数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 243-249

Keller-Segel 系と一様楕円性を有する作用素
The One-dimensional Keller-Segel system and uniformly elliptic operators

東京情報大学　総合情報学部　矢作由美
Yumi　YAHAGI
Faculty of Informatics, Tokyo University of information Sciences

Abstract

In this paper, a one-dimensional Keller Segel system of parabolic-elliptic type is considered. The system (GKS) considered here is a Keller-Segel system with uniformly elliptic operators. The main purpose is to show the time local existence and uniqueness of the mild solution of (GKS).

1　はじめに

Keller-Segel 系とは, 1970 年代に Keller, Segel [4] によって提唱された, 細胞性粘菌（キイロタマホコリカビ）の集合体形成現象を記述する連立偏微分方程式系である. Keller-Segel 系は現在多くの数学者によって活発に研究がなされており, Bellomo et al. [1] や, Hillen, Painter [3] によって分類がなされている. 本稿では以下の放物ー楕円型の空間 1 次元 Keller-Segel 系 (KS) を研究対象とする.

$$
\text{(KS)}\begin{cases} u_t = u_{xx} - \chi(uv_x)_x & \text{in } \mathbf{R}\times(0,\infty), \\ 0 = v_{xx} - \gamma v + \alpha u & \text{in } \mathbf{R}\times(0,\infty), \\ u(x,0) = \overline{u}(x) \geq 0 & \text{in } \mathbf{R}, \end{cases}
$$

ここで, χ, α, γ は正定数であり, (KS) の解 $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ はそれぞれ位置 x, 時刻 t における細胞性粘菌の細胞密度, および細胞性粘菌が放出する走化性物質サイクリック AMP の濃度を表す.

本稿の目的は, 一様楕円性を有する作用素を (KS) に適用した新たな方程式系 (GKS) において, その時間局所解の存在性および一意性を示すことである. 証明の手法として, 半群の縮小性および関数列の逐次近似法を用いる点が特徴である. 尚, 本稿は Mathematica Slovaca に掲載予定の論文 Yahagi [8] の要旨をまとめたものである.

2　準備

まず, $L^r \equiv L^r(\mathbf{R})$ によってノルムが $\|u\|_{L^r} \equiv (\int_{\mathbf{R}} |u(x)|^r\ dx)^{\frac{1}{r}}$ $(1 \leq r \leq \infty)$ で与えられる Banach 空間を表す. 次に, Schwarz 空間 $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ 上の対称作用素 L, H を以下で定義する.

$$
L\phi := \rho\, \phi_{xx} +\ \rho'\, \phi_x, \quad H\phi := \eta\, \phi_{xx} +\ \eta'\, \phi_x,
$$

ここで, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, $\rho, \eta \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ である. さらに作用素 L, H には一様楕円性を仮定する, すなわちある正定数 $\lambda_1, \lambda_2 > 1$ が存在して以下を満たすと仮定する.

$$\lambda_1 \geq \rho(x) \geq \frac{1}{\lambda_1} > 0, \quad \lambda_2 \geq \eta(x) \geq \frac{1}{\lambda_2} > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

次に, 対称形式 $\mathcal{E}_L, \mathcal{E}_H$ をそれぞれ以下で定義する:

$$\mathcal{E}_L(\varphi, \phi) \equiv \int_{\mathbf{R}} \varphi_x(x)\, \rho(x)\, \phi_x(x)\, dx = -\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)(L\phi)(x)\, dx,$$
$$\mathcal{E}_H(\varphi, \phi) \equiv \int_{\mathbf{R}} \varphi_x(x)\, \eta(x)\, \phi_x(x)\, dx = -\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)(H\phi)(x)\, dx.$$

ここで, L, H が一様楕円性を有していることから, これらを $L^2(\mathbf{R})$ 上の non-positive definite self-adjoint operators に拡張することができ, 従って $\mathcal{E}_L, \mathcal{E}_H$ は $L^2(\mathbf{R})$ 上で closable となる (例えば, Fukushima [2] や Ma, Röckner [5] Section II-2 を参照のこと). 従ってその closure をまた同じ記号 $\mathcal{E}_L, \mathcal{E}_H$ を用いて表すことにすると, $L^1(\mathbf{R})$ から $L^{\infty}(\mathbf{R})$ への ultracontractive semigroups e^{tL}, e^{tH} が定義される（Reed, Simon [6] Theorem VIII.15 や [2] Section 2.3 を参照のこと）. 以下の ultracontractive semigroups e^{tL}, e^{tH} の縮小性に関する性質は, 主結果の証明において重要な役割を果たす.

命題 *1* （*Stroock [7]*） L を上で定義した *non-positive definite self-adjoint operator* とする. このとき, 以下の式が成り立つ

(*i*) 任意の $\phi \in L^q$ $(1 \leq q < \infty)$ と $t > 0$ に対して, $e^{tL}\phi \in L^q$ であり,

$$\|e^{tL}\phi\|_{L^q} \leq \|\phi\|_{L^q} \quad (1 \leq q < \infty). \tag{2}$$

(*ii*) 任意の $\phi \in L^2$ と $t > 0$ に対して, $\partial_x e^{tL}\phi \in L^2$ であり, (1) で与えられた λ_1 を用いて,

$$\|\partial_x e^{tL}\phi\|_{L^2} \leq \frac{\lambda_1^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}}\|\phi\|_{L^2}, \tag{3}$$

(*iii*) ある定数 $l = l(\lambda_1) > 0$ が存在して（ λ_1 は (1) で与えられた定数）, 任意の $\phi \in L^1$ と $t > 0$ に対して $e^{tL}\phi \in L^{\infty}$ であり,

$$\|e^{tL}\phi\|_{L^{\infty}} \leq \frac{l}{t^{\frac{1}{2}}}\|\phi\|_{L^1}. \tag{4}$$

(*iv*) ある定数 $k = k(\lambda_1) > 0$ が存在して（λ_1 は (1) で与えられた定数）, 任意の $\phi \in L^1$ と $t > 0$ に対して $e^{tL}\phi \in L^2$ であり,

$$\|e^{tL}\phi\|_{L^2} \leq \frac{k}{t^{\frac{1}{4}}}\|\phi\|_{L^1}. \tag{5}$$

(*v*) 任意の $\phi \in L^{\infty}$ と $t > 0$ に対して $e^{tL}\phi \in L^{\infty}$ であり,

$$\|e^{tL}\phi\|_{L^{\infty}} \leq \|\phi\|_{L^{\infty}}. \tag{6}$$

また, non-positive definite self-adjoint operator H は Sobolev 空間 $H^2(\mathbf{R})$ 上で定義されているので,

$$(\gamma - H)^{-1}(L^2(\mathbf{R})) = H^2(\mathbf{R})$$

が成り立つ. さらに, $\alpha > 0, \gamma > 0$ を定数とし, $u \in L^2$ に対して $v = \alpha(\gamma - H)^{-1}u \in H^2(\mathbf{R})$ とおく（例えば, [5] Theorem 3.24 を参照のこと）. Sobolev の埋蔵定理により,

$$\|v\|_{H^2} \leq C\|u\|_{L^2}, \quad \|v\|_{L^{\infty}} \leq C\|u\|_{L^2}, \quad \|\partial_x v\|_{L^{\infty}} \leq C\|u\|_{L^2}, \tag{7}$$

が成り立つ, ここで, $C = C(\alpha, \gamma, \lambda_2) > 0$ は定数である. 式 (7) もまた, 主結果の証明において大きな役割を果たす.

3 拡張された Keller-Segel 系

次に, 第 2 節で与えた L, H, η を用いて (KS) の拡張である (GKS) を以下で定義する.

$$(GKS)\begin{cases} \partial_t u = Lu - \chi\, \partial_x(u\,\eta\,\partial_x v) & \text{in } \mathbf{R}\times(0,\infty), \\ 0 = Hv - \gamma v + \alpha u & \text{in } \mathbf{R}\times(0,\infty), \\ u(x,0) = \overline{u}(x) \geq 0 & \text{in } \mathbf{R}, \end{cases}$$

ここで, $\overline{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ であり, χ, α, γ は正定数である. また, Banach 空間 X, Y をそれぞれ以下で定義する.

$$X := \{u \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbf{R})) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbf{R}))\ ;\ t^{\frac{1}{2}}(\partial_x u) \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbf{R}))\}, \tag{8}$$

$$Y := L^\infty(0,T;H^2(\mathbf{R})). \tag{9}$$

尚, T は $0 < T < 1$ を満たす正定数である. 本節の最後に, (GKS) の mild solution を定義する.

定義 1 *X, Y をそれぞれ (8), (9) で与えられた Banach 空間とする. L, H, η も第 2 節で与えられたものとする. 関数の組 (u,v) が $u \in X$, $v \in Y$ を満たし, さらに以下の式を満たすとき, (u,v) を $\mathbf{R}\times(0,T)$ 上の (GKS) の mild solution であるという.*

$$\begin{cases} u = e^{tL}\overline{u} - \chi \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)L}\, \partial_x(u(\tau)\,\eta\,\partial_x v(\tau))\, d\tau, & \text{in } \mathbf{R}\times(0,T), \\ v = \alpha(\gamma - H)^{-1}u & \text{in } \mathbf{R}\times(0,T), \\ u(x,0) = \overline{u}(x)(\geq 0) & \text{in } \mathbf{R}, \end{cases}$$

ここで, $\chi > 0, \alpha > 0$, $\gamma > 0$ は (GKS) に現れる定数である.

4 主結果と証明の概略

4.1 主結果

まず, 関数列 $\{u_n\}, \{v_n\}$ を以下で定義する.

$$\begin{cases} u_1(t) = e^{tL}\overline{u}, \\ u_{n+1}(t) = e^{tL}\overline{u} - \chi \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)L}\partial_x\left(u_n(\tau)\,\eta\,\partial_x v_n(\tau)\right) d\tau. \\ v_n(t) = \alpha(\gamma - H)^{-1}\, u_n(t), \qquad n = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{10}$$

主結果は以下の 2 つである.

命題 2 *任意の非負値関数 $\overline{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対して, ある正の数 $T = T(\chi, \alpha, \gamma, \overline{u}, \lambda_1, \lambda_2)$ $(0 < T < 1)$ が存在して, $\mathbf{R}\times(0,T)$ 上の (GKS) の mild solution (u_*, v_*)（ただし $u_* = \lim_{n\to\infty} u_n$, $v_* = \lim_{n\to\infty} v_n$）が一意に存在する（定義 1 および後述の (29) – (32) を参照のこと）.*

定理 1 *任意の非負値関数 $\overline{u} \in L^2 \cap L^\infty$ に対しても, 命題 2 と同様の結果が成り立つ.*

4.2 定理 1 における解の存在性の証明の概略

本稿では解の存在性に関してのみ, 証明の概略を紹介する. まず, 命題 2 における解の存在性の証明の概略を与える. 証明は, 以下の 4 つのステップに分けられる.

Step 1.

任意の $T \in (0,1)$ に対して, ある数列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ が存在して, 以下を満たすことを示す.

$$\sup_{0<t<T} \|u_n(t)\|_{L^2} \le A_n, \tag{11}$$

$$\sup_{0<t<T} \|u_n(t)\|_{L^\infty} \le B_n, \tag{12}$$

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}} \|\partial_x u_n(t)\|_{L^2} \le C_n. \tag{13}$$

実際に, 各初項は

$$A_1 := \|\overline{u}\|_{L^2},\ B_1 := \|\overline{u}\|_{L^\infty},\ C_1 := \lambda_1^{\frac{1}{2}} \|\overline{u}\|_{L^2},$$

とすればよい. 次に, (11), (12), (13) が成り立つと仮定する. (2) – (7) および漸化式 (10) を用いることによって, 以下の評価式が成り立つ.

$$\sup_{0<t<T} \|u_{n+1}(t)\|_{L^2} \le A_1 + D_1 A_n C_n T^{\frac{1}{4}} + D_1 A_n^2 T^{\frac{3}{4}},$$

$$\sup_{0<t<T} \|u_{n+1}(t)\|_{L^\infty} \le B_1 + D_2 A_n C_n + D_2 A_n^2 T^{\frac{1}{2}},$$

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}} \|u_{n+1}(t)\|_{L^2} \le D_3 A_n C_n T^{\frac{1}{2}} + D_3 A_n B_n T,$$

ここで, $B(p,q)$ $(p,q>0)$ はベータ関数を表し, 正定数 $C = C(\alpha,\gamma,\lambda_2)$, $k = k(\lambda_1)$, $l = l(\lambda_1)$ を用いて,

$$D_1 := \max\{\chi k C \lambda_2\, B(\frac{3}{4},\frac{1}{2}),\ \frac{4}{3}\chi k(\gamma C + \alpha)\},$$

$$D_2 := \max\{\chi l C \lambda_2 \pi, 2\chi l(\gamma C + \alpha)\},$$

$$D_3 := \max\{\chi C \lambda_1^{\frac{1}{2}} \lambda_2 \pi,\ 2\chi(\gamma C + \alpha)\lambda_1^{\frac{1}{2}}\},$$

である. さらに,

$$D_0 := \max\{A_1, B_1, C_1\}, \tag{14}$$

$$D_* := \max\{D_1, D_2, D_3\}. \tag{15}$$

ただし, $D_0 = D_0(\overline{u},\lambda_1)$ $D_* = D_*(\chi,\alpha,\gamma,\lambda_1,\lambda_2)$ である. これらにより,

$$A_{n+1} := D_0 + D_* A_n C_n T^{\frac{1}{4}} + D_* A_n^2 T^{\frac{3}{4}}, \tag{16}$$

$$B_{n+1} := D_0 T^{-\frac{1}{4}} + D_* A_n C_n + D_* A_n^2 T^{\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

$$C_{n+1} := D_0 + D_* A_n C_n T^{\frac{1}{4}} + D_* A_n B_n T, \tag{18}$$

によって数列 $\{A_n\}, \{B_n\}, \{C_n\}$ を定義すればよい.

Step 2.

Step 1. において定義された数列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ が上に有界であることを示す. これにより

任意の自然数 n に対して $u_n \in X$ である.

3式 (16), (17), (18) から導かれる x, y, z に関する以下の方程式を用意する.

$$x = D_0 + D_* \, x \, z \, T^{\frac{1}{4}} + D_* \, x^2 T^{\frac{3}{4}}, \tag{19}$$

$$y = D_0 T^{-\frac{1}{4}} + D_* \, x \, z + D_* x^2 T^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

$$z = D_0 + D_* x \, z \, T^{\frac{1}{4}} + D_* x \, y \, T, \tag{21}$$

ここで, D_0, D_* は (14), (15) で与えられた定数であり, $0 < T < 1$ である. 上式より,

$$x = yT^{\frac{1}{4}}, \;\; x = z,$$

$$D_*(T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{3}{4}})x^2 - x + D_0 = 0, \tag{22}$$

であることが従う. (22) は x に関する2次方程式であり, 実数解の存在条件は以下である.

$$1 - 4D_*(T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{3}{4}})D_0 \geq 0. \tag{23}$$

(23) は十分に小さい $T > 0$ に対して成立することに注意する. 条件 (23) のもとで, (22) の解のうち小さい方を x_* とおく. つまり,

$$x_* := \frac{1 - \sqrt{1 - 4D_*(T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{3}{4}})D_0}}{2D_*(T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{3}{4}})}.$$

さらに以下を定義する.

$$y_* := x_* T^{-\frac{1}{4}}, \; z_* := x_*.$$

これにより, x_*, y_*, z_* は方程式 (19), (20), (21) の解である. 尚, x_*, y_*, z_* は T に依存することに注意をする. このとき, 数学的帰納法を用いて, 以下は容易に示される.

$$A_n \leq x_*, \;\; B_n \leq y_*, \;\; C_n \leq z_*.$$

Step 3.

関数列 $\{u_n\}$ が Banach 空間 X における Cauchy 列であることを示す. $\{U_n\}$ を以下で定義する.

$$U_{n+1}(t) := u_{n+1}(t) - u_n(t) \;\; (n \geq 1), \;\; U_1(t) := u_1(t).$$

このとき, 数列 $\{\tilde{A}_n\}$, $\{\tilde{B}_n\}$, $\{\tilde{C}_n\}$ が存在して以下を満たすことが示される.

$$\sup_{0<t<T} \|U_n(t)\|_{L^2} \leq \tilde{A}_n,$$

$$\sup_{0<t<T} \|U_n(t)\|_{L^\infty} \leq \tilde{B}_n,$$

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}} \|\partial_x U_n(t)\|_{L^2} \leq \tilde{C}_n.$$

実際, 以下のように与えればよい.

$$\tilde{A}_1 := D_0, \;\; \tilde{B}_1 := D_0 T^{-\frac{1}{4}}, \;\; \tilde{C}_1 := D_0. \tag{24}$$

Step 1. と同様にして,

$$\sup_{0<t<T}\|U_{n+1}(t)\|_{L^2} \le \tilde{D}_1(z_*\tilde{A}_n + x_*\tilde{C}_n)T^{\frac{1}{4}} + \tilde{D}_1 x_*\tilde{A}_n T^{\frac{3}{4}},$$

$$\sup_{0<t<T}\|U_{n+1}(t)\|_{L^\infty} \le \tilde{D}_2(z_*\tilde{A}_n + x_*\tilde{C}_n) + \tilde{D}_2 x_*\tilde{A}_n T^{\frac{1}{2}},$$

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|\partial_x U_{n+1}(t)\|_{L^2} \le \tilde{D}_3(z_*\tilde{A}_n + x_*\tilde{C}_n)T^{\frac{1}{2}} + \tilde{D}_3(y_*\tilde{A}_n + x_*\tilde{B}_n)T, \tag{25}$$

が成り立つ. ここで,

$$\tilde{D}_1 := \max\{\chi k C\lambda_2 B(\frac{3}{4},\frac{1}{2}), \frac{8}{3}\chi k(\gamma C+\alpha)\},$$

$$\tilde{D}_2 := \max\{C\chi\lambda_2\pi,\ 4(\gamma C+\alpha)\},$$

$$\tilde{D}_3 := \max\{C\chi\lambda_1^{\frac{1}{2}}\lambda_2\pi, \chi\lambda_1^{\frac{1}{2}}(\gamma C+\alpha)\}.$$

さらに, $\tilde{D}_* = \tilde{D}_*(\chi,\alpha,\gamma,\lambda_1,\lambda_2)$ を以下で定義する.

$$\tilde{D}_* := \max\{\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, 2\tilde{D}_3\}.$$

よって, 漸化式

$$\tilde{A}_{n+1} := \tilde{D}_*(z_*\tilde{A}_n + x_*\tilde{C}_n)T^{\frac{1}{4}} + \tilde{D}_* x_*\tilde{A}_n T^{\frac{3}{4}},$$

$$\tilde{B}_{n+1} := \tilde{D}_*(z_*\tilde{A}_n + x_*\tilde{C}_n) + \tilde{D}_* x_*\tilde{A}_n T^{\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{C}_{n+1} := \tilde{D}_*(z_*\tilde{A}_n + x_*\tilde{C}_n)T^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\tilde{D}_*(y_*\tilde{A}_n + x_*\tilde{B}_n)T, \tag{26}$$

によって数列 $\{\tilde{A}_n\}$, $\{\tilde{B}_n\}$, $\{\tilde{C}_n\}$ を定義すればよい. 尚, $0<T<1$ であるので, (25), (26) において $T^{\frac{1}{2}} < T^{\frac{1}{4}}$ であることに注意のこと. 上式より以下が従う.

$$\tilde{B}_n = \tilde{A}_n T^{-\frac{1}{4}},\ \ \tilde{A}_n = \tilde{C}_n.$$

$$\tilde{A}_{n+1} = (\tilde{D}_*(x_*+z_*)T^{\frac{1}{4}} + \tilde{D}_* x_* T^{\frac{3}{4}})\tilde{A}_n. \tag{27}$$

(27) は数列 $\{\tilde{A}_n\}$ が公比 $\tilde{D}_*(x_*+z_*)T^{\frac{1}{4}} + \tilde{D}_* x_* T^{\frac{3}{4}}$ の等比数列であることを意味するので, 条件

$$\tilde{D}_*(x_*+z_*)T^{\frac{1}{4}} + \tilde{D}_* x_* T^{\frac{3}{4}} < 1, \tag{28}$$

のもとで, $\tilde{A}_n$ は0に収束する. 尚, 条件 (28) は十分に小さい $T = T(D_0, D_*, \tilde{D}_*) = T(\chi,\alpha,\gamma,\overline{u},\lambda_1,\lambda_2)$ に対して成り立つ. これより以下が従う.

$$\sup_{0<t<T}\|(u_{n+1}-u_n)(t)\|_{L^2} = \sup_{0<t<T}\|U_{n+1}(t)\|_{L^2} \le \tilde{A}_{n+1} \to 0\ (n\to\infty).$$

$$\sup_{0<t<T}\|(u_{n+1}-u_n)(t)\|_{L^\infty} \le \tilde{B}_{n+1} \to 0\ (n\to\infty),$$

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|\partial_x(u_{n+1}-u_n)(t)\|_{L^2} \le \tilde{C}_{n+1} \to 0\ (n\to\infty).$$

ここで, 等比数列 $\{\tilde{A}_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\tilde{A}_k$ は Cauchy 列である. 従って,

$$\sup_{0<t<T}\|(u_{n+m}-u_n)(t)\|_{L^2} \le \tilde{A}_{n+1} + \tilde{A}_{n+2} + \cdots \tilde{A}_{n+m} = S_{n+m} - S_n \to 0\quad (n,m\to\infty).$$

同様にして,

$$\sup_{0<t<T} \|(u_{n+m}-u_n)(t)\|_{L^\infty} \to 0 \ \ (n, m \to \infty),$$

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}} \|\partial_x (u_{n+m}-u_n)(t)\|_{L^2} \to 0 \ \ (n, m \to \infty).$$

これにより, 関数列 $\{u_n\}$ が Banach 空間 X における Cauchy 列であることが示された.

Step 4.

(GKS) の mild solution が存在することを示す. X の完備性により, ある $u_* \in X$ が存在して,

$$\sup_{0<t<T} \|(u_n-u_*)(t)\|_{L^2} \to 0 \ (n \to \infty), \tag{29}$$

$$\sup_{0<t<T} \|(u_n-u_*)(t)\|_{L^\infty} \to 0 \ (n \to \infty), \tag{30}$$

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}} \|\partial_x (u_n-u_*)(t)\|_{L^2} \to 0 \ (n \to \infty), \tag{31}$$

を満たす. また,

$$v_* := \alpha(\gamma - H)^{-1} u_*. \tag{32}$$

このようにして得られた (u_*, v_*) は (10) を満たすので, これが mild solution である.
定理 1 は, $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ が $L^2 \cap L^\infty$ で稠密であることに注意すれば, 命題 2 より容易に従う. ■

References

[1] Bellomo, N., Bellouquid, A., Tao, Y. and Winkler, M., *T*oward a mathematical theory of KellerSegel models of pattern formation in biological tissues, Math. Models Methods Applo. Sci., **25** (2015), 1663-1763.

[2] Fukushima, M., *D*irichlet forms and Markov processes, Elsevier North-Holland, 1980.

[3] Hillen, T. and Painter, K.J, *A* user ' s guide to PDE models for chemotaxis, J. Math. Biol., **58** (2009),183-217.

[4] Keller, E.F and Segel, L.A., *I*nitiation of Slime Mold Aggregation Viewed as Instability, J Theor. Biol., **26** (1970), 399-415.

[5] Ma, Z. and Röckner, M., *I*ntroduction to the Theory of (Non-Symmetric) Dirichlet Forms, Springer-Verlag, 1992.

[6] Reed, M. and Simon, B., *F*unctional Analysis, Academic Press, Inc.(1972).

[7] Stroock, D.W., *D*iffusion semigroups corresponding to uniformly elliptic divergence form operators, Séminaire de probabilitiés (Strasbourg), tome **2** (1988), 316-347.

[8] Yahagi, Y., *C*onstruction of a unique mild solution of one-dimensional Keller-Segel systems with uniformly elliptic operators having variable coefficients , Mathematica Slovaca, to appear.

Faculty of Informatics, Tokyo University of information Sciences,
4-1 Onaridai, Wakaba-ku, Chiba, 265-8501, Japan
E-mail address: yy206313@rsch.tuis.ac.jp