数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 166-172

AHP・ANPの一対比較行列に対する統計的解析手法の検討

Sumito Kurata, Etsuo Hamada

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1 序

1.1 本研究の概要

Saaty ([10], [11]) によって確立された階層分析法 (Analytic Hierarchy Process; AHP) 並びにネットワーク分析法 (Analytic Network Process; ANP) は, 特定の評価対象が, 別の評価対象と一対一で比較したときに「どの程度 (何倍程度) 好いか」という問いに基づいて構築される一対比較行列 (Pairwise Comparison Matrix; PCM) に基づいて解析が行われる. PCM から評価対象全体の「比」を抽出する方法としては, 固有値法や幾何平均法が代表的である. 本稿では, 多項分布を用いて意思決定者の回答確率に関する統計的なモデルを構築するとともに, そのモデルに対する優先度の推定を, 頑健性を持ったダイバージェンスによって行うことを試みる.

評価を行い, 相対的な重みを与えるべき対象を, $O_1, \ldots, O_M$ で表す. この各対象 O_m $(m = 1, \ldots, M)$ は, π_m という好ましさ, 優秀さ, 重要さの度合い (優先度) を持っており, 未知のベクトル $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_M)^T$ に推定値を与えることが, 一対比較行列解析の目的である. 問題は相対比較であり, $\boldsymbol{\pi}$ の各成分の値そのものよりも, その比にこそ興味がある為, 定数倍についての不定性は認められる. AHP, ANP 関連の研究の多くでは, その後の扱い易さや捉え易さを考慮し, 制約 $\pi_1 + \cdots + \pi_M = 1$ を与える, 全てを自然数で表現するように補正する, 或いは一つの優先度を予め定数で固定してから解析を行う, 等の調整が行われている.

ここで, 観測された一対比較行列を $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{i,j}$ で表す. 各成分 $a_{i,j}$ は非負値で, 対象 O_i が O_j よりも何倍好ましいかを示しており, 1 のときは同等を意味する. 猶, この設定上 $a_{i,i} = 1$, $a_{j,i} = 1/a_{i,j}$ という制約が必然的に置かれる. この PCM は, 意思決定者に対する質問の回答によって作られるが, 回答時に与えられる選択肢は「何倍」という数字ではなく「～は～よりもとても好い」「少し悪い」等の言葉によって与えられ, その中から選択させ, 後でそれを数値に変換することが多い.

選択肢集合 $\mathcal{C}$ は研究によって異なるが, よく用いられるものとしては, 「同等」の 1 の他に「～は～よりも好い」を「少し好い (3)」「好い (5)」「とても好い (7)」のように分け, 逆数で「悪い」を表現した

$$\mathcal{C}_7 \;=\; \{1/7, 1/5, 1/3, 1, 3, 5, 7\}$$

という七段階のものや, そこに「極端に (9, 1/9)」を加えて九段階にした集合, 更にはそれらをより細分化したものがよく用いられる.

また, 二つの非負値 ψ, ω を用いて, 冪乗の形で集合を定義した

$$\mathcal{C}_{(\psi,\omega)} \;=\; \{\psi^p \mid p = -\omega, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \omega\}$$

という形も使用されている. この (ψ, ω) には例えば $(2, 3)$ が用いられ, 2^1, 2^2, 2^3 にはそれぞれ「少し好い」「好い」「とても好い」が対応する. これは, 対数を取ったときに選択肢間が等間隔になるという特長を有している. 本稿中では, 選択肢として $\mathcal{C}_{(2,3)}$ を用いることとする.

1.2 従来の解析手法

未知である「真の優先度ベクトル」$\boldsymbol{\pi}$ に対して, もしも機械的な一対比較が成された場合, 一対比較行列は

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & \pi_1/\pi_2 & \cdots & \pi_1/\pi_M \\ \pi_2/\pi_1 & 1 & \cdots & \pi_2/\pi_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_M/\pi_1 & \pi_M/\pi_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

という形で観測されることになる. このような状態は完全整合と呼ばれ, 理想的な状態とされる.

優先度推定の代表的な手法である固有値法 (EV 法) は, この完全整合状態の行列 $\bar{\boldsymbol{A}}$ に対して

$$\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\pi} = M\boldsymbol{\pi}$$

が成り立っていることを応用し, 観測された PCM について固有値問題を解き, その最大固有値に対応する固有ベクトルを推定値として採用する.

また, この固有値問題に類似した手法としては, pairwise proportion matrix (PPM):

$$\boldsymbol{B} = (b_{i,j})_{i,j=1,\ldots,M} = \left(\frac{a_{i,j}}{1+a_{i,j}}\right)_{i,j}$$

に対して, $\boldsymbol{B}+\mathrm{diag}(\boldsymbol{B}\,\mathbf{1}_M)$ の最大固有値に対応する固有ベクトルで推定する PPM 法が, Lipovetsky and Conklin (2002) [9] によって提案されている. 但し, $\mathbf{1}_M$ は 1 だけを M 個並べたベクトルを意味する. この手法 (PPM 法) は経験的に, 非整合的な値が混ざった行列に対して EV 法よりも良い推定が出来るとされている.

これらの固有値問題的な手法は, 完全整合状態のときの構造に基づいていると捉えられるが, 意思決定を行うのが人間である以上, このような形が得られることは一般的でなく, 実際的には整合性がよく取れていない場合が多い.

固有値に関連する手法以外では, 幾何平均法 (GM 法, e.g. Saaty and Vargas (1984) [13]) が有名である. これは一対比較行列の中で, 対象 O_m に対応する行を取り出し, その幾何平均を求め, その後優先度の和を 1 に調整した

$$\frac{\sqrt[M]{a_{m,1}\,a_{m,2}\cdots a_{m,M}}}{\sum_{j=1}^{M}\sqrt[M]{a_{j,1}\,a_{j,2}\cdots a_{j,M}}}$$

を, π_m $(m=1,\ldots,M)$ の推定値とするという手法である.

この手法は, 観測された一対比較値 $a_{i,j}$ が,

$$a_{i,j} = \frac{\pi_i}{\pi_j}\,e_{i,j} \quad (i<j) \tag{2}$$

という構造で生じていると仮定し, 誤差部分 $e_{i,j}$ の自然対数を取ったときの二乗和

$$\sum_{i<j}\sum (\log e_{i,j})^2 = \sum_{i<j}\sum \left(\log a_{i,j} - \log\frac{\pi_i}{\pi_j}\right)^2$$

を最小化する推定 (最小対数二乗法) に対応している.

また, これに類似した方法として,

$$\frac{\frac{1}{a_{m,1}}+\frac{1}{a_{m,2}}+\cdots+\frac{1}{a_{m,M}}}{\sum_{j=1}^{M}\left(\frac{1}{a_{j,1}}+\frac{1}{a_{j,2}}+\cdots+\frac{1}{a_{j,M}}\right)}.$$

によって推定を行う, 調和平均法 (HM 法) も提言されている (e.g. 加藤 (2013) [14]).

Basak (1989, 2002) [1], [2] は, GM 法の基盤にもなっている形 (2) について, $e_{i,j}$ $(i<j)$ が, 期待値が 1 である確率分布に独立に従っていると仮定した構造を用意し, $\boldsymbol{\pi}$ を未知母数として最尤推定法 (MLE) によって推定した.

特に, 対数正規分布 $e_{i,j} \overset{i.i.d.}{\sim} L_N\left(0\,,\,\sigma^2\right)$ を想定した場合, この最尤推定量は GM 法の結果と定数倍の不定性を除いて等しくなる.

猶, AHP や ANP での一対比較は, 一人の意思決定者 (又はグループ) によって一つの PCM が構築されるというのが基本で, 複数人が個々に PCM を作成した場合は, グループ討議によって PCM を作成するか, それらを幾何平均等によって統合するかして, 一枚化するという策が講じられるが, この最尤推定に基づいた手法は, 複数の決定者 (回答者) がある場合も, 個々の回答者が独立に意思決定を行っていることを想定すれば問題なく解析を行うことが出来る. 寧ろ, 漸近論を満足に適用する為にはある程度の標本数が望まれる. 以降, 回答者は $N\,(\geq 1)$ 人いるとし, $n\,(=1\,,\,\ldots\,,\,N)$ 番目の回答者が作成した PCM を, $\boldsymbol{A}^{(n)}=(a_{i,j}^{(n)})_{i,j}$ によって表す.

2　離散分布を用いた回答模型 (DPM 法)

GM 法や Basak の推定手法では式 (2) のように, 真の優先度比 π_i/π_j に誤差が掛かった形で $a_{i,j}$ の観測値を想定しているが, この導出過程に於いて, その誤差は連続であることを暗に仮定している. 一方で, 観測される $a_{i,j}$ は, 幾つかの選択肢の中から選ばれた離散値であることが大抵であり, 仮定と現実の観測との間には少なからず乖離がある. 完全な連続値か, それに近い, 即ち非常に細かい選択肢で回答させればその問題は解消されるが, 答えるのが人間である以上, あまりに細かい選択肢は回答者の負担にもなり, 複雑に過ぎる質問は得られたデータの信憑性も低下させてしまう懸念がある.

そこで本章では, それほど数が多くない選択肢の形式を念頭に置いて, 離散確率を用いて回答を表現するような, 離散確率モデル (discrete probabilistic model; DPM) を用いた方法 (Kurata and Hamada (2018b) [8]) 考える.

2.1　離散表現

先ず, 回答者に与えられる「少し悪い」「とても好い」といった各選択肢 $c\in\mathcal{C}$ が回答される確率 (頻度) は, 真の優先度比 π_i/π_j にどの程度近いのかによって決定されると想定する. 例えば, 真の比が「少し好い」に対応する数値であるならば, その選択肢が最も多く回答され, これに隣接する選択肢である「同等」と「好い」の確率が次いで高く, 逆に最も遠い選択肢である「とても悪い」の回答頻度はかなり低くなると予想出来る. このような観点でモデルを作るに当たっては, 選択肢間は等間隔であるべきなので, 本稿では $\mathcal{C}$ として, 対数を取ったときに等間隔になる $\mathcal{C}_{(\psi,\omega)}$ 型, 特に $\mathcal{C}_{(2,3)}$ を用いることとしている.

さて, $c \in \mathcal{C}$ の真の比との遠さに基づいて, 回答確率

$$p_{i,j}(c) \;=\; p_{i,j}(c \,|\, \pi_i \,,\, \pi_j) \;:=\; \mathbf{P}\left\{ c \text{ is answered} \;\middle|\; \text{given } \frac{\pi_i}{\pi_j} \right\} \tag{3}$$

が定義される. この表現には, 例えば

$$\tilde{p}^{e}_{i,j}(c) \;=\; \exp\left\{ -\left(\log c - \log \frac{\pi_i}{\pi_j} \right)^2 \right\}$$

が考えられる. これはこのままでは確率にならない (和が 1 にならない) ので, 和を分母に与えることで,

$$p_{i,j}(c) \;=\; \frac{\tilde{p}_{i,j}(c)}{\sum_{c' \in \mathcal{C}} \tilde{p}_{i,j}(c')} \qquad (c \,\in\, \mathcal{C})$$

のように確率化する.

2.2 優先度の統計的推定

ここで, N 人の回答者は独立に一対比較を行うとし, 各設問間にも独立性を想定すれば, このときの $a^{(1)}_{i,j}\,,\,\ldots\,,\,a^{(N)}_{i,j}$ $(i < j)$ の分布としては, 比較を行う対象 O_i, O_j によって真の優先度比が同じとは限らない為,

$$a^{(1)}_{i,j}\,,\,\ldots\,,\,a^{(N)}_{i,j} \;\overset{i.i.d.}{\sim}\; \text{Multinomial}\left(1\,,\,(p_{i,j}(c))_{c \in \mathcal{C}}\right) \qquad (i \,<\, j)$$

という, $M(M-1)/2$ 種類の異分布となる.

最尤法では, ここから尤度を計算し, それを最大化することで MLE を求める. 最尤法は, Kullback and Leibler (1951) [6] の統計的ダイバージェンス (KL-divergence) によって測った, データを発生させている真の分布とモデルとの乖離度を最小化するように母数を推定している, と捉えることが出来る.

統計的ダイバージェンスには他にも様々なものがあり, その中でも頑健性 (異常値の混入時に於ける精度の落とし難さ) に優れたものとして, Basu *et al.* (1998) [3], Ghosh and Basu (2013) [5] による, BHHJ-divergence family がある.

今回の設定下では, 任意の $\alpha \geq 0$ に対して,

$$d_\alpha \;=\; \begin{cases} \dfrac{2}{M\,(M-1)} \displaystyle\sum\sum_{i<j} \sum_{c \in \mathcal{C}} r_{i,j}(c) \log \frac{r_{i,j}(c)}{p_{i,j}(c)} & (\alpha \,=\, 0) \\ \dfrac{2}{M\,(M-1)} \displaystyle\sum\sum_{i<j} \sum_{c \in \mathcal{C}} \left\{ p_{i,j}(c)^{\alpha+1} - \frac{\alpha+1}{\alpha}\, p_{i,j}(c)^{\alpha}\, r_{i,j}(c) + \frac{1}{\alpha}\, r_{i,j}(c)^{\alpha+1} \right\} & (\alpha \,>\, 0) \end{cases} \tag{4}$$

で定義される. 但し, $r_{i,j}$ は $a^{(1)}_{i,j}\,,\,\ldots\,,\,a^{(N)}_{i,j}$ の持つ真の分布の確率関数とする. これは, KL-divergence を拡張したダイバージェンス族であり, α を 0 に近づけることで収束する. また, α を大きくすると推定時の漸近分散が増大することと引き換えに頑健性が強まると知られており, 母数推定の他, 適合度検定やモデル選択に応用されている (e.g. Basu *et al.* (1998) [3], Basu *et al.* (2013) [4], Kurata and Hamada (2018a) [7]).

このダイバージェンスから導かれる, 優先度推定時の最小化関数は, 経験分布によって $r_{i,j}$ を置き換えて, 推定に不要な部分を取り除いた,

$$H_0(\boldsymbol{\pi}) \;=\; -\frac{2}{N\,M\,(M-1)}\sum\sum_{i<j}\sum_{n=1}^{N}\log p_{i,j}(a_{i,j}^{(n)})$$

$$H_\alpha(\boldsymbol{\pi}) \;=\; \frac{2}{N\,M\,(M-1)}\sum\sum_{i<j}\sum_{n=1}^{N}\left\{\sum_{c\in\mathcal{C}}p_{i,j}(c)^{\alpha+1}-\frac{\alpha+1}{\alpha}\,p_{i,j}(a_{i,j}^{(n)})^{\alpha}\right\}$$

である $(\alpha>0)$. 以降, これらを最小化する優先度を $\hat{\boldsymbol{\pi}}_0$, $\hat{\boldsymbol{\pi}}_\alpha$ で表すこととする. 前者は最尤推定量に他ならない.

猶, 推定したい優先度ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ は常に π_i/π_j のような比の形で現れるので, 最小解は定数倍について無数に存在する. 一意性を確保するには, 従来の手法のように「優先度の和が 1 である」という制約を付けるか, どれか一つの優先度を定数で固定してから残りの $(M-1)$ 個を推定する, というような手続を取ればよい.

3 数値実験

本章では, 提案手法 DPM 法と, 従来の手法に関して比較検討を行うべく, 幾つかの数値シミュレーションを紹介する.

今, $M=5$ 個の項目 $O_1,\ldots,O_5$ は, 真の優先度比 $4:8:2:1:2$ を持っているとする. このとき, 真の優先度の比から算出される, 回答者が選択肢 $c\in\mathcal{C}$ を答える確率

$$p_{i,j}(c) \;=\; \frac{\tilde{p}_{i,j}(c)}{\sum_{c'\in\mathcal{C}}\tilde{p}_{i,j}(c')}\,,\quad \tilde{p}_{i,j}(c) \;=\; \exp\left\{-\left(\log c-\log\frac{\pi_i}{\pi_j}\right)^2\right\}$$

に基づいて回答データを発生させ, 諸手法で優先度の推定を試みる. 猶, 選択肢集合 $\mathcal{C}$ には $\mathcal{C}_{(2,3)}$ を用いることとする. 統計解析ソフト R によって乱数を用いた仮想データで $T=200$ 回の反復を行い, (手法によっては必ずしもそうしなければならない訳では無いが, 比較の為に) 全ての推定値は和を 1 に基準化し, それぞれの推定値 $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{(t)}=\left(\hat{\pi}_1^{(t)},\ldots,\hat{\pi}_M^{(t)}\right)^T$ $(t=1,\ldots,T)$ で絶対誤差和 (Sum of Absolute Errors; SAE) $\sum_{m=1}^{M}\left|\hat{\pi}_m^{(t)}-\pi_m^\star\right|$ を求め, その平均を計算する. 猶, AHP 等では大量の回答者数 N (PCM の個数) は確保され難いということを考慮し, 何れもある程度小標本である $N=10$ としており, EV 法, PPM 法, GM 法, HM 法では各個の PCM を幾何平均によって一つに統合し, その上で推定を行うとする.

ところで, 現実には多くの先行研究が想定している「完全整合に近い状態」や, 本研究でのモデルが置いた「真の比からの近さに基づいて確率的に選択される」という仮定通りには回答されない場合が多々見受けられる. そこで, そのような回答がある場合の推定精度も調べるべく, 設定は以下の五つを用意した.

I. 異常値無し.

II. 各一対比較値が, 10% の確率で $\mathcal{C}_{(2,3)}$ からのランダムな (離散一様分布) 値に置き換わる.

III. 10 名中 2 名の回答者は, 「とても悪い (1/8)」か「とても好い (8)」のみをランダムに回答する.

IV. 1 つの比較だけ, 50% の確率で比較値が本来の逆数になる.

V. 1つの比較だけ, 全回答者の比較値が本来の逆数になる.

設定Ⅱでは回答時や集計時のミスを, 設定Ⅲでは極端な回答, 又は不誠実に (考え無しに) 回答した回答者の存在を想定している. また, 設定Ⅳ, Ⅴでは前提となっている推移性が乱れた状況, つまり, AをBより, BをCより好ましく感じた人が, AとCとを比較したときにCを好むという, 三竦み状態を念頭に置いた.

表 1: 各手法の平均 SAE

	I	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	V
EV	0.086	0.133	0.201	0.157	0.259
PPM	0.085	0.133	0.203	0.166	0.248
GM	0.086	0.134	0.202	0.156	0.235
HM	0.087	0.132	0.199	0.169	0.297
DPM (α)					
(0.00)	0.072	0.109	0.186	0.142	0.228
(0.01)	0.072	0.106	0.174	0.139	0.226
(0.10)	0.074	0.089	0.108	0.112	0.197
(0.20)	0.077	0.086	0.112	0.098	0.157
(0.30)	0.082	0.090	0.130	0.095	0.135
(0.40)	0.089	0.097	0.148	0.098	0.126
(0.50)	0.097	0.106	0.168	0.105	0.127
C.R.	0.014	0.020	0.033	0.051	0.167

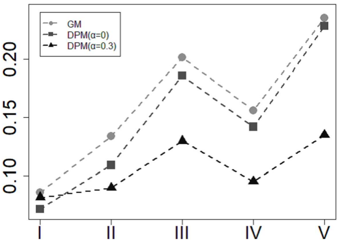

図 1: 平均 SAE の推移

表 1 は, 各手法の絶対誤差和 SAE の平均を示しており, 最下段には整合比 C.R. (consistency ratio; Saaty (2004) [12]) の値を示した. また, 図 1 はそのうち一部を取り出した絶対誤差和の平均の推移である. BHHJ-divergence を用いて推定した場合, 理論に沿わない回答があった場合に於いても, 従来の諸手法と比較して精度の低下が比較的抑制されていることが観測された.

4 結語

本稿では, AHP や ANP で用いられる一対比較行列 (PCM) に対して, 回答者 (意思決定者) によって各選択肢が回答される離散的な確率モデルを定義し, ロバスト性を持った BHHJ-divergence に基づいて推測を行うという手法について述べた.

今回行った数値実験では, 設定 V を除いて C.R. からは概ね整合している (0.15 を下回っている) と考えられるが, 従来手法や最尤推定では推定精度がかなり降下してしまった. その一方, 多くの $\alpha > 0$ に対する BHHJ-divergence は, 非推移的な局面でもある程度の精度を発揮する傾向が得られた.

参考文献

[1] I. Basak. Estimation of the multi-criteria worths of the alternatives in a hierarchical structure of comparisons. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Vol. 18, No. 10, pp. 3719–3738, 1989.

[2] I. Basak. On the use of information criteria in analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, Vol. 141, No. 1, pp. 200–216, 2002.

[3] A. Basu, I. R. Harris, N. L. Hjort, and M. C. Jones. Robust and efficient estimation by minimising a density power divergence. *Biometrika*, Vol. 85, No. 3, pp. 549–559, 1998.

[4] A. Basu, A. Mandal, N. Martin, and L. Pardo. Testing statistical hypotheses based on the density power divergence. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 65, No. 2, pp. 319–348, 2013.

[5] A. Ghosh and A. Basu. Robust estimation for independent non-homogeneous observations using density power divergence with applications to linear regression. *Electronic Journal of Statistics*, Vol. 7, pp. 2420–2456, 2013.

[6] S. Kullback and R. A. Leibler. On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 22, No. 1, pp. 79–86, 1951.

[7] S. Kurata and E. Hamada. A robust generalization and asymptotic properties of the model selection criterion family. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 47, No. 3, pp. 532–547, 2018a.

[8] S. Kurata and E. Hamada. A discrete probabilistic model for analyzing pairwise comparison matrices. *(to be submitted)*, 2018b.

[9] S. Lipovetsky and W. M. Conklin. Robust estimation of priorities in the ahp. *European Journal of Operational Research*, Vol. 137, No. 1, pp. 110–122, 2002.

[10] T. L. Saaty. A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of mathematical psychology*, Vol. 15, No. 3, pp. 234–281, 1977.

[11] T. L. Saaty. The analytic network process. *Pittsburgh: RWS Publications*, 1996.

[12] T. L. Saaty. Decision making-the analytic hierarchy and network processes (ahp/anp). *Journal of systems science and systems engineering*, Vol. 13, No. 1, pp. 1–35, 2004.

[13] T. L. Saaty and L. G. Vargas. Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios. *Mathematical modelling*, Vol. 5, No. 5, pp. 309–324, 1984.

[14] 加藤豊. 例解 AHP -基礎と応用-. ミネルヴァ書房, 2013.