数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 134-140

縮小写像の離散不動点定理と純戦略均衡
Discrete fixed point theorems for contraction mappings and pure-strategy equilibria

川崎英文 *
HIDEFUMI KAWASAKI †
九州大学大学院数理学研究院
FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY

Abstract

In [1], the author presented a discrete fixed point theorem for contraction mappings as a corollary of Richard-Shih-Dong's discrete fixed point theorem for local contraction mappings [2]. He also applied the former theorem to an n-person strategic game. However it didn't fully utilize the advantage of the latter theorem. In this paper we directly apply the latter theorem to the n-person strategic game.

1 はじめに

著者は [1] において，Richard-Shih-Dong の離散不動点定理の系として整数区間上の縮小写像に対する離散不動点定理を与え，それを n 人戦略形ゲームの最適応答写像に適用することにより，唯一の純戦略 Nash 均衡をもつゲームを提示した．しかしながら，その手法は Richard-Shih-Dong の離散不動点定理の長所を十分に生かしていなかった．本稿では Richard-Shih-Dong の離散不動点定理を直接 n 人戦略形ゲームに適用することを図る．

2 Robert の離散不動点定理

ブール代数の直積 $\{0,1\}^n$ を**ブール束**という．Robert [3, 1986] はブール束からそれ自身への縮小写像に対して離散不動点定理を与えた．本節では Robert の離散不動点定理を紹介する．

ブール代数 $\{0,1\}$ 上の行列を**ブール行列**とよび，行列の和や積は通常の計算方法である．ブール束 $\{0,1\}^n$ 上の写像 $f=(f_1,\dots,f_n)$ の各成分 f_i が変数 x_j に依存するかどうかを表したものが**関係行列** $B(f):=(b_{ij})$ である．すなわち，

$$b_{ij} := \begin{cases} 0, & f_i(x_j,x_{-j}) = f_i(y_j,x_{-j}) \quad \forall x \in \{0,1\}^n,\ \forall y_j \in \{0,1\}. \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

*kawasaki@math.kyushu-u.ac.jp
†本研究は JSPS 科研費 JP16K05278 の助成を受けている．

$0,1$ 要素からなる n 次行列 $B=(b_{ij})$ に対して，点集合を $\{1,\ldots,n\}$ とし, $b_{ij}=1$ のとき i から j へ有向枝を引いて得られる有向グラフを $\Gamma(B)$ で表す．$\Gamma(B(f))$ を f の**連結グラフ**とよぶ．つまり，f_i が x_j に依存するとき i から j へ有向枝を引いたものが連結グラフである．

縮小という言葉が意味をもつには，距離のようなものが必要である．$x,y\in\{0,1\}^n$ に対して，縦ベクトルを $d(x,y):=(|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|)^T\in\{0,1\}^n$ で定義する．このとき，任意の $x,y\in\{0,1\}^n$ に対し $d(f(x),f(y))\le B(f)d(x,y)$ が成立する．

ブール行列 $B=(b_{ij})$ に対して，非零ベクトル $u\in\{0,1\}^n$ と $\lambda\in\{0,1\}$ が $Bu=\lambda u$ をみたすとき，u を**ブール固有ベクトル**，λ を**ブール固有値**とよぶ．最大固有値を**ブールスペクトル半径**とよび $\rho(B)$ と書く．ブール行列は固有値をもち，$B\le C$ ならば $\rho(B)\le\rho(C)$ が成立する．

定理 1

([3]) ブール行列 $B=(b_{ij})$ について，以下の条件は同値である．
(a) $\rho(B)=0$. (b) どの主小行列も零行をもつ． (c) 置換行列 P が存在して P^TBP は強下三角行列になる． (d) ある $k\le n$ があって $B^k=0$. (e) 任意の巡回置換 $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ に対し，$b_{i_1i_2}b_{i_2i_3}\cdots b_{i_ki_1}=0$.

ブール束 $\{0,1\}^n$ 上の写像 f は，$\rho(B)=0$ なるブール行列が存在して，任意の $x,y\in\{0,1\}^n$ に対して $d(f(x),f(y))\le Bd(x,y)$ が成立するとき，**縮小写像**とよばれる．f が縮小写像であるための必要十分条件は $\rho(B(f))=0$ である．

定理 2

（Robert の離散不動点定理）ブール束 $\{0,1\}^n$ 上の縮小写像 f は唯一の不動点をもつ．その不動点を a とすると，ある $k\le n$ が存在して $f^k(x)\equiv a$.

3 Shih-Dong の離散不動点定理

Shih-Dong [4, 2005] はブール束 $\{0,1\}^n$ 上の写像 $f=(f_1,\ldots,f_n)$ に対し，**離散微分**（discrete derivative）$f'(x):=(f_{ij}(x))$ を (2) で定義し，すべての点 $x\in\{0,1\}^n$ で $\rho(f'(x))=0$ が成立するとき，f を**局所縮小写像**とよんだ．ただし，$\bar{x}^j$ は x の第 j 成分 x_j をその反転 $\bar{x}_j$ で置き換えた点を表す．また，$V_x:=\{\bar{x}_j\mid j=1,\ldots,n\}$ を x の直近傍とよぶ．

$$f_{ij}(x):=\begin{cases}0, & f_i(\bar{x}^j)=f_i(x),\\ 1, & f_i(\bar{x}^j)\neq f_i(x).\end{cases} \tag{2}$$

補題 1

(1) $\displaystyle\max_{x\in\{0,1\}^n} f'(x)=B(f)$. (2) 縮小写像は局所縮小写像である．(3) 任意の $x\in\{0,1\}^n$ と $y\in V_x$ に対して $d(f(x),f(y))=f'(x)d(x,y)$.

定理 3

（Shih-Dong [4]）局所縮小写像は唯一の不動点をもつ．

定理 2 は大域的な仮定 $\rho(B(f))=0$ から大域的な結論「唯一の不動点の存在」を導いたものであるが，定理 3 は局所的な条件 $\rho(f'(x))\equiv 0$ から大域的な結論を導いた深い結果である．

4 Richard-Shih-Dongの離散不動点定理

X_i $(i = 1, \ldots n)$ を整数の有限区間で $|X_i| \geq 2$ なるものとし，$X := X_1 \times \cdots \times X_n$ を整数区間とよぶ．Richard [2, 2008] はShih-Dongの離散不動点定理を整数区間に拡張した．$x \in X$ の**直近傍**を $V_x := \{x \pm e_i \mid i = 1, \ldots, n\} \cap X$ で定義する．整数区間 X 上の写像 f に対しても (1) で関係行列 $B(f)$ を定義し，$\rho(B(f)) = 0$ を満たすとき**縮小写像**とよぶ．ブール束の場合の**離散微分** (2) の自然な拡張として $f'[x, v] := (f_{ij}[x, v])_{i,j}$ を次の様に定義する．

$$f_{ij}[x, v] := \begin{cases} 0, & f_i(x + v_j e_j) = f_i(x) \\ 1, & f_i(x + v_j e_j) \neq f_i(x). \end{cases} \tag{3}$$

ただし，$v \in \{\pm 1\}^n$ は $x + v$ が X に留まるようなベクトルである．また，離散微分より精密な**離散ヤコビ行列**（discrete Jacobian matrix）$f'(x, v) := (f_{ij}(x, v))_{i,j}$ を次式で定義する．

$$f_{ij}(x, v) := \begin{cases} 0, & f_i(x) \text{ と } f_i(x + v_j e_j) \text{ は } x_i + \frac{v_i}{2} \text{ に関して同じ側にある} \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

すなわち，$f_{ij}(x, v)$ が 0 になるのは次のときである．

$$\begin{array}{ll} v_j = 1, & (f_i(x) \leq x_i,\ f_i(x + e_j) \leq x_i) \text{ or } (f_i(x) > x_i,\ f_i(x + e_j) > x_i), \\ v_j = -1, & (f_i(x) \geq x_i,\ f_i(x + e_j) \geq x_i) \text{ or } (f_i(x) < x_i,\ f_i(x + e_j) < x_i). \end{array} \tag{5}$$

(6) を満たす f を**局所縮小写像**，(7) を満たすものを**広義局所縮小写像**とよぶ．

$$\rho(f'[x, v]) = 0 \qquad \text{if } x + v \in X. \tag{6}$$

$$\rho(f'(x, v)) = 0 \qquad \text{if } x + v \in X, \tag{7}$$

補題 2

離散ヤコビ行列 $f'(x, v)$, 離散微分 $f'[x, v]$, 関係行列 $B(f) = (b_{ij})$ について以下のことが成り立つ．

(a) $f_{ij}(x, v) \leq f_{ij}[x, v] \leq b_{ij} \quad \forall i, j.$

(b) 縮小写像 $\Rightarrow$ 局所縮小写像 $\Rightarrow$ 広義局所縮小写像．

(c) $B(f) = \max\limits_{x, x+v \in X} f'[x, v] \geq \max\limits_{x, x+v \in X} f'(x, v).$

(d) f がブール束 $\{0, 1\}^n$ 上の写像のとき，$x + v \in \{0, 1\}^n$ を満たす $v \in \{\pm 1\}$ は x に対して一意に決まり，$f'(x, v)$, $f'[x, v]$, $f'(x)$ は一致する．

Richard [2] は次の定理 4 を帰納法で証明した．その最初のステップ $|X_1| = \cdots = |X_n| = 2$ がShih-Dongの離散不動点定理である．

定理 4

（Richard-Shih-Dongの離散不動点定理）広義局所縮小写像は唯一の不動点をもつ．

例 1

図 1 (1) で定義される $\{0, 1, 2\}^2$ 上の写像 f は以下の性質をもつ．

1. 広義局所縮小写像である． 2. 局所縮小写像ではない．
3. 不動点以外のどの点 x^0 から始めても，点列 $x^{k+1} = f(x^k)$ は不動点に収束しない．

4. Freudenthal 分割で整数格子を三角形分割したとき，方向保存条件も総和方向保存条件も満たさない．
5. f は半順序 $\leq$ に関して単調でない．

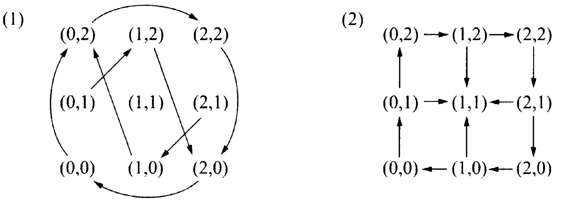

図 1: (1): 写像 f. $f(1,1)=(1,1)$. (2): 次頁で定義する非同期状態グラフ $A(f)$.

写像 f の**非同期状態グラフ**を以下のように定義し $A(f)$ で表す．まず，点集合は X とする．点 x が不動点でなければ $f_i(x) \neq x_i$ なる成分があるので，

1. $f_i(x)$ が現在地 x_i より大きければ x から $x+e_i$ に有向枝を引く．
2. $f_i(x)$ が現在地 x_i より小さければ x から $x-e_i$ に有向枝を引く．

補題 3
写像 f，g の非同期状態グラフが等しければ，それらの離散ヤコビ行列は等しい．

証明. $A(f)=A(g)$ ならば，(8) が成立し，それぞれの対偶をとることにより (9) も成立する．

$$x_i < f_i(x) \;\Leftrightarrow\; x_i < g_i(x), \quad x_i > f_i(x) \;\Leftrightarrow\; x_i > g_i(x). \tag{8}$$

$$x_i \geq f_i(x) \;\Leftrightarrow\; x_i \geq g_i(x), \quad x_i \leq f_i(x) \;\Leftrightarrow\; x_i \leq g_i(x). \tag{9}$$

一方，(5) で $f_{ij}(x,v)=0$ と同値な条件を与えたが，(8)(9) により，それは $g_{ij}(x,v)=0$ と同値である．故に $f'(x,v)=g'(x,v)$. ∎

例 2
図 2 (1) で定義される $\{0,1,2\}^2$ 上の写像 g は以下の性質をもつ．

1. 広義局所縮小写像である． 2. 局所縮小写像ではない．
3. 不動点以外のどの点 x^0 から始めても，点列 $x^{k+1}=g(x^k)$ は不動点に収束しない．
4. f は半順序 $\leq$ に関して単調でない．
5. $\displaystyle\max_{x,x+v\in X} g'(x,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \max_{x,x+v\in X} g'[x,v] = B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$
6. 不等式 $d(g(x),g(y)) \leq B(g)d(x,y)$ は成立しない．

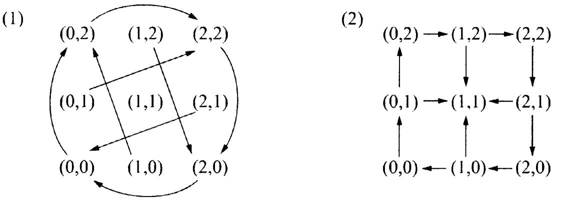

図 2: (1): 写像 g. $g(1,1)=(1,1)$. (2): 非同期状態グラフ $A(g)$.

5 縮小写像の離散不動点定理

定理 4 を用いて Robert の離散不動点定理を整数区間 X に拡張できる.

定理 5
([1]) 整数区間 X 上の写像 $f=(f_1,\ldots,f_n)$ について,

(a) f が縮小写像であるための必要十分条件は，ある置換 σ が存在して，どの $i=1,\ldots n$ についても $f_{\sigma(i)}$ が $x_{\sigma(j)}$ $(j\geq i)$ に依存しないことである. (このとき $f_{\sigma(1)}$ は定数関数である.)

(b) 縮小写像は唯一の不動点をもち，任意の初期点 $x^0\in X$ に対し，$x^k=f(x^{k-1})$ は高々n ステップで不動点に収束する.

これを n 人戦略形ゲームに適用しよう．戦略 $x_{-i}\in X_{-i}=\prod_{j\neq i}X_j$ に対するプレイヤー i の最適応答集合を $F_i(x_{-i})$ とする.

定理 6
([1]) 任意の i に対して，ある $f_i(x_{-i})\in F_i(x_{-i})$ が i より若い番号のプレイヤーの戦略にしか依存しないならば，純戦略均衡が存在する．また，$F_i(x_{-i})$ が一点集合の場合は，純戦略均衡は一意に定まる.

6 局所縮小な最適応答写像

定理 5 や定理 6 は Richard-Shih-Dong の離散不動点定理の局所的な仮定を十分に生かしていない．つまり，局所的な条件 $\rho(f'(x,v))=0$ の代わりに大域的な条件 $\rho(B(f))=0$ を仮定している．本節では，n 人戦略形ゲームの最適応答写像 f について局所縮小写像を詳しく調べる.

定理 7
f が局所縮小写像であるための必要十分条件は，$x+v\in X$ なる任意の $x\in X$, $v\in\{\pm1\}^n$ と任意の巡回置換 $\sigma=(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ に対し,

$$\prod_{j=1}^{k}\left\{f_{i_j}(x_{-i_j}+v_{i_{j+1}}e_{i_{j+1}})-f_{i_j}(x_{-i_j})\right\}=0 \tag{10}$$

が成立することである．ただし，$i_{k+1}=i_1$ とし，f_i の値に影響しない変数 x_i は省略した.

また，f が局所縮小写像ならば，任意の $a\in X$ と任意の i,j に対し，$f_i(x_j,a_{-i-j})$ と $f_j(x_i,,a_{-i-j})$ のどちらかは定数関数である．ただし，a_{-i-j} は a から第 i 成分と第 j 成分を除いた点を表す.

系 1
任意の $a \in X$ と任意の巡回置換 $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ に対し $f_{i_j}(x_{i_{j+1}}, a_{-i_j - i_{j+1}})$　$(j = 1, \ldots, k)$ のどれかが定数関数ならば，f は局所縮小写像である．ただし，$i_{k+1} = i_1$ とする．このとき唯一の純戦略 Nash 均衡が存在する．

系 2
2 人ゲームの最適応答写像 $f = (f_1, f_2)$ について以下の条件は同値である．
(a) f は縮小写像である．(b) f は局所縮小写像である．(c) f は広義縮小写像である．(d) $f_1(x_2)$, $f_2(x_1)$ の少なくとも一方は定数関数である．

系 3
3 人ゲームの最適応答写像 f が局所縮小写像であるための必要十分条件は，$x + v \in X$ を満たす任意の $x \in X, v \in \{\pm 1\}^3$ と任意の $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ に対し，

$$f_i(x_j + v_j, x_k) - f_i(x_j, x_k),\ f_j(x_k + v_k, x_i) - f_j(x_k, x_i),\ f_k(x_i + v_i, x_j) - f_k(x_i, x_j)$$

のどれかは 0 であり，さらに，$f_i(x_j + v_j, x_k) - f_i(x_j, x_k)$, $f_j(x_i + v_i, x_k) - f_j(x_i, x_k)$ のどちらかが 0 になることである．また，任意の $a \in X$ に対し $f_i(x_j, a_k)$, $f_j(x_k, a_i)$, $f_k(x_i, a_j)$ のいずれかが定数関数で，$f_i(x_j, a_k)$, $f_j(x_i, a_k)$ のどちらかが定数関数ならば，f は局所縮小写像である．このとき唯一の純戦略 Nash 均衡が存在する．

図 3 で与えられる 3 人ゲームの最適応答写像 f は局所縮小写像であるが，縮小写像ではない．

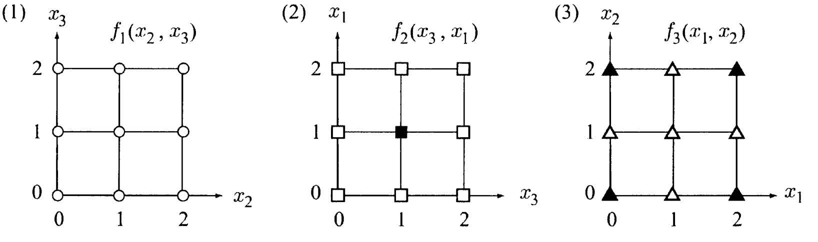

図 3: 3 人ゲームの最適応答写像．f_1 は定数関数で，$f_2(\blacksquare) \neq f_2(\square)$. $f_3(\blacktriangle) \neq f_3(\triangle)$.

図 4 で与えられた 3 人ゲームの最適応答写像 f は f_1, f_2, f_3 の何れも定数関数でない局所縮小写像であるが，縮小写像ではない．

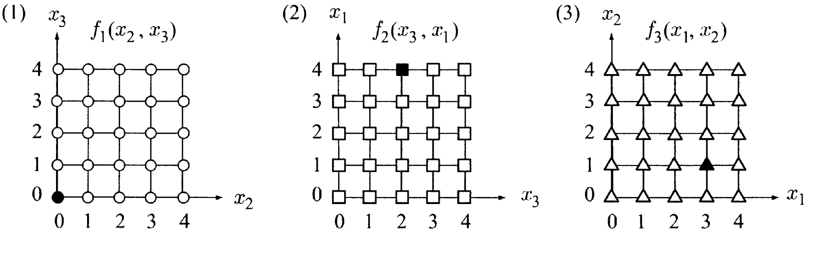

図 4: 3 人ゲームの最適応答写像．$f_1(\bullet) \neq f_1(\circ)$, $f_2(\blacksquare) \neq f_2(\square)$. $f_3(\blacktriangle) \neq f_3(\triangle)$.

参 考文献

[1] H. Kawasaki, A. Kira, and S. Kira, An application of a discrete fixed point theorem to a game in expansive form, *Asia-Pacific J. of Operational Research*, **30**, 1340013 (2013).

[2] A. Richard, An extension of the Shih-Dong's combinatorial fixed point theorem, *Advances in Appl. Math.*, **41** (2008) 620–627.

[3] F. Robert, *Discrete Iterations: A Metric Study*, Springer, Berlin, (1986).

[4] M.-H. Shih and J.-L. Dong, A combinatorial analogue of the Jacobian problem in automata networks, *Advances in Appl. Math.*, **34** (2005) 30–46.