数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 173-179

ある特徴を持ったネットワーク上の探索ゲーム

兵庫県立大学経営学部　菊田　健作
Kensaku KIKUTA
Department of Business Administration
University of Hyogo

1　はじめに

文献 [5] は車輪型ネットワークの変形ともいえるハブ・スポーク型ネットワーク上の探索ゲームを扱っている．文献 [5] ではハブ・スポーク型ネットワークを broken wheel と呼んでいるが，ここでは前者の呼称を採用する．本稿の目的は，文献 [5] の内容を紹介し（第２節〜第４節），さらに，今後の課題を述べること（第５節）である．

hider と呼ばれる player が 1 個の静止目標物を有限連結ネットワーク上のノードのどれかに隠す．もう 1 人の探索者と呼ばれる player はネットワークの辺上を移動しながらノードにある静止目標物を探す．探索者がノードを調べるときに調査費用が，また辺上を移動するときに移動費用が発生する．探索者は hider を見つけるまでの総費用が小さくなるようにノードを探索する順序を決めねばならない．一方，hider は総費用が大きくなるように目標物を隠すノードを選びたい．このような状況が両 player の利得の和をゼロとして行列ゲームモデルとして表現される．

文献 [10] はサイクルを含むノード数が 6 以下のネットワーク上のゲームにおいて hider の最適戦略を推測している．一方，文献 [11] はゲームを構成する諸要素について述べている．ゲームを解くことの難易度に関わる要素の一つがネットワークの構造である．文献 [8] と [12] は木ネットワークの場合を解析している．文献 [9] は円ネットワークの場合を分析し，探索諸費用が特殊な条件を満たす場合に成果を得ている．円ネットワークと文献 [5] で扱っているハブ・スポーク型ネットワークを比較すると，後者が辺の数が多い分探索者に有利となる．

Alpern/Gal [1] と Ruckle [13] は探索ゲームについて解説したテキストである．最近のものとして，報文集 [2] がある．Gluss [7] は線ネットワークの場合に静止目標物の存在確率を既知として費用最小化問題を扱っている．探索者の移動費用を導入したという点で本報告に関わる初期の論文である．Baston/Kikuta[3]

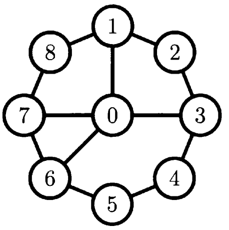

図 1: ハブ・スポーク型ネットワークの例，$S = \{1, 3, 6, 7\}$

は無向ネットワークで探索出発ノードが指定されていない場合を扱っている．ただし，移動費用と調査費用を想定している．また，文献 [4] は有向ネットワーク上のゲームを扱っている．

2 ハブ・スポーク型ネットワーク上のゲーム

本節では，移動費用と調査費用を考慮したハブ・スポーク型ネットワーク上の探索ゲームについてさらに詳しく述べる．$\mathcal{G} = (N, S)$ をハブ・スポーク型ネットワークとする．ここに $N = \{0, 1, ..., n\}, n \geq 2$, はノー ドの集合，$S \subseteq N \setminus \{0\}$ はノード 0 と辺で直に結ばれているノードの集合である．$|S| \geq 1$ とする．$T = N \setminus (\{0\} \cup S)$ とおく．辺の集合 $E \subseteq N \times N$ が

$$E = \{(0, i) : i \in S\} \cup \{(i, i+1) : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(1, n)\}. \tag{1}$$

と与えられる（図 1 参照）．辺に沿った有限個のノードの列をパスという．

2 人の player，つまり hider と探索者がおり，hider は $N \setminus \{0\}$ に含まれるノードのどれか 1 つを選びそこに静止目標物を隠す．探索者は hider がどのノードを選んだかを知らずにノード 0 から出発し辺上を移動しながら各ノードを調べて行く．ノードを調べずに通過することもできる．そうする場合はそのノードの調査費用はかからない．静止目標物が見つかった時点で探索は終了する．探索者が静止目標物が存在するノードを調べたときその静止目標物を見逃す確率はどのノードについても 0 である．したがって探索者が同じノードを 2 度以上調べることはない．ノード $i \in N$ の調査費用は $c_i > 0$ である．$(i, j) \in E$ のとき，ノード i から j への移動費用は $d(i, j)$ である．ネットワークは連結であるから $(i, j) \notin E$ のときでも i から j へのパスが存在する．$(i, j) \notin E$ のときは i から j へのすべてのパスに対してパス上の辺の移動費用の和を考え，その最小値を $d(i, j)$ とする．また，すべてのノード i に対し $d(i, i) = 0$ とする．

hider の（純粋）戦略はノード $i \in N \setminus \{0\}$ を選ぶことである．探索者の（純粋）戦略は，探索を開始する前に，探索するノードの順序を決定することである．探索者の戦略を $\sigma \equiv \sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ と

表す．σ は $N \setminus \{0\}$ 上の置換である．また，$\sigma(0) = 0$ としておく．σ の逆順序を σ^r と表す．ここに，$\sigma^r(j) = \sigma(n+1-j), 1 \leq j \leq n$ である．さらに，σ^{-1} を

$$\sigma^{-1}(i) = j \Longleftrightarrow \sigma(j) = i \tag{2}$$

によって定義する．

hider，探索者がそれぞれ i, σ を選んだとき，探索者が静止目標物を見つけた時点で探索は終了する．このときの探索費用は

$$f(i,\sigma) \equiv \sum_{x=1}^{\sigma^{-1}(i)} [d(\sigma(x-1), \sigma(x)) + c_{\sigma(x)}] \tag{3}$$

となる．これを hider の利得と考え，探索者はこれをできるだけ小さく，hider はできるだけ大きくするようにそれぞれ i, σ を選ぶ，として２人有限ゼロ和ゲームモデル $\Gamma(N, S)$ が得られ，$n \times n!$ 型の行列ゲームとして表現される．hider, 探索者の混合戦略をそれぞれ p, q で表して探索者が目標物を発見するまでの期待探索費用を $f(p,q)$ と表す．ここに，$p = (p_1, \ldots, p_n)$ および $q = \{q(\sigma)\}_\sigma$ であり，p_i, q_σ はそれぞれ hider，探索者が戦略 i, σ を選ぶ確率である．したがって，

$$\sum_{i \in N \setminus \{0\}} p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, \qquad \sum_\sigma q_\sigma = 1, \quad q_\sigma \geq 0, \quad \forall \sigma. \tag{4}$$

一方のみが，純戦略をとったときの期待費用を $f(p,\sigma)$，$f(i,q)$ と表す．

本稿では

$$c_i = \begin{cases} c_S & \text{if } i \in S \\ c_T & \text{if } i \in T \end{cases}. \tag{5}$$

を仮定する．次の記号を用いる．

$$W = n + C, \text{ 及び } \epsilon = \frac{c_S - c_T}{2W}, \text{ ここに } \quad C = \sum_{i=1}^{n} c_i. \tag{6}$$

探索者の次のような戦略は効率的であり，後述の最適戦略の中に現れる．各 $i \in S$ に対し，$\overrightarrow{i}$, $\overleftarrow{i}$, $i^{\rightarrow}$,${}^{\leftarrow}i$ を

$$\overrightarrow{i} = i, i+1, \ldots, n, 1, \ldots, i-1 \qquad \overleftarrow{i} = i, i-1, \ldots, 1, n, \ldots, i+1 \tag{7}$$

$$i^{\rightarrow} = i+1, i+2, \ldots, n, 1, \ldots, i \qquad {}^{\leftarrow}i = i-1, i-2, \ldots, 1, n, \ldots, i.$$

で定義する．さらに，戦略 $\overrightarrow{i}$ と $\overleftarrow{i}$ を確率 1/2 ずつでとる戦略を $\overleftrightarrow{i}$ と表す．同様に，戦略 $i^{\rightarrow}$ と $i^{\leftarrow}$ を確率 1/2 ずつでとる戦略を ${}^{\leftarrow}i^{\rightarrow}$ と表す．次の計算は探索者の最適戦略を考察するときに必要である．

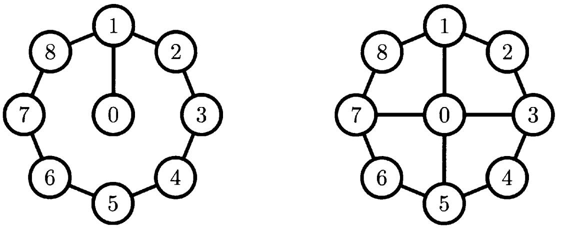

図 2: 定理 2 の $|S|=1$ の例（左）と $|S|=4$ の例（右）

命題 1. ([5]) ノード $i \in S$ に対し，

$$f(j, \overleftrightarrow{i}) = \begin{cases} 1 + c_i & \textit{if} \;\; j = i \\ (W + 2 + c_i + c_j)/2 & \textit{if} \;\; j \neq i \end{cases}. \tag{8}$$

命題 2. ([5]) ノード $i \in S$ に対し，

$$f(j, {}^{\leftarrow}i^{\rightarrow}) = \begin{cases} W + 1 & \textit{if} \;\; j = i \\ (W + 2 - c_i + c_j)/2 & \textit{if} \;\; j \neq i \end{cases}. \tag{9}$$

3　ゲームの値の上界

探索者は移動費用について効率的であるような戦略をとることにより期待探索費用をある値以下にすることができる．定理 1 はそれを述べている．

定理 1. ([5]) ノードの集合 S のどの 2 つの元もネットワーク $\mathcal{G}(N, S)$ において隣接していないと仮定する．探索者は各ノード $i \in S$ を確率 $1/|S|$ で選び，さらに $\overleftrightarrow{i}$ を確率 $1/2 + \epsilon|S|$，${}^{\leftarrow}i^{\rightarrow}$ を確率 $1/2 - \epsilon|S|$ で選ぶことにより，期待探索費用を高々 V とできる．ここに，

$$V = \frac{W + 2 + c_T}{2} + |S|c_S\epsilon. \tag{10}$$

である．

定理 1 で与えた V は S が 1 点集合であるときや $n = 2m$ かつ $|S| = m$ のときはゲームの値となる（図 2 参照）．次の定理 2 はこれを述べている．

定理 2. ([5]) ネットワーク $\mathcal{G}(N, S)$ において $|S| = 1$ かまたは $n = 2m$ かつ $|S| = m$ であるとする．このときゲーム $\Gamma(N, S)$ の値は (10) の V である．*hider* の最適戦略は S の各ノードに確率 c_S/W で静止目

標物を隠し，T の各ノードに確率 $(n/|T|+c_T)/W$ で静止目標物を隠すことである．探索者の最適戦略は S の各ノード i を確率 $1/|S|$ で選び，さらに $\overleftrightarrow{i}$ を確率 $1/2+\epsilon|S|$，$\leftarrow i \rightarrow$ を確率 $1/2-\epsilon|S|$ で選ぶことである．

4　S が区間の場合

集合 S のノード番号が連続しているとき，S を区間と呼ぶ．例えば，$k<\ell$ に対し $S=\{i: k\leq i\leq \ell\}$ は区間である．これを $S=[k,\ell]$ と表す．本節では，集合 S が区間であるときのゲームの値や最適戦略を考察する．

定理 3. ([5]) 集合 S が区間であり，$|S|\geq 2$ と $c_S\geq c_T$ を満たすとする．ゲーム $\Gamma(N,S)$ の値は次で与えられる．

$$v_{int}=\frac{W+1+c_T}{2}+|S|(1+c_S)\epsilon. \tag{11}$$

集合 S が区間 $[1,k]$ であるとして，探索者の最適戦略は $\overrightarrow{k}$ と $\overleftarrow{k-1}$ のそれぞれを確率 $1/2-\epsilon$ で選び，$\overrightarrow{1}$ と $\overleftarrow{k}$ のそれぞれを確率 ϵ で選ぶことである．*hider* の最適戦略は S の各ノードに確率 $(1+c_S)/W$ で静止目標物を隠し，T の各ノードに確率 $(1+c_T)/W$ で静止目標物を隠すことである．

定理 4. ([5]) 集合 S が区間 $[1,k]$ であり，$k\geq 2$ かつ $c_T\geq c_S$ であるとする．戦略 $\overrightarrow{k}$ と $\overleftarrow{k-1}$ をそれぞれ確率 $1/2-\epsilon$ で選び，戦略 $\leftarrow 1$ と $k\rightarrow$ をそれぞれ確率 ϵ で選ぶことによって，探索者は $\Gamma(N,S)$ における期待探索費用を

$$V_{INT}=\frac{W+1+c_T}{2}-[2-k(1+c_S)]\epsilon. \tag{12}$$

に等しくできる．特に，$k=2$ のときは V_{INT} がゲームの値であり，*hider* の最適戦略は S の各ノードに確率 c_S/W で静止目標物を隠し，T の各ノードに確率 $(n/(n-2)+c_T)/W$ で静止目標物を隠すことである．

5　今後の課題

まず，$|S|=s$ とし，$S=\{i_1,\ldots,i_s\}, i_1=1<i_2<\ldots<i_s$ とする．各 $1\leq \ell\leq s$ に対し，$T^S_\ell=\{i: i_\ell<i<i_{\ell+1}\}$ とおく．

I. 上記4つの定理によって次のような成果が得られた．他の場合にゲームを解くことが課題である．

（1）ゲームを解いた場合

(i) $|S|=1$ または $|S|=n/2$　（定理 2）．

(ii) $S=\{1,\ldots,k\}$, かつ $c_S\geq c_T$（定理 3）．

(iii)$S=\{1,2\}$, かつ $c_S \le c_T$（定理 4）.

（2）ゲームの値の上界を求めた場合

(i) S の異なるどの二つのノードも隣接していない場合，つまり，全ての $1 \le \ell \le s$ に対し $|T_\ell^S| \ge 1$ の場合　（定理 1）.

(ii) $S=\{1,\dots,k\}, k \ge 3$ かつ $c_S \le c_T$（定理 4）.

II. 上記 I（2）(i) に加えて，さらに次の結果を得る．証明は文献 [6] を参照されたい．

定理 5. ([6]) 全ての $1 \le \ell \le s$ に対し $1 \le |T_\ell^S| \le 2$ を仮定する．ゲームの値は $\frac{v(S)}{W}$ である．ここに，

$$v(S) \equiv \frac{n(n+2)}{2} + (n+1)s(c_S - c_T) + n(n+\frac{3}{2})c_T + \frac{(sc_S+(n-s)c_T)^2 + sc_S^2 + (n-s)c_T^2}{2}. \quad (13)$$

hider の最適戦略は p^S である．ここに，

$$p_i^S = \frac{a_i^S + c_i}{W}, \qquad a_i^S = \begin{cases} 0, & \textit{if } i \in S; \\ \frac{|T_\ell^S|+1}{|T_\ell^S|}, & \textit{if } i \in T_\ell^S, \ell = 1,\dots,s. \end{cases} \quad (14)$$

探索者の一つの最適戦略は S^* である． ここに，各 $i \in S$ に対し，S_i^* は $\overrightarrow{i}$ と $\overleftarrow{i}$ をそれぞれ確率 β/W でとり,$\overrightarrow{i+1}$ と $\overleftarrow{i-1}$ をそれぞれ確率 γ/W でとる戦略である．S^* は各 S_i^* を確率 $1/s$ でとる戦略であると定義される．さらに，

$$\beta \equiv \frac{n + 2sc_S + (n-2s)c_T}{4s}, \quad \gamma \equiv \frac{n(1+c_T)}{4s}. \quad (15)$$

特に，$c_S = c_T = c$ のときは，制約 $|T_\ell^S| \le 2$ を外すことができる．つまり次を得る．

定理 6. ([6]) 全ての $1 \le \ell \le s$ に対し，$1 \le |T_\ell^S|$ を仮定する．$c_S = c_T = c$ を仮定する．ゲームの値は $\frac{n+2}{2} + \frac{n+1}{2}c$ である． *hider* の一つの最適戦略は p^S である．探索者の一つの最適戦略は S^* である． ここに，各 $i \in S$ に対し，S_i^* は $\overrightarrow{i}$,$\overrightarrow{i+1}$, $\overleftarrow{i}$, $\overleftarrow{i-1}$ を等確率でとる戦略であり，S^* は各 S_i^* を $1/s$ でとる戦略である．

参考文献

[1] S. Alpern and S. Gal, *The theory of search games and rendezvous*, Kluwer International Series in Operations Research and Management Sciences, Kluwer, Boston, (2003).

[2] S. Alpern, R.Fokkink,L.Gasieniec, R.Lindelauf and V.S.Subrahmanian, *Search theory: a game theoretic perspective*, Springer, (2013).

[3] V. Baston and K. Kikuta, Search games on networks with travelling and search costs and with arbitrary searcher starting points, *Networks* 62 (2013), 72-79.

[4] V. Baston and K. Kikuta, Search games on a network with travelling and search costs, *International Journal of Game Theory* 44 (2015), 347-365.

[5] V. Baston and K. Kikuta, Search games on a broken wheel with traveling and search costs, *J. Oper. Res. Soc. Japan* 60 (2017), 379-392.

[6] V. Baston and K. Kikuta, A search game on a broken wheel, *mimeo.* (2014).

[7] B. Gluss, Approximately optimal one-dimensional search policies in which search costs vary through time, *Naval Research Logistics Quarterly* 8, (1961) 277-283.

[8] K. Kikuta, A search game with travelling cost on a tree, *J. Oper. Res. Soc. Japan* 38 (1995), 70-88.

[9] K. Kikuta, A search game on a cyclic graph. *Naval Research Logistics* 51 (2004) 977-993.

[10] K. Kikuta, やや複雑なネットワーク上の探索問題の解析について. *RIMS*講究録 2044 (2017) 131-140.

[11] K. Kikuta, ネットワーク上の探索ゲーム. オペレーションズ・リサーチ 60 (2015) 288-293.

[12] K. Kikuta and W. Ruckle, Initial point search on weighted trees, *Naval Research Logistics* 41 (1994), 821-831

[13] W. Ruckle, *Geometric games and their applications*, Pitman Research Notes in Mathematics 82, Boston, (1983).