で lower-continuous である。

(ii) Gを開凸値な集合値写像で、$Y \to 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \{\emptyset\}$とする。このとき、$G$が$\bar{y} \in Y$で有界値かつ lower-continuous ならば、G^cは$\bar{y}$で upper-continuous である。

この命題3.1の (ii) を利用して次の定理が得られる。

定理 3.2 ($(\mathbf{DCP})_y$の最適解の下半連続性（齋藤、木村、荒谷）) $(\mathrm{DCP})_y$において、fが下半連続、G_1が upper-continuous（かつ閉値)、G_2が lower-continuous かつ有界（開凸）値、$G(\cdot) \neq \emptyset$ならば、$\bar{\phi} \circ G$はY上で下半連続。

例 3.3 (定理 3.2 の$Y = \mathbb{R}$, $n = 1$のときの例) $G_1(y) := [1, 5]$, $g(y) := e^y$, $G_2(g(y)) :=]\max(2, 4 - 2g(y)), 4 + g(y)[$, $f(x) := (x - 4)^2$ について、

$$\min\{f(x) \mid x \in G(y) := G_1(y) \setminus G_2\}$$

を考える。制約条件は定区間 $G_1 = [0,5]$ の点 4 を中心に時間 y とともに虫食いが広がるような変化をする（図 1)。

このとき、G_1, G_2, f は定理 3.2 の仮定を十分に満たしており、最適値

$$\bar{\phi}(G(y)) = \begin{cases} e^{2y} & y \leq 0 \\ 4 & \text{otherwise} \end{cases}$$

は下半連続関数となる。

ここで、上の例の g を $g(y) := y - \lfloor y \rfloor$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数) に置き換えてみる。G_2 は y の増加による広がりを下半連続（不連続）にリセットし、周期的な変化をする。このとき、G_2 は lower-continuous 集合値写像であるが、f の最適値

$$\bar{\phi}(G(y)) = g(y)^2$$

は（$g(y)$ が下半連続なので）やはり下半連続となっていることがわかる。

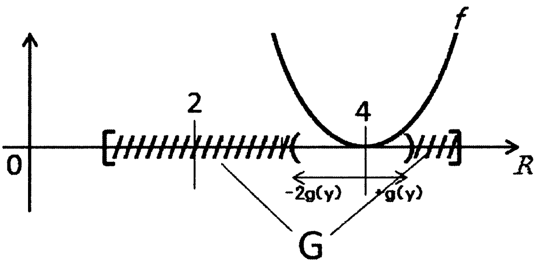

図 1: 例 3.3 の様子

4 下半連続性の保証と利用

本節では前節の定理 3.2 の周辺について、１．仮定の連続性がどのようなときに現れるか２．定理 3.2 から導かれる最適解の存在定理の二つを紹介する。

4.1 連続関数の逆写像と upper-continuouity について

G_1 の「upper-continuous（かつ閉値)」という条件について見る。集合値写像の upper-continuity と関数の連続性を結ぶ次の命題がある。

命題 4.1 ベクトル値写像 $v : Y \to \mathbb{R}^n$ について、v がコンパクト集合 $D \subset Y$ 上で連続ならば、逆写像 v^{-1} は $v(D)$ 上で upper-continuous である。ただし、任意の $x \in v(D)$ に対して $v^{-1}(x) := \{y \in Y \mid v(y) = x\}$ とする。

証明 （ここでは開近傍族 $\mathcal{N}_Y^u$ を D についての相対位相の開近傍族として扱う。）$\forall \bar{x} \in v(D), W \in \mathcal{N}_Y^u(v^{-1}(\bar{x}))$ について、$D \setminus W$ はコンパクト集合である。$D \setminus W = \emptyset$ ならば $D \subset W$ は明らかである。

$D \setminus W \neq \emptyset$ のとき、$\epsilon := \frac{1}{2}\min_{y\in D\setminus W}\|\bar{x} - v(y)\| > 0$ がとれる。$\bar{x}$ の ϵ–近傍 $U := \{x \in v(D) \mid \|\bar{x} - x\| < \epsilon\}$ をとると、$U \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(\bar{x})$ かつ $W \in \mathcal{N}_Y^u(v^{-1}(x))$ $(\forall x \in U)$ である。なぜならば、$\forall x \in U, y \in v^{-1}(x)$ について、$v(y) = x$ であり、

$$\begin{aligned}\|\bar{x} - v(y)\| &= \|\bar{x} - x\| \\ &< \epsilon \\ &< \min_{z\in D\setminus W}\|\bar{x} - v(z)\|\end{aligned}$$

であるため、$y \notin D \setminus W$、すなわち $y \in W$。したがって、$v^{-1}(x) \subset W$ $(\forall x \in U)$。 ∎

このことと定理 3.2 においては G_1 に凸値性を必要としないことから、連続なベクトル値写像の逆写像を G_1 として用いても下半連続性が保証されることがわかる。（連続写像において、一点集合は閉集合であるため逆像は閉集合になるため閉値性も保証される。）つまり、

$$(\mathrm{P})_y \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{subject to} & v(x) = y \\ & x \notin G_2(y) \end{array}$$

ただし、目的関数 $f{:}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$、制約写像 $v{:}\mathbb{R}^n \to Y$ かつ連続、制約集合値写像 $G_2{:}Y \to 2^{\mathbb{R}^n}$、$G_2(\cdot)$:開凸集合を一般形に持つ問題 $(\mathrm{P})_y$ について、f と G_2 が定理 3.2 の条件を満たせば、同定理より最適値の下半連続性を導出できる。

なお、関数の逆写像は一般に lower-continuous 性をもたない（図 2)。

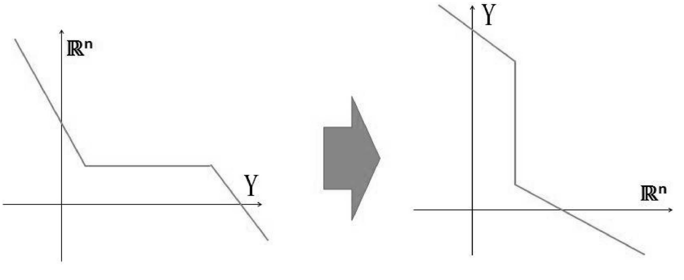

図 2: 単純な連続関数とその逆写像のグラフ

4.2 $(\mathrm{DCP})_y$ の最適解の存在定理

最後に、定理 3.2 を利用して $(\mathrm{DCP})_y$ の最適解の存在定理を紹介する。

定理 4.2 ((DCP)$_y$ の解の存在) (DCP)$_y$ に対して定理 3.2 と同様の条件を仮定する。さらに集合値写像 G の定義域 $D \subset Y$ がコンパクトかつ $G_1(\cdot)$ が有界集合ならば、

$$\min_{y \in D}\{(\mathrm{DCP})_y \text{ の最適値 }\} \in \mathbb{R}$$

である。

即ち、定義域 Y がコンパクトで G もコンパクトかつ $\bar{\phi} \circ G$ が下半連続ならば最適解が存在する、という定理である。

5 おわりに

本研究では、制御 DC 計画問題 (DCP)$_y$ について、最適値の下半連続性を述べた定理 3.2 の周辺を考察した。また、仮定となる制約集合値写像の upper-continuouiy と連続関数の逆写像との関連性を示し、等式制約を持つ差集合問題 (P)$_y$ への適用可能性を示し、また導かれた下半連続性の利用先として、解の存在定理を示した。

参考文献

[1] R. Horst, P. M. Pardalos, N. V. Thoai, *Introduction to Global Optimization 2nd Edition*, Springer, Dordrecht, 2000.

[2] A. A. Khan, C. Tammer, C. Zalinescu, *Set-valued optimization, An introduction with applications*, Springer-Verlags, Berlin Heidelberg, 2015.

[3] T. Lipp, S. Boyd, *Variations and extension of the convex-concave procedure*, Optimization and Engineering, Springer, 2016.