数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 215-221

レベニューマネジメントにおける Littlewood のモデルの拡張へのコメント
Comments on Extension of Littlewood's Law in Revenue Management

筑波大学名誉教授・高木英明
Hideaki Takagi
Professor Emeritus, University of Tsukuba

Abstract

Classical Littlewood's law for the two-period static revenue management of a single perishable resource is extended to 3 and more period cases. The expected revenue in the entire period is expressed explicitly in terms of multiple integrals involving the distribution functions of the demand in each period. Then a set of equations is derived for calculating the optimal protection levels in each period successively. Our formula complements a variety of dynamic programming approaches published previously based on Bellman's optimality principle. Numerical results reveal that the once popular EMSR heuristic is vulnerable to significant error in optimal protection levels for multi-period settings.

1 はじめに

航空会社やホテル等のサービス企業では，サービス施設の維持に係る固定費が事業経費の大部分を占め，航空機の座席やホテルの客室という商品は，決められた日時が過ぎれば価値が 0 になる．従って，支払い意思（willingness to pay）が異なる顧客セグメントからの時間的に変動する需要に対し，どのように予約を受け付けていけば最終的に収益を最大化することができるかという消滅資源の容量管理（capacity control of perishable resource）の方法が研究されてきた．このような最適化問題は**レベニューマネジメント** (revenue management) と呼ばれる [2, 8, 10].

その数理的モデルの出発点は，1972 年に Littlewood [7] が発表した，前期に安く座席を予約するレジャー客と後期に高額でも予約するビジネス客から構成される 2 期間モデルについて，期待収益が最大になるように，レジャー客に与える予約数の最適上限値，すなわち**最適ブッキングリミット** (optimal booking limit) をビジネス客の需要の確率分布関数から決める **Littlewood の法則** (Littlewood's law) と呼ばれる簡単な公式である．但し，後期には前期に売れ残った座席も併せてビジネス客に売ることができるという**ネスト式ブッキング** (nested booking) を仮定する．

Littlewood の 2 期間モデルは，その後，多期間の場合について，Belobaba [3] が近似法を提案し，Curry [5]，Wollmer [11]，Robinson [9] らが Bellman の最適性原理に基づく厳密解法を発表し，Brumelle and McGill [4] が Markov 決定過程を示して，後続の理論研究や現在の航空会社で使われている予約管理ソフトウェアでの実装の基礎となった．これらのモデルは，各期の需要に対応する料金クラスが固定しているので，**静的モデル** (static model) と呼ばれる．Curry 以後の研究は，理論的に高度ではあるが分かり易く，出発時刻から 1 期ずつ時間的に遡る方向に最適解を求めるので，数値計算も行い易い定式化である．本稿では，2 期間モデルの最大化問題を 3 期間以上のモデルに拡張した結果を数値計算例とともに示す．各期における最適ブッキングリミットを次期以降の需要の確率分布関数の多重積分で明示的に与える数式を導き，それらが上記の一連の研究結果と一致することを示す．

2　3期間モデルへの拡張

本節では，Littlewoodの2期間モデルを3期間にわたる3料金クラスに拡張したモデルの解析を示す．3期間モデルについて，Phillips [8, p. 160, 図7.7] は，2期と1期の解析は2期間モデルの場合と同じであることを示した上で，3期間にわたる決定木の方法を示唆しているが，その説明と解析は不完全であり，結果は示されていない．

総座席数を C とする．各期の番号は，時間が進む方向に，3, 2, 1期と進み，t 期の需要を表す確率変数 D_t の分布関数と密度関数をそれぞれ $F_t(x) := P\{D_t \le x\}$ および $f_t(x) := dF_t(x)/dx$, $t = 1,2,3$ とする．t 期のブッキングリミットを b_t $(b_1 = b_1^* = C)$ とする．t 期に予約するときの料金を r_t 円とし，$r_1 > r_2 > r_3$ を仮定する．

3期間にわたる収益は，ネスト式ブッキングにより，次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
R(b_2, b_3) &= r_3 \min\{b_3, D_3\} + r_2 \min\{b_2 - b_3 + \underbrace{\max\{0, b_3 - D_3\}}_{\text{seats not sold in period 3}}, D_2\} \\
&\quad + r_1 \min\{C - b_2 + \underbrace{\max\{0, b_2 - b_3 + \max\{0, b_3 - D_3\} - D_2\}}_{\text{seats not sold in period 2}}, D_1\}.
\end{aligned}
$$

このとき，収益の期待値，すなわち**期待収益** (expected revenue) は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
E[R(b_2, b_3)] &= r_3 \left[b_3 - \int_0^{b_3} F_3(x)dx \right] + r_2 \left[b_2 - b_3 - \int_0^{b_2 - b_3} F_2(x)dx \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{b_3} F_3(x)[1 - F_2(b_2 - x)]dx \right] + r_1 \left[C - b_2 - \int_0^{C - b_2} F_1(x)dx \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{b_2 - b_3} F_2(x)[1 - F_1(C - x - b_3)]dx + \int_0^{b_3} F_3(y)dy \int_0^{b_2 - y} f_2(x)[1 - F_1(C - x - y)]dx \right].
\end{aligned}
$$

2変数 b_2 と b_3 の関数 $E[R(b_2, b_3)]$ が極値を取る点 $b_2 = b_2^*$, $b_3 = b_3^*$ を求めるために，次の1階偏微分係数を計算する．

$$
\frac{\partial E[R(b_2, b_3)]}{\partial b_2} = \{r_2 - r_1[1 - F_1(C - b_2)]\} \left\{ [1 - F_3(b_3)][1 - F_2(b_2 - b_3)] + \int_0^{b_3} f_3(x)[1 - F_2(b_2 - x)]dx \right\},
$$

$$
\frac{\partial E[R(b_2, b_3)]}{\partial b_3} = [1 - F_3(b_3)] \left\{ r_3 - r_2[1 - F_2(b_2 - b_3)] - r_1 \int_0^{b_2 - b_3} f_2(x)[1 - F_1(C - x - b_3)]dx \right\}.
$$

従って，極値の必要条件

$$
\frac{\partial E[R(b_2, b_3)]}{\partial b_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E[R(b_2, b_3)]}{\partial b_3} = 0
$$

として，2期の最適ブッキングリミット b_2^* をLittlewoodの法則 $r_2 = r_1[1 - F_1(C - b_2^*)]$ から求め，これを3期の最適ブッキングリミット b_3^* に対する方程式

$$
r_3 = r_2[1 - F_2(b_2^* - b_3^*)] + r_1 \int_0^{b_2^* - b_3^*} f_2(x)[1 - F_1(C - x - b_3^*)]dx
$$

に代入した方程式を解いて，b_3^* を求めればよい．

点 $b_2 = b_2^*$, $b_3 = b_3^*$ における関数 $E[R(b_2, b_3)]$ の極大・極小性については，2階偏微分係数が

$$
\left. \frac{\partial^2 E[R(b_2, b_3)]}{\partial b_2^2} \right|_{b_2 = b_2^*, b_3 = b_3^*} < 0, \quad \left. \frac{\partial^2 E[R(b_2, b_3)]}{\partial b_3^2} \right|_{b_2 = b_2^*, b_3 = b_3^*} < 0, \quad \left. \frac{\partial^2 E[R(b_2, b_3)]}{\partial b_2 \partial b_3} \right|_{b_2 = b_2^*, b_3 = b_3^*} = 0
$$

となるので，関数 $E[R(b_2,b_3)]$ は点 $b_2=b_2^*$, $b_3=b_3^*$ において極大値を取ることが分かる．
最適ブッキングリミット b_2^* と b_3^* の代わりに

$$y_1^* := C - b_2^* \quad ; \quad y_2^* := C - b_3^* \ (> y_1^*)$$

で定義される**最適プロテクションレベル** (optimal protection level) y_1^* と y_2^* を用いると，

$$\begin{aligned} r_3 &= r_1 \left\{ [1-F_1(y_1^*)][1-F_2(y_2^*-y_1^*)] + \int_0^{y_2^*-y_1^*} f_2(x)[1-F_1(y_2^*-x)]dx \right\} \\ &= r_1 \left(P\{D_1 > y_1^*, D_2 > y_2^* - y_1^*\} + P\{D_1 + D_2 > y_2^*, D_2 \le y_2^* - y_1^*\} \right) \end{aligned}$$

が得られる．この領域は次のように書くことができる [1].

$$r_3 = r_1 P\{D_1 > y_1^*, D_1 + D_2 > y_2^*\}.$$

3 4 期間モデルへの拡張

次に，4 期間にわたる 4 料金クラスのモデルの解析結果を示す．各期の番号は，時間が進む方向に，4, 3, 2, 1 期と進む．互いに独立な t 期の需要を表す確率変数 D_t の分布関数と密度関数をそれぞれ $F_t(x) := P\{D_t \le x\}$ および $f_t(x) := dF_t(x)/dx$, $t = 1,2,3,4$ とする．t 期のブッキングリミットを b_t とする．出発時に空席を残す手はないので，$b_1 = b_1^* = C$（総座席数）とする．t 期に予約するときの料金を r_t 円とし，$r_1 > r_2 > r_3 > r_4$ を仮定する．
4 期間にわたる収益は次のように与えられる．

$$\begin{aligned} R(b_2,b_3,b_4) &= r_4 \min\{b_4, D_4\} + r_3 \min\{b_3 - b_4 + \underbrace{\max\{0, b_4 - D_4\}}_{\text{seats not sold in period 4}}, D_3\} \\ &+ r_2 \min\{b_2 - b_3 + \underbrace{\max\{0, b_3 - b_4 + \max\{0, b_4 - D_4\} - D_3\}}_{\text{seats not sold in period 3}}, D_2\} \\ &+ r_1 \min\{C - b_2 + \underbrace{\max\{0, b_2 - b_3 + \max\{0, b_3 - b_4 + \max\{0, b_4 - D_4\} - D_3\} - D_2\}}_{\text{seats not sold in period 2}}, D_1\}. \end{aligned}$$

この期待値は次のようになる．

$$\begin{aligned} E[R(b_2,b_3,b_4)] &= r_4 \int_0^{b_4} [1-F_4(x)]dx + r_3 \left[\int_0^{b_3-b_4} [1-F_3(x)]dx + \int_0^{b_4} F_4(x)[1-F_3(b_3-x)]dx \right] \\ &+ r_2 \left[\int_0^{b_2-b_3} [1-F_2(x)]dx + \int_0^{b_3-b_4} F_3(x)[1-F_2(b_2-x-b_4)]dx \right. \\ &\left. \quad + \int_0^{b_4} F_4(y)dy \int_0^{b_3-y} f_3(x)[1-F_2(b_2-x-y)]dx \right] \\ &+ r_1 \left[\int_0^{C-b_2} [1-F_1(x)]dx + \int_0^{b_2-b_3} F_2(x)[1-F_1(C-x-b_3)]dx \right. \\ &\quad + \int_0^{b_3-b_4} F_3(y)dy \int_0^{b_2-b_4-y} f_2(x)[1-F_1(C-x-y-b_4)]dx \\ &\left. \quad + \int_0^{b_4} F_4(z)dz \int_0^{b_3-z} f_3(y)dy \int_0^{b_2-y-z} f_2(x)[1-F_1(C-x-y-z)]dx \right]. \end{aligned}$$

関数 $E[R(b_2,b_3,b_4)]$ が極値を取る b_2,b_3,b_4 の値 b_2^*,b_3^*,b_4^* は，$E[R(b_2,b_3,b_4)]$ の1階偏微分係数を0とおくことで得られる次の方程式を順次に解いて求められる．

$$r_2=r_1\,[1-F_1(C-b_2^*)],\quad r_3=r_2\,[1-F_2(b_2^*-b_3^*)]+\,r_1\int_0^{b_2^*-b_3^*}f_2(x)[1-F_1(C-x-b_3^*)]dx,$$

$$r_4=r_3\,[1-F_3(b_3^*-b_4^*)]+r_2\int_0^{b_3^*-b_4^*}f_3(x)[1-F_2(b_2^*-x-b_4^*)]dx$$
$$+\,r_1\int_0^{b_3^*-b_4^*}f_3(y)dy\int_0^{b_2^*-y-b_4^*}f_2(x)[1-F_1(C-x-y-b_4^*)]dx.$$

さらに，これらの極値はすべて極大値であることを確かめることができる．

上記の r_2〜r_4 は，最適ブッキングリミット b_2^*〜b_4^* の代わりに，最適プロテクションレベル

$$y_t^*:=C-b_{t+1}^*\qquad 1\le t\le 3$$

を用いて，次のように表される．

$$\begin{aligned}
r_2&=r_1\,[1-F_1(y_1^*)]=r_1P\{D_1>y_1^*\},\\
r_3&=r_2\,P\{D_2>y_2^*-y_1^*\}+r_1\int_0^{y_2^*-y_1^*}f_2(x)[1-F_1(y_2^*-x)]dx\\
&=r_1\left(P\{D_1>y_1^*,D_2>y_2^*-y_1^*\}+P\{D_2\le y_2^*-y_1^*,D_1+D_2>y_2^*\}\right),\\
r_4&=r_3\,P\{D_3>y_3^*-y_2^*\}+r_2\int_0^{y_3^*-y_2^*}f_3(x)[1-F_2(y_3^*-y_1^*-x)]dx\\
&\quad+r_1\int_0^{y_3^*-y_2^*}f_3(y)dy\int_0^{y_3^*-y-y_1^*}f_2(x)[1-F_1(y_3^*-x-y)]dx\\
&=r_1\left(P\{D_1>y_1^*,D_1+D_2>y_2^*,D_3>y_3^*-y_2^*\}\right.\\
&\quad+P\{D_1>y_1^*,D_2+D_3>y_3^*-y_1^*,D_3\le y_3^*-y_2^*\}\\
&\quad\left.+P\{D_1+D_2+D_3>y_3^*,D_2+D_3\le y_3^*-y_1^*,D_3\le y_3^*-y_2^*\}\right).
\end{aligned}$$

これらの結果は次の式と同等である [1].

$$r_2=r_1P\{D_1>y_1^*\},\quad r_3=r_1P\{D_1>y_1^*,D_1+D_2>y_2^*\},$$
$$r_4=r_1P\{D_1>y_1^*,D_1+D_2>y_2^*,D_1+D_2+D_3>y_3^*\}.$$

この形を見ると，例えば，y_3^* は「3期以降の需要に備えるための最適プロテクションレベル」と捉えるのが適当であることが分かる．

4 Brumelle-McGillの定理

Brumelle and McGill [4] は，T 期間のネスト式ブッキングモデルについて，互いに独立な需要の確率変数列 $\{D_1,D_2,\ldots,D_{T-1}\}$ に対し，$\{y_1^*,y_2^*,\ldots,y_{T-1}^*\}$ が各期の最適プロテクションレベルであるための必要十分条件は，次の $T-1$ 個の方程式が成り立つことであることを証明した．

$$r_{t+1}=r_1P\{D_1>y_1^*,D_1+D_2>y_2^*,\ldots,D_1+D_2+\cdots+D_t>y_t^*\}\qquad 1\le t\le T-1$$

この結果は，$T=2$ の場合には，$r_2=r_1P\{D_1>y_1^*\}$ となり，Littlewoodの法則に一致する．また，$T=3$ と $T=4$ の場合は，それぞれ本稿の結果に一致する．しかし，y_t^* $(t\ge 2)$ の計算法は，Brumelle-McGillの定理では自明ではないので，本稿の明示的計算式は有用である．

5 T 期間モデル

以上の解析を一般の T 期間モデルに敷衍する．各期に，時間が進む方向に $T, T-1, \ldots, 2, 1$ 期と番号を付ける．t 期の需要を表す確率変数 D_t の分布関数と密度関数をそれぞれ $F_t(x) := P\{D_t \leq x\}$ および $f_t(x) := dF_t(x)/dx$, $1 \leq t \leq T$ とする．t 期に予約するときの料金を r_t 円とし，t 期のブッキングリミットを b_t とし（$1 \leq t \leq T$），以下を仮定する．

$$b_T \leq b_{T-1} \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 = C \quad ; \quad r_T < r_{T-1} < \cdots < r_2 < r_1.$$

T 期間にわたる期待収益 $E[R(b_1, b_2, \ldots, b_{T-1}, b_T)]$（$b_1 = C$ は定数）が極値を取るときのブッキングリミット $b_2, \ldots, b_{T-1}, b_T$ の最適値 $b_2^*, \ldots, b_{T-1}^*, b_T^*$ は次の方程式を，$t = 2$ から始めて $t = T$ まで順に解くことにより求めることができる．

$$\begin{aligned}
r_t &= r_{t-1}\,[1 - F_{t-1}(b_{t-1}^* - b_t^*)] \\
&+ r_{t-2} \int_0^{b_{t-1}^* - b_t^*} f_{t-1}(x_{t-1})[1 - F_{t-2}(b_{t-2}^* - x_{t-1} - b_t^*)]dx_{t-1} \\
&+ r_{t-3} \int_0^{b_{t-1}^* - b_t^*} f_{t-1}(x_{t-1})dx_{t-1} \\
&\quad \int_0^{b_{t-2}^* - x_{t-1} - b_t^*} f_{t-2}(x_{t-2})[1 - F_{t-3}(b_{t-3}^* - x_{t-2} - x_{t-1} - b_t^*)]dx_{t-2} \\
&+ r_{t-4} \int_0^{b_{t-1}^* - b_t^*} f_{t-1}(x_{t-1})dx_{t-1} \int_0^{b_{t-2}^* - x_{t-1} - b_t^*} f_{t-2}(x_{t-2})dx_{t-2} \\
&\quad \int_0^{b_{t-3}^* - x_{t-2} - x_{t-1} - b_t^*} f_{t-3}(x_{t-3})[1 - F_{t-4}(b_{t-4}^* - x_{t-3} - x_{t-2} - x_{t-1} - b_t^*)]dx_{t-3} \\
&+ \cdots \\
&+ r_1 \int_0^{b_{t-1}^* - b_t^*} f_{t-1}(x_{t-1})dx_{t-1} \int_0^{b_{t-2}^* - x_{t-1} - b_t^*} f_{t-2}(x_{t-2})dx_{t-2} \\
&\quad \int_0^{b_{t-3}^* - x_{t-2} - x_{t-1} - b_t^*} f_{t-3}(x_{t-3})dx_{t-3} \cdots \\
&\quad \int_0^{b_2^* - x_3 - x_4 - \cdots - x_{t-1} - b_t^*} f_2(x_2)[1 - F_1(C - x_2 - x_3 - \cdots - x_{t-1} - b_t^*)]dx_2.
\end{aligned}$$

例えば，$t = 5$ と 6 の場合は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
r_5 &= r_4\,[1 - F_4(b_4^* - b_5^*)] + r_3 \int_0^{b_4^* - b_5^*} f_4(x_4)[1 - F_3(b_3^* - x_4 - b_5^*)]dx_4 \\
&+ r_2 \int_0^{b_4^* - b_5^*} f_4(x_4)dx_4 \int_0^{b_3^* - x_4 - b_5^*} f_3(x_3)[1 - F_2(b_2^* - x_3 - x_4 - b_5^*)]dx_3 \\
&+ r_1 \int_0^{b_4^* - b_5^*} f_4(x_4)dx_4 \int_0^{b_3^* - x_4 - b_5^*} f_3(x_3)dx_3 \\
&\quad \int_0^{b_2^* - x_3 - x_4 - b_5^*} f_2(x_2)[1 - F_1(C - x_2 - x_3 - x_4 - b_5^*)]dx_2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_6 = {} & r_5\,[1 - F_5(b_5^* - b_6^*)] + r_4 \int_0^{b_5^*-b_6^*} f_5(x_5)[1 - F_4(b_4^* - x_5 - b_6^*)]dx_5 \\
& + r_3 \int_0^{b_5^*-b_6^*} f_5(x_5)dx_5 \int_0^{b_4^*-x_5-b_6^*} f_4(x_4)[1 - F_3(b_3^* - x_4 - x_5 - b_6^*)]dx_4 \\
& + r_2 \int_0^{b_5^*-b_6^*} f_5(x_5)dx_5 \int_0^{b_4^*-x_5-b_6^*} f_4(x_4)dx_4 \\
& \quad \int_0^{b_3^*-x_4-x_5-b_6^*} f_3(x_3)[1 - F_2(b_2^* - x_3 - x_4 - x_5 - b_6^*)]dx_3 \\
& + r_1 \int_0^{b_5^*-b_6^*} f_5(x_5)dx_5 \int_0^{b_4^*-x_5-b_6^*} f_4(x_4)dx_4 \int_0^{b_3^*-x_4-x_5-b_6^*} f_3(x_3)dx_3 \\
& \quad \int_0^{b_2^*-x_3-x_4-x_5-b_6^*} f_2(x_2)[1 - F_1(C - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - b_6^*)]dx_2.
\end{aligned}
$$

6　数値例

多期間モデルについては，Belobaba [3] が提案した **EMSR** (expected marginal seat revenue) と呼ばれる最適プロテクションレベルを求める近似計算法（EMSR-a と EMSR-b がある [2, 8, 10]）が，厳密な計算法に比べて計算が非常に簡単であることから実用性が高いとされ，多くの航空会社等で使われた [8, p. 163]．既存の文献 [9, 11] に紹介されているこの近似法の適用例を参考にして，5 および 6 期間モデルについて，本稿の厳密解による結果と比較する数値例を Table 1 に示す．これらの結果を見ると，EMSR は 1 期目だけは厳密解（Littlewood の法則）に一致するが，それ以後の精度は良くないことが分かる．但し（本稿には示さないが），期待収益の最大値はプロテクションレベルの最適値にあまり敏感ではない．

本項の厳密解による数値計算には多重積分の評価が必要である．Robinson [9] は，効率的な多重積分の計算に乱数を用いた Monte Carlo 法を提案しているが，本研究ではパソコン上の Mathematica で行った．

7　おわりに

本稿では，各期において（ブッキングリミットのために）予約できなかった顧客は直ちにシステムを去り，その一部が後続期に高い料金でもよいから座席の予約を求めるバイアップ (buy-up) はないと仮定した．また，総座席数を超えて予約を受け付けるオーバーブッキングもないと仮定した．これらの要素を取り入れたモデルを本稿の方法で厳密に解析することも可能である．

謝辞

この研究は平成 29 年度科学研究助成事業（学術研究助成基金助成金）基盤研究 (C)（一般）課題番号 17K00435 を受けています．

References

[1] 高木英明，レベニューマネジメントにおける Littlewood のモデルの拡張，第 6 回サービス学会国内大会，2018 年 3 月 10〜11 日，明治大学．

[2] 増田靖・高木英明，レベニューマネジメント，高木英明（編著），サービスサイエンスことはじめ：数理モデルとデータ分析によるイノベーション，7 章，pp.211–248，筑波大学出版会，2014 年 8 月．

Table 1: 多期間の静的モデルに対するEMSR近似と厳密解の数値計算例
（t期の需要は平均μ_t，分散σ_t^2の正規分布に従うと仮定する）

(a) Belobaba [3, p.132], と Robinson [9, Table III] のパラメタ値を変形
総座席数 $C = 107$

期	料金	需要		最適プロテクションレベル（y_t^*）		
t	r_t	μ_t	σ_t	EMSR-a	EMSR-b	厳密解
1	105	20.3	8.6	13.3506	13.3506	13.3506
2	83	33.4	15.1	45.4259	48.1994	48.7414
3	57	19.3	9.2	72.5511	74.2725	76.6402
4	39	29.7	13.1	90.1224	102.5888	100.1929
5	35					

(b) Wollmer [11, Fig. 2] と Talluri and van Ryzin [10, p. 48] のパラメタ値を変形
総座席数 $C = 119$

期	料金	需要		最適プロテクションレベル（y_t^*）		
t	r_t	μ_t	σ_t	EMSR-a	EMSR-b	厳密解
1	1050	12.9945	4.3313	9.9087	9.9087	9.9087
2	800	33.7890	11.2628	40.1569	42.0640	42.0874
3	567	29.6625	9.8873	55.9524	67.8120	64.3234
4	534	25.5135	8.5043	67.4745	90.2256	84.8524
5	520	14.8395	4.9463	111.8665	115.9412	104.4316
6	350					

[3] Belobaba, P. P., *Air Travel Demand and Airline Seat Inventory Management*, Ph.D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts. May 1987.

[4] Brumelle, S. L. and J. I. McGill, Airline seat allocation with multiple nested fare classes, *Operations Research*, Vol.41, No.1, pp.127–137, January–February 1993.

[5] Curry, R. E., Optimal airline seat allocation with fare classes nested by origins and destinations, *Transportation Science*, Vol.24, No.3, pp.193–204, August 1990.

[6] Li, M. Z. F. and T. H. Oum, A note on the single leg, multifare seat allocation problem, *Transportation Science*, Vol.36, No.3, pp.349–353, August 2002.

[7] Littlewood, K., Forecasting and control of passenger bookings, *Proceedings of the 12th Annual AGIFORS Symposium*, pp.95–117, Nathanya, Israel, October 1972. 再掲載: *Journal of Revenue and Pricing Management*, Vol.4, No.2, pp.111–123, 2005.

[8] Phillips, R. L., *Pricing and Revenue Optimization*, Stanford University Press, Stanford, California, 2005.

[9] Robinson, L. W., Optimal and approximate control policies for airline booking with sequential nonmonotonic fare classes, *Operations Research*, Vol.43, No.2, pp.252–263, March–April 1995.

[10] Talluri, K. T. and G. J. van Ryzin, *The Theory and Practice of Revenue Management*, Springer Science + Business Media, 2004.

[11] Wollmer, R. D., An airline seat management model for a single leg route when lower fare classes book first, *Operations Research*, Vol.40, No.1, pp.26–37, January–February 1992.