数理解析研究所講究録
第2080巻 2018年 67-93

Differential equations with unbounded delay, and dynamics in spaces without natural metrics

東北大学 数理科学連携研究センター　西口 純矢
Junya Nishiguchi
Research Alliance Center for Mathematical Sciences,
Tohoku University

1 イントロダクション

次がこのノートにおける主定理である．用語・記法や定義については，以下の節を参照のこと．

定理 A ([16]). I を履歴区間，E を Banach 空間，$H \subset \mathrm{Map}(I, E)$ を C^0-延長可能かつ C^0-統制された履歴空間とする．このとき，以下の命題は同値である：

(a) 条件
- $\mathrm{dom}(F)$ は開集合
- $F\colon \mathrm{dom}(F) \subset \mathbb{R} \times H \to E$ は連続かつ，C^0-延長に関して一様に局所 Lipschitz

を満たす任意の履歴汎関数 F に対して，RFDE $(*)$ の初期値問題は適切である．

(b) $\dot{x} = 0$ を H 上の遅れ型関数微分方程式と考えたときの解半群 $(S_H(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ は，局所同程度連続 C_0 半群である．

このノートは以下のように構成されている．第 2 節で，遅延微分方程式の履歴空間による遅れ型関数微分方程式としての定式化とその初期値問題を述べる．第 3 節では，C^0-延長を用いて履歴空間の性質を調べる．ここで，履歴空間の C^0-延長可能性と C^0-統制という概念を導入する．第 4 節で，C^0-延長を用いた履歴汎関数の Lipschitz 条件を導入する．第 5 節は初期値問題の適切性を扱い，主結果を証明する．第 6 節では，自励系と非自励系の局所半流れを扱い，脱出時刻関数の下半連続性や局所半流れの連続性のための条件を調べる．この節の内容は他の節と独立している．

2 遅延微分方程式と履歴空間

2.1 履歴空間による遅延微分方程式の定式化

2つの条件 (i) $I \subset \mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$ と (ii) $0 \in I$ を満たす $\mathbb{R}$ の区間 I を考える．このような区間 I を **履歴区間** (history interval) とよぶ．$\mathbb{R}$ の区間 J と履歴区間 I に対して，$J + I := \{t + \theta : t \in$

$J,\ \theta \in I\}$ と書く.

記法. 一般に写像 f の定義域を $\mathrm{dom}(f)$ で表す. また, 集合 A, B に対して, A から B への写像全体の集合を $\mathrm{Map}(A, B)$ と表す.

定義 2.1. E を集合とする. $\mathbb{R}$ の区間 J, $\mathrm{dom}(x) \supset J + I$ なる写像 $x\colon \mathrm{dom}(x) \to E$, および $t \in J$ に対して, $I_t x \in \mathrm{Map}(I, E)$ を

$$I_t x(\theta) = x(t+\theta) \quad (\theta \in I)$$

で定める. $I_t x$ を履歴区間 I を伴う x の $t \in J$ における**履歴** (history) とよぶ. 写像

$$J \ni t \mapsto I_t x \in \mathrm{Map}(I, E)$$

を, 履歴区間 I を伴う x の**履歴曲線** (history curve) とよぶ.

注 1. 履歴区間 I を伴う x の t における履歴 $I_t x$ は, 区間 I を指定した上で通常 x_t と表される. この記法は, Hale [7, 8, 9] により導入された.

未知関数 x の履歴の概念を用いて, 遅れ型関数微分方程式を以下のように導入する.

定義 2.2 (ref. [11]). I を履歴区間, $E = (E, \|\cdot\|_E)$ を Banach 空間, $H \subset \mathrm{Map}(I, E)$ を写像に対する和とスカラー倍を伴う位相線型空間とする. 写像 $F\colon \mathrm{dom}(F) \subset \mathbb{R} \times H \to E$ に対して, 微分方程式

$$\dot{x}(t) = F(t, I_t x) \quad (t \in \mathbb{R},\ x(t) \in E) \tag{$*$}$$

を, **履歴空間 H をもつ遅れ型関数微分方程式** (retarded functional differential equation with history space H; RFDE with history space H) とよぶ. F を $(*)$ の**履歴汎関数** (history functional) とよぶ.

ここで, $H \subset \mathrm{Map}(I, E)$ が位相線型空間であるとは, H が関数の和とスカラー倍について閉じており, それらの線型演算が連続であることを意味する (ref. Yosida [21]).

設定. 以後, 定義 2.2 の設定

- I は履歴区間
- $E = (E, \|\cdot\|_E)$ は未知関数 $x(\cdot)$ が値を取る Banach 空間
- $H \subset \mathrm{Map}(I, E)$ は関数の和とスカラー倍による位相線型空間

の下で RFDE $(*)$ を考える. 仮定より, 零写像 $\mathbf{0}\colon I \to E$ は H に属する.

定義 2.3. J を $\mathbb{R}$ の区間とする. 写像 $x\colon \mathrm{dom}(x) \subset \mathbb{R} \to E$ が以下の条件

(i) $\mathrm{dom}(x) \supset J + I$,
(ii) 任意の $t \in J$ に対して $(t, I_t x) \in \mathrm{dom}(F)$,
(iii) 制限写像 $x|_J\colon J \to E$ は微分可能で, すべての $t \in J$ に対して $(*)$ を満たす

が成り立つとき，x は $(*)$ の J 上の**解**という．

2.2 遅れ型関数微分方程式の初期値問題

2.2.1 初期値問題

定義 2.4. $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して，方程式系

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, I_t x), & t \geq t_0, \\ I_{t_0} x = \phi_0 \end{cases} \tag{1}$$

を考える．$(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ をパラメータとする方程式系の族を，RFDE $(*)$ の**初期値問題** (initial value problem; IVP) という．ここで，$\dot{x}(t_0)$ は x の t_0 における右微分を表す．t_0 を左端点とする左に閉じた区間 J に対して，RFDE $(*)$ の J 上の解 x で $I_{t_0} x = \phi_0$ を満たすものを (1) の解という．

注 2. (1) の解 $x \colon J + I \to E$ に対して，$T := \sup(-t_0 + J)$ と置けば，

- $J = [t_0, t_0 + T]$ $(0 < T < \infty)$
- $J = [t_0, t_0 + T)$ $(0 < T \leq \infty)$

のいずれかである．ここで，T は解 x の**存在時間** (time of existence) である．

2.2.2 局所一意性と極大解

定義 2.5. $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ を固定し，(1) は解をもつと仮定する．(1) の任意の解 $x_1 \colon J_1 + I \to E$ と $x_2 \colon J_2 + I \to E$ に対して，

$$x_1|_J = x_2|_J$$

となる t_0 を左端点とする左に閉じた区間 $J \subset J_1 \cap J_2$ が存在するとき，(1) の解は**局所一意** (locally unique) であるという．これがすべての $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して成り立つとき，RFDE $(*)$ の初期値問題の解は局所一意であるという．

補題 2.6. RFDE $(*)$ の初期値問題の解は局所一意であると仮定する．$(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ とする．$x_1, x_2 \colon J + I \to E$ が (1) の解ならば，$x_1 = x_2$ である．

証明. $J = [t_0, t_0 + T]$ $(T > 0)$ のときを考える．$J = [t_0, t_0 + T)$ $(0 < T \leq \infty)$ のときは，$0 < \tau < T$ にたいして $[t_0, t_0 + \tau]$ を考えることで，この場合に帰着されることに注意する．

以下で定義される集合 J を考える：

$$J := \{\tau \in [t_0, t_0 + T] : x_1|_{[t_0, \tau]} = x_2|_{[t_0, \tau]}\}.$$

仮定より，$J \neq \emptyset$ である．したがって，$\alpha := \sup J$ は存在し，$t_0 < \alpha \leq t_0 + T$ である．すると，$x_1|_{[t_0, \alpha)} = x_2|_{[t_0, \alpha)}$ で，$x_1|_{[t_0, t_0+T]}$ と $x_2|_{[t_0, t_0+T]}$ の連続性より

$$x_1|_{[t_0, \alpha]} = x_2|_{[t_0, \alpha]}$$

となる．$\alpha = t_0 + T$ のとき結論は成り立つ．そこで，$\alpha < t_0 + T$ と仮定して矛盾を導く．

$$(t_1, \phi_1) := (\alpha, I_\alpha x_1) = (\alpha, I_\alpha x_2)$$

とおく．すると，$(t_1, \phi_1) \in \mathrm{dom}(F)$ で，$x_1|_{[\alpha, t_0+T]+I}, x_2|_{[\alpha, t_0+T]+I}$ は

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, I_t x), \quad t \geq t_1, \\ I_{t_1} x = \phi_1 \end{cases}$$

の解である．この方程式系の解は局所一意であるので，$\delta > 0$ が存在して $x_1(t) = x_2(t)$ がすべての $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ に対して成り立つ．これは，$\alpha = \sup J$ に反する．よって，$\alpha = t_0 + T$ である． □

命題 2.7. $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ を固定する．(1) の解 $x_1 \colon J_1 + I \to E$, $x_2 \colon J_2 + I \to E$ に対して，二項関係 $\leq$ を

$$x_1 \leq x_2 \iff J_1 \subset J_2 \text{ かつ } x_1|_{J_1} = x_2|_{J_1}$$

で定めると，$\leq$ は半順序である．さらに，RFDE $(*)$ の初期値問題の解が局所一意であるとき，すべての $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して，$\leq$ は全順序である．

証明．（反射律）明らかである．

（反対称律）$x_1 \leq x_2$ かつ $x_2 \leq x_1$ ならば $J_1 = J_2$ であるので，$x_1 = x_2$ である．

（推移律）$x_1 \leq x_2$ かつ $x_2 \leq x_3$ と仮定する．ただし，$\mathrm{dom}(x_3) = J_3 + I$ とする．すると，$J_1 \subset J_2$ かつ $J_2 \subset J_3$ より $J_1 \subset J_3$．さらに，$x_1|_{J_1} = x_2|_{J_1}$ かつ $x_2|_{J_2} = x_3|_{J_2}$ より $x_1|_{J_1} = x_3|_{J_1}$ である．よって，$x_1 \leq x_3$ が成り立つ．

（全順序律）さらに，(1) の解は局所一意であると仮定する．(1) の解 x_1, x_2 に対して，T_1, T_2 をそれぞれの解の存在時間とする．すると，$T_1 \leq T_2$ であるか，$T_2 \leq T_1$ のいずれかが成り立つ．したがって，一般性を失わずに $T_1 \leq T_2$ と仮定してよい．すなわち $J_1 \subset J_2$ で，このとき補題 2.6 より，

$$x_1|_{J_1} = x_2|_{J_1}$$

が成り立つ．よって，$x_1 \leq x_2$ である． □

定義 2.8. 各 $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して，(1) の解に対して定義された半順序に関する極大元を，(1) の**極大解** (maximal solution) とよぶ．

注 3. RFDE (1) の解が局所一意であるとき，任意の $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して，(1) の極大解は一意である．これは，$\leq$ が全順序であることの帰結である．

次の補題の証明は省略する．

補題 2.9. RFDE (1) の初期値問題は解をもつと仮定する．任意の $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して，$x \colon J + I \to E$ が (1) の極大解ならば，ある $0 < T \leq \infty$ に対して $J = [t_0, t_0 + T)$ となる．

定理 2.10. RFDE $(*)$ の初期値問題は局所一意解をもつと仮定する．すると，各 $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して $T_F(t_0, \phi_0) \in (0, \infty]$ が存在し，

$$x_F(\cdot; t_0, \phi_0) \colon \bigl[t_0, t_0 + T_F(t_0, \phi_0)\bigr) + I \to E \tag{2}$$

は (1) の一意的な極大解である．

証明. $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ を固定する．次で定義される集合

$$S := \{x\colon [t_0, t_0 + T_x] + I \to E : T_x > 0 \text{ かつ } x \text{ は } (1) \text{ の解}\}$$

を考える．$J := \bigcup_{x \in S} [t_0, t_0 + T_x]$ と置いて，$X\colon J + I \to E$ を

- $t \in [t_0, t_0 + T_x]$ のとき $X(t) := x(t)$

と定める．補題 2.6 より，これは well-defined である．

X の極大性を確認する．$\widetilde{x}\colon \widetilde{J} + I \to E$ を $\widetilde{J} \supset J$ であるような (1) の解とする．次の二つの場合を考える．

(i) $\widetilde{J} = [t_0, t_0 + T]$ $(T > 0)$ のとき：$\widetilde{x} \in S$ であるから，$\widetilde{J} \subset J$ である．

(ii) $\widetilde{J} = [t_0, t_0 + T)$ $(0 < T \leq \infty)$ のとき：$0 < \tau < T$ に対して，$\widetilde{x}_\tau := \widetilde{x}|_{[t_0, t_0+\tau]+I}$ とする．このようなすべての τ に対して $\widetilde{x}_\tau \in S$ であるから，

$$\widetilde{J} = \bigcup_{0<\tau<T} [t_0, t_0 + \tau] \subset J.$$

したがって，いずれの場合でも $\widetilde{J} = J$ が従い，X は極大解で一意である．補題 2.9 より，ある $T(t_0, \phi_0) \in (0, \infty]$ を用いて $J = [t_0, t_0 + T(t_0, \phi_0))$ と表される． □

3 C^0-延長と履歴空間

定義 3.1. $(t_0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times \mathrm{Map}(I, E)$ とする．t_0 を左端点とする左に閉じた区間 J と写像 $\gamma\colon J + I \to E$ に対して，条件 (i) $I_{t_0}\gamma = \phi_0$, (ii) 制限 $\gamma|_J\colon J \to E$ は連続が成り立つとき，γ を (t_0, ϕ_0) の C^0-延長 (C^0-continuation) とよぶ．$t_0 = 0$ のとき，単に ϕ_0 の C^0-延長とよぶ．

3.1 C^0-延長可能性

定義 3.2. H の各元の任意の C^0-延長 $\gamma\colon \mathbb{R}_+ + I \to E$ に対して，$I_t\gamma \in H$ がすべての $t \in \mathbb{R}_+$ に対して成り立つとき，H は **C^0-延長について閉じている** (closed under C^0-continuations) という．さらに，履歴曲線 $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto I_t\gamma \in H$ が連続であるとき，H は **C^0-延長可能** (C^0-continuable) であるという．

次の補題は平行移動により得られるので，証明は省略する．

補題 3.3. H が C^0-延長可能であるための必要十分条件は，任意の $(t_0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times H$ と (t_0, ϕ_0) の任意の C^0-延長 $\gamma\colon J + I \to E$ (J は閉区間) に対して以下の条件が成り立つことである：

- すべての $t \in J$ に対して $I_t\gamma \in H$ かつ，履歴曲線 $J \ni t \mapsto I_t\gamma \in H$ は連続.

C^0-延長可能に関する上の条件は，$E=\mathbb{R}^n$ で H が Banach 空間の場合に，無限遅れの微分方程式を扱うために Hale [9] により導入された．

記法. $C(I,E)$ で I から E への連続写像全体の空間を表す．$\phi\in C(I,E)$ に対して，そのサポートを $\mathrm{supp}(\phi)$ で表す：

$$\mathrm{supp}(\phi):=\mathrm{cl}\{\theta\in I:\phi(\theta)\neq 0\}.$$

$C_{\mathrm{c}}(I,E)$ で，サポートがコンパクトな I から E への連続写像全体の集合を表す．$\phi\in C(I,E)$ に対して $\|\phi\|_\infty$ で上限ノルム $\|\phi\|_\infty:=\sup_{\theta\in I}\|\phi(\theta)\|_E$ を表す．

命題 3.4. H は C^0-延長について閉じているとする．このとき，ある $r>0$ に対して $I=[-r,0]$ であるならば，$C(I,E)\subset H$ が成り立つ．

証明. $\phi\in C(I,E)$ とする．$0\in E$ と $\phi(-r)\in E$ をつなぐ線分 $\ell\colon[0,1]\to E$

$$\ell(s):=s\phi(-r)\quad(s\in[0,1])$$

を考える．写像 $\gamma\colon\mathbb{R}_+ + I\to E$ を

$$\gamma(t)=\begin{cases}0, & t\in I,\\ \ell(t), & t\in[0,1],\\ \phi(t-(r+1)), & t\in[1,r+1],\\ \phi(0), & t\geq r+1\end{cases}$$

と定めると，γ は $\mathbf{0}\in H$ の C^0-延長で，$\phi=I_{r+1}\gamma\in H$ である． □

命題 3.5 (ref. [12]). H は C^0-延長について閉じているとする．このとき，$I=\mathbb{R}_-$ ならば，$C_{\mathrm{c}}(I,E)\subset H$ が成り立つ．

証明. $\phi\in C_{\mathrm{c}}(I,E)$ とする．$\mathrm{supp}(\phi)\subset[-r,0]$ となる $r>0$ をとる．写像 $\gamma\colon[0,r]+I\to E$ を

$$\gamma(t)=\phi(t-r)\quad(t\in(-\infty,r])$$

で定める．すると，γ は $\mathbf{0}\in H$ の C^0-延長で，$\phi=I_r\gamma\in H$ である． □

3.2 C^0-統制された位相

定義 3.6 ([16]). H は C^0-延長について閉じているとする．任意の $T>0$ と $\mathbf{0}\in H$ の任意の近傍 N に対して，次を満たす $\delta>0$ が存在するとき，H は **C^0-統制されている** (C^0-regulated) という：$\mathbf{0}$ の任意の C^0-延長 $\gamma\colon[0,T]+I\to E$ に対して，

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\gamma(t)\|_E\leq\delta\implies\forall t\in[0,T]\ \ I_t\gamma\in N.$$

3.2.1 C^0-統制と位相の比較

定理 3.7. H は C^0-延長について閉じているとする．ある $r>0$ に対して $I=[-r,0]$ であるとき，以下の性質は同値である：

(a) H は C^0-統制されている．
(b) H の位相は $C(I,E)$ 上で一様収束の位相より粗い．

証明. 性質 (b) は次と同値であることに注意する：$\mathbf{0}\in H$ の任意の近傍 N に対して，$\delta>0$ が存在し，すべての $\phi\in C(I,E)$ に対して

$$\|\phi\|_\infty \le \delta \implies \phi\in N.$$

(a) $\Rightarrow$ (b): N を $\mathbf{0}\in H$ の近傍とし，$T=r+1$ と取る．命題 3.4 の証明より，任意の $\phi\in C(I,E)$ に対して，

$$\phi = I_T\gamma,\quad \sup_{t\in[0,T]}\|\gamma(t)\|_E \le \|\phi\|_\infty$$

となる $\mathbf{0}$ の C^0-延長 $\gamma\colon \mathbb{R}_+ + I\to E$ が取れる．したがって，定義 3.6 により (b) が成り立つ．

(b) $\Rightarrow$ (a): $T>0$ とし，N を $\mathbf{0}\in H$ の近傍とする．任意の $\phi\in C(I,E)$ に対して，$\|\phi\|_\infty\le\delta\Rightarrow\phi\in N$ が成り立つような $\delta>0$ を取る．$\gamma\colon [0,T]+I\to E$ を $\mathbf{0}$ の C^0-延長とする．すべての $t\in[0,T]$ に対して，$I_t\gamma\in C(I,E)$ かつ

$$\|I_t\gamma\|_\infty \le \sup_{t'\in[0,T]}\|\gamma(t')\|_E$$

である．したがって，$\sup_{t'\in[0,T]}\|\gamma(t')\|_E\le\delta$ ならば，$I_t\gamma\in N$ がすべての $t\in[0,T]$ について成り立つ．ゆえに (a) が成り立つ． □

定理 3.8 (cf. [17])**.** H は C^0-延長について閉じているとする．$I=\mathbb{R}_-$ のとき，以下の性質は同値である：

(a) H は C^0-統制されている．
(b) 任意の $r>0$ に対して，H の位相は $\{\phi\in C_c(I,E) : \mathrm{supp}(\phi)\subset[-r,0]\}$ 上で一様収束の位相より粗い．

証明. (a) $\Rightarrow$ (b): $r>0$ とし，$\mathbf{0}\in H$ の近傍 N をとる．H は C^0-統制されているので，$T=r$ とこの N に対して $\delta>0$ が存在し，$\mathbf{0}$ の任意の C^0-延長 $\gamma\colon[0,r]+I\to E$ に対して

$$\sup_{t\in[0,r]}\|\gamma(t)\|_E\le\delta \implies \forall t\in[0,r]\ \ I_t\gamma\in N$$

が成り立つ．

$\phi\in C_c(I,E)$ を $\mathrm{supp}(\phi)\subset[-r,0]$ とすると，平行移動により $\mathbf{0}$ の C^0-延長 $\gamma_\phi\colon[0,r]+I\to E$ で $I_r\gamma=\phi$ なるものを得る．

$$\sup_{t\in[0,r]}\|\gamma_\phi(t)\|_E=\|\phi\|_\infty$$

であるので，$\|\phi\|_\infty \le \delta$ ならば上の δ の取り方より $\phi \in N$ となる．よって，(b) が成り立つ．

(b) $\Rightarrow$ (a): $T > 0$ と $\mathbf{0} \in H$ の近傍 N を取る．$r = T$ として条件 (b) を適用すると，$\delta > 0$ が存在して，$\mathrm{supp}(\phi) \subset [-T, 0]$ なる任意の $\phi \in C_c(I, E)$ に対して

$$\|\phi\|_\infty \le \delta \implies \phi \in N$$

となる．

$\mathbf{0}$ の C^0-延長 $\gamma\colon [0, T] + I \to E$ と $t \in [0, T]$ に対して，

$$\mathrm{supp}(I_t\gamma) \subset [-t, 0] \subset [-T, 0],$$
$$\|I_t\gamma\|_\infty = \sup_{t' \in [0,t]} \|\gamma(t')\|_E \le \sup_{t' \in [0,T]} \|\gamma(t')\|_E$$

より，$\sup_{t' \in [0,T]} \|\gamma(t')\|_E \le \delta$ ならば上の δ の取り方より $I_t\gamma \in N$ となる．よって，(a) が成り立つ． □

注 4. 条件 (b) は，Schumacher [17] が用いた履歴の空間 $\mathcal{B}$ に関する仮説の 1 つである．

補題 3.9. $\gamma\colon \mathbb{R}_+ + I \to E$ を $\mathbf{0}$ の C^0-延長とする．このとき，履歴曲線 $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto I_t\gamma \in C_c(I, E)$ は一様収束の位相に関して連続である．

証明. $t_0 \in \mathbb{R}_+$ を固定し，$t = t_0$ における連続性を示す．

$$\|I_t\gamma - I_{t_0}\gamma\|_\infty = \sup_{\theta \in I} \|\gamma(t + \theta) - \gamma(t_0 + \theta)\|_E$$

であるので，γ が $I \cup [0, t_0 + 1]$ 上で一様連続であれば

$$\|I_t\gamma - I_{t_0}\gamma\|_\infty \to 0 \quad (\text{as } t \to t_0)$$

が従う．$\gamma|_I = \mathbf{0}$ であるので γ は I 上で一様連続で，$[0, t_0 + 1]$ はコンパクトであるので $\gamma|_{[0,t_0+1]}$ も一様連続である．したがって，γ は一様連続となり，履歴曲線の連続性が従う． □

系 1. H は C^0-延長について閉じているとする．H が C^0-統制されているならば，$\mathbf{0}$ の任意の C^0-延長 $\gamma\colon \mathbb{R}_+ + I \to E$ に対して，履歴曲線 $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto I_t\gamma \in H$ は連続である．

証明. $t_0 \in \mathbb{R}_+$ を固定し，$t = t_0$ における連続性を示す．$t \in [0, t_0 + 1]$ に対して $\mathrm{supp}(I_t\gamma) \subset [-(t_0 + 1), 0]$ である．したがって，定理 3.7, 3.8 と補題 3.9 より，履歴曲線 $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto I_t\gamma \in H$ の $t = t_0$ における連続性が従う． □

3.2.2 C^0-統制のための十分条件

命題 3.10. $H = (H, |\cdot|_H)$ を C^0-延長について閉じたセミノルム空間とする．連続写像 $K\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が存在して，$\mathbf{0}$ のすべての C^0-延長 $\gamma\colon \mathbb{R}_+ + I \to E$ とすべての $t \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$|I_t\gamma|_H \le K(t) \cdot \sup_{t' \in [0,t]} \|\gamma(t')\|_E \tag{3}$$

が成り立つならば，H は C^0-統制されている．

証明. $T>0$ とし, N を $\mathbf{0}\in H$ の近傍とする. $\varepsilon>0$ を選んで

$$\{\phi\in H : |\phi|_H<\varepsilon\}\subset N$$

とできる. $\delta>0$ を

$$\delta\cdot\sup_{t\in[0,T]}K(t)<\varepsilon$$

となるように取ると, $\sup_{t'\in[0,T]}\|\gamma(t')\|_E\le\delta$ なる $\mathbf{0}$ の C^0-延長 $\gamma\colon[0,T]+I\to E$ と $t\in[0,T]$ に対して,

$$\begin{aligned}|I_t\gamma|_H&\le K(t)\cdot\sup_{t'\in[0,t]}\|\gamma(t')\|_E\\&\le\sup_{t'\in[0,T]}K(t')\cdot\delta<\varepsilon\end{aligned}$$

となり, これより $I_t\gamma\in N$ となる. よって, 結論が成り立つ. □

注 5. 不等式 (3) は, J. Kato [14] による不等式の特別な場合である. [10] と [13] も参照せよ.

3.3 自明な RFDE の生成する解半群

自明な常微分方程式 $\dot{x}=0$ を履歴空間 H をもつ RFDE と考え, その初期値問題

$$\begin{cases}\dot{x}=0, & t\ge 0,\\ I_0x=\phi, & \phi\in H\end{cases}\tag{4}$$

を考える.

記法. $\phi\in\mathrm{Map}(I,E)$ に対して, 写像 $\bar{\phi}\colon\mathbb{R}_+ + I\to E$ を

$$\bar{\phi}(t)=\begin{cases}\phi(t), & t\in I,\\ \phi(0), & t\in\mathbb{R}_+\end{cases}$$

で定める. $\bar{\phi}$ は ϕ の定数による C^0-延長である.

命題 3.11. H が C^0-延長について閉じているならば, $\bar{\phi}$ は IVP (4) の一意的な解である.

証明. 仮定より, すべての $t\in\mathbb{R}_+$ に対して $I_t\bar{\phi}\in H$ であり, $(\bar{\phi})'(t)=0$ である. よって, $\bar{\phi}$ は IVP (4) の解である. 解は $\mathbb{R}_+$ 上で定数でないといけないので, 一意性が従う. □

注 6. 一意性の部分で, Banach 空間に値をとる関数の微分係数による傾きの評価を用いている. 詳しくは [2] を参照のこと.

記法. H が C^0-延長について閉じているとき, H 上の線形作用素のなす族 $(S_H(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ を

$$S_H(t)\phi=I_t\bar{\phi}\quad(\phi\in H)$$

で定める. 定義より, $(S_H(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ は H 上の線型半群であり, 命題 3.11 より, $(S_H(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ は IVP (4) のなす解半群である.

命題 3.12. H は C^0-延長について閉じているとする．次の条件

1. 任意の $\phi \in H$ に対して，履歴曲線 $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto S_H(t)\phi \in H$ は連続
2. H は C^0-統制されている

が成り立つならば，H は C^0-延長可能である．

証明. $\phi \in H$ とし，$\gamma \colon \mathbb{R}_+ + I \to E$ を ϕ の C^0-延長とする．写像 $\beta \colon \mathbb{R}_+ + I \to E$ を

$$\beta(t) = \gamma(t) - \bar{\phi}(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+ + I)$$

で定めると，β は $\mathbf{0}$ の C^0-延長で，

$$I_t\gamma = I_t\beta + S_H(t)\phi \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+)$$

と分解される．$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto I_t\beta \in H$ は系 1 より連続であるので，$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto I_t\gamma \in H$ の連続性は $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto S_H(t)\phi \in H$ の連続性から従う．よって．H は C^0-延長可能である． □

3.4 平行移動

記法. $(t_0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times H$ とする．写像

$$\mathbb{R}_+ \times H \ni (u, \xi) \mapsto (t_0 + u, S_H(u)\phi_0 + \xi) \in [t_0, +\infty) \times H$$

を，τ_{t_0,ϕ_0} で表す．

補題 3.13. $(t_0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times H$ とする．H が C^0-延長可能ならば，$\tau_{t_0,\phi_0} \colon \mathbb{R}_+ \times H \to [t_0, +\infty) \times H$ は同相写像である．

証明. $\tau_{t_0,\phi_0}(u, \xi) = (v, \eta)$ を解いて，逆写像の表示

$$\tau_{t_0,\phi_0}^{-1}(v, \eta) = (v - t_0, \eta - S_H(v - t_0)\phi_0)$$

を得る．H が C^0-延長可能であれば，定義より $u \mapsto S_H(u)\phi_0$ と $v \mapsto S_H(v - t_0)\phi_0$ は連続であるので，τ_{t_0,ϕ_0} と τ_{t_0,ϕ_0}^{-1} も連続．よって，τ_{t_0,ϕ_0} は同相写像である． □

4 C^0-延長と履歴汎関数

記法. $(t_0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times \mathrm{Map}(I, E)$ を固定する．$T, \delta > 0$ に対して，(t_0, ϕ_0) の C^0-延長 $\gamma \colon [t_0, t_0 + T] + I \to E$ で

$$\sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \|\gamma(t) - \phi_0(0)\|_E \leq \delta$$

を満たすもの全体の集合を $\Gamma_{t_0,\phi_0}(T, \delta)$ で表す．$\Gamma_{t_0,\phi_0}(T, \delta)$ 上の距離関数 d を

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_E \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{t_0,\phi_0}(T, \delta))$$

で定める．この距離により，$\varGamma_{t_0,\phi_0}(T,\delta)$ を距離空間と考える．

補題 4.1. 各 $(t_0,\phi_0)\in\mathbb{R}\times\mathrm{Map}(I,E)$ と各 $T,\delta>0$ に対して，$\varGamma_{t_0,\phi_0}(T,\delta)$ は完備距離空間である．

証明．距離空間 $\varGamma_{0,\mathbf{0}}(T,\delta)$ は，写像の制限により Banach 空間

$$\{\eta\in C([0,T],E):\eta(0)=0,\|\eta\|_\infty\le\delta\}$$

と等長同型である．したがって，$\varGamma_{0,\mathbf{0}}(T,\delta)$ は完備である．また，次で定義される写像 $\varGamma_{t_0,\phi_0}(T,\delta)\ni\gamma\mapsto\widetilde{\gamma}\in\varGamma_{0,\mathbf{0}}(T,\delta)$

$$\widetilde{\gamma}(s)=\gamma(t_0+s)-\bar{\phi}_0(s)\quad(s\in[0,T]+I)$$

により $\varGamma_{t_0,\phi_0}(T,\delta)$ と $\varGamma_{0,\mathbf{0}}(T,\delta)$ は等長同型であるので，$\varGamma_{t_0,\phi_0}(T,\delta)$ は完備である． □

4.1 C^0-統制のための必要条件

補題 4.2. H は C^0-延長可能とする．以下の条件を考える：

(a) H は C^0-統制されている．
(b) 任意の $(t_0,\phi_0)\in\mathbb{R}\times H$ に対して以下が成り立つ：(t_0,ϕ_0) の $[t_0,+\infty)\times H$ における任意の近傍 W に対して，$T,\delta>0$ が存在し，すべての $t\in[t_0,t_0+T]$ とすべての $\gamma\in\varGamma_{t_0,\phi_0}(T,\delta)$ に対して

$$(t,I_t\gamma)\in W$$

が成り立つ．

このとき，(a) ⇒ (b) が成り立つ．

注 7. (b) において，W が (t_0,ϕ_0) の "$[t_0,+\infty)\times H$ における近傍" であるとは，$\varepsilon>0$ と ϕ_0 の近傍 V が存在して，$[t_0,t_0+\varepsilon]\times V\subset W$ とできることを意味する．

補題 *4.2* の証明． $(t_0,\phi_0)\in\mathbb{R}\times H$ とし，W を $(t_0,\phi_0)\in[t_0,+\infty)\times H$ の近傍とする．H は C^0-延長可能であるので，補題 3.13 より τ_{t_0,ϕ_0} はとくに $(0,\mathbf{0})$ において連続である．よって，$T>0$ と $\mathbf{0}\in H$ の近傍 N が存在して

$$\tau_{t_0,\phi_0}([0,T]\times N)\subset W.$$

H は C^0-統制されているので，これらの T と N に対して $\delta>0$ が取れて，すべての $s\in[0,T]$ とすべての $\widetilde{\gamma}\in\varGamma_{0,\mathbf{0}}(T,\delta)$ に対して $I_s\widetilde{\gamma}\in N$ が成り立つ．

$\gamma\in\varGamma_{t_0,\phi_0}(T,\delta)$ とする．この γ に対して $\widetilde{\gamma}\colon[0,T]+I\to E$ を

$$\widetilde{\gamma}(s)=\gamma(t_0+s)-\bar{\phi}_0(s)\quad(s\in[0,T]+I)$$

で定めると，$\widetilde{\gamma} \in \Gamma_{0,\mathbf{0}}(T,\delta)$．よって，$s \in [0,T]$ に対して

$$\begin{aligned}(t_0+s, I_{t_0+s}\gamma) &= \bigl(t_0+s, I_s\bar{\phi}_0 + I_s\widetilde{\gamma}\bigr)\\ &= \tau_{t_0,\phi_0}(s, I_s\widetilde{\gamma})\\ &\in \tau_{t_0,\phi_0}([0,T]\times N) \subset W.\end{aligned}$$

ゆえに結論が成り立つ． □

4.2 C^0-延長に関する Lipschitz 条件

定義 4.3 (cf. [17], [13])**.** H は C^0-延長可能と仮定する．$T, \delta, L > 0$ が存在して，すべての $t \in [t_0, t_0+T]$ とすべての $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{t_0,\phi_0}(T,\delta)$ に対して

$$\|F(t, I_t\gamma_1) - F(t, I_t\gamma_2)\|_E \le L \cdot \sup_{t' \in [t_0,t]} \|\gamma_1(t') - \gamma_2(t')\|_E \tag{5}$$

が成り立つとき，F は (t_0,ϕ_0) の **C^0-延長に関して局所 Lipschitz** (locally Lipschitzian about C^0-continuations) であるという．F が各 $(t_0,\phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ の C^0-延長に関して局所 Lipschitz であるとき，単に F は C^0-延長に関して局所 Lipschitz という．

注 8. $\mathrm{dom}(F)$ が (t_0,ϕ_0) の $[t_0,+\infty)\times H$ における近傍であるとき，補題 4.2 より ($T, \delta > 0$ を小さく取り直せば)，上の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{t_0,\phi_0}(T,\delta)$ に対して

$$(t, I_t\gamma_1), (t, I_t\gamma_2) \in \mathrm{dom}(F) \quad (\forall t \in [t_0, t_0+T])$$

とできる．

注 9. $0 < T_0 < T$ と $\gamma \in \Gamma_{t_0,\phi_0}(T_0,\delta)$ に対して，$\widetilde{\gamma}\colon [t_0, t_0+T] + I \to E$ を

$$\widetilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [t_0, t_0+T_0] + I,\\ \gamma(t_0+T_0), & t \in (t_0+T_0, t_0+T] \end{cases}$$

と定めると $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_{t_0,\phi_0}(T,\delta)$ である．よって，不等式 (5) は，$t \in [t_0, t_0+T_0]$ と $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{t_0,\phi_0}(T_0,\delta)$ に対しても成り立つ．

Kappel & Schappacher [13] は，定義 4.3 の Carathéodory バージョンの条件を用いて，IVP (1) の局所的な解の一意存在を示した．Schumacher [17] はまた定義 4.3 に類似の条件を用いた．

5 初期値問題と適切性

記法. 各 $(t_0,\phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して，(1) は一意な極大解 (2) をもつとする．このとき，写像 $\Phi_F\colon \mathrm{dom}(\Phi_F) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times H \to H$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(\Phi_F) &= \bigcup_{(t_0,\phi_0)\in\mathrm{dom}(F)} \bigl[0, T_F(t_0,\phi_0)\bigr) \times \{(t_0,\phi_0)\},\\ \Phi_F(\tau, t_0, \phi_0) &= I_{t_0+\tau}x_F(\cdot\,; t_0, \phi_0)\end{aligned}$$

で定める．

定義 5.1. 以下が成り立つとき，RFDE $(*)$ の初期値問題は**適切** (well-posed) であるという：

1. (極大解の一意存在) RFDE $(*)$ の初期値問題は一意な極大解をもつ．
2. (時間発展ルールの存在) Φ_F は $\mathrm{dom}(F)$ における非自励系の局所半流れである．
3. (連続性条件) 脱出時刻関数 $T_F(\cdot)$ は下半連続かつ，Φ_F は連続である．

(非自励系の) 局所半流れについては，第 6 節を参照のこと．

このセクションでは以下の設定で．RFDE $(*)$ の初期値問題を考える．

設定.
- 履歴空間 H は C^0-延長可能かつ C^0-統制されている．
- 履歴汎関数 F の定義域 $\mathrm{dom}(F)$ は $\mathbb{R} \times H$ の位相部分空間で，$F\colon \mathrm{dom}(F) \subset \mathbb{R} \times H \to E$ の連続性はこの意味で考える．

5.1 初期値問題と積分方程式

Banach 空間に値をとる関数の Riemann 積分に関する以下の性質を用いる (参考：[4])．

事実. $a < b$ を実数，X を Banach 空間とする．連続写像 $g\colon [a,b] \to X$ に対して以下が成り立つ：

- g は Riemann 可積分である．
- g の不定積分 $G\colon [a,b] \to X$ は g の原始関数である．すなわち，G は微分可能で，すべての $t \in [a,b]$ に対して $G'(t) = g(t)$．
- G を g の原始関数とすると，

$$\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$$

がすべての $x \in [a,b]$ に対して成り立つ．

補題 5.2. $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ を固定する．t_0 を左端点とする $\mathbb{R}$ の有界閉区間 J と写像 $x\colon J+I \to E$ に対して，以下の条件を考える：

(a) x は (1) の解である．

(b) (i) $x|_J$ は連続，(ii) すべての $t \in J$ に対して，$(t, I_t x) \in \mathrm{dom}(F)$，(iii) x は

$$\begin{cases} x(t) = \phi_0(0) + \displaystyle\int_{t_0}^t F(u, I_u x)\,\mathrm{d}u, & t \in J, \\ I_{t_0} x = \phi_0 \end{cases}$$

を満たす．

F が連続であるならば，上の条件 (a) と (b) は同値である．

証明. (a) $\Rightarrow$ (b): 条件 (iii) の積分方程式を確認すればよい. 仮定より $x\colon J+I \to E$ は (t_0, ϕ_0) の C^0-延長で

$$(x|_J)'(t) = F(t, I_t x)$$

がすべての $t \in J$ に対して成り立つ. よって, 補題 3.3 と F の連続性より $x|_J$ は C^1 級であるので,

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} x'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} F(u, I_u x)\,\mathrm{d}u$$

がすべての $t \in J$ に対して成り立つ.

(b) $\Rightarrow$ (a): 仮定より, $x\colon J+I \to E$ は (t_0, ϕ_0) の C^0-延長である. よって, 補題 3.3 と F の連続性より, 被積分関数 $J \ni t \mapsto F(t, I_t x) \in E$ は連続である. 積分表示より $x|_J$ は微分可能で, すべての $t \in J$ に対して $(x|_J)'(t) = F(t, I_t x)$ が成り立つ. ゆえに, $x\colon J+I \to E$ は (1) の解である. □

5.2 局所的な解の存在と一意性

記法. $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して, (t_0, ϕ_0) の C^0-延長 γ に関する変換 $\mathcal{T}_{t_0,\phi_0}$ を

$$\mathcal{T}_{t_0,\phi_0}(\gamma)(t) = \begin{cases} \phi_0(t - t_0), & t - t_0 \in I, \\ \phi_0(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(u, I_u \gamma)\,\mathrm{d}u, & t - t_0 \in [0, T]. \end{cases} \tag{6}$$

で定める.

5.2.1 一意性

命題 5.3. $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ を固定し, (1) は解をもつと仮定する. このとき, F が連続かつ (t_0, ϕ_0) の C^0-延長に関して局所 Lipschitz ならば, (1) の解は局所一意である.

証明. C^0-延長に関する局所 Lipschitz 条件の不等式 (5) が成り立つように, $T, \delta, L > 0$ を取る. $J \subset [t_0, t_0 + T]$ を t_0 を左端点とする左に閉じた区間とし, $x_1, x_2\colon J+I \to E$ を (1) の解とする. $x_1|_J, x_2|_J$ の連続性より, $LT_0 < 1$ かつ

$$\sup_{t \in [t_0, t_0 + T_0]} \|x_i(t) - \phi_0(0)\|_E \leq \delta \ \ (i = 1, 2)$$

となるような $T_0 > 0$ が取れる. $J_0 := [t_0, t_0 + T_0]$ とする. $x_1|_{J_0+I}, x_2|_{J_0+I} \in \varGamma_{t_0,\phi_0}(T_0, \delta)$ であるので, すべての $t \in J_0$ に対して,

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\|_E &\leq \int_{t_0}^{t} \|F(u, I_u x_1) - F(u, I_u x_2)\|_E\,\mathrm{d}u \\ &\leq LT_0 \cdot \sup_{t \in J_0} \|x_1(t) - x_2(t)\|_E \end{aligned}$$

が補題 5.2 より成り立つ. これより $\sup_{t \in J_0} \|x_1(t) - x_2(t)\|_E < \sup_{t \in J_0} \|x_1(t) - x_2(t)\|_E$ となり, $x_1|_{J_0} = x_2|_{J_0}$ である. □

5.2.2 存在

$(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ を固定する．$(t_0, \phi_0) \in W \subset \mathrm{dom}(F)$ に対して，以下の方程式

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F|_W(t, I_t x), & t \geq t_0, \\ I_{t_0} x = \phi_0 \end{cases} \tag{7}$$

を考える．

補題 5.4. $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ を固定し，$\mathrm{dom}(F)$ は (t_0, ϕ_0) の $[t_0, +\infty) \times H$ における近傍であると仮定する．このとき，F が (t_0, ϕ_0) において連続ならば，$T, \delta > 0$ と (t_0, ϕ_0) の $[t_0, +\infty) \times H$ における近傍 W が存在して次が成り立つ：すべての $t \in [t_0, t_0 + T]$ とすべての $\gamma \in \mathit{\Gamma}_{t_0, \phi_0}(T, \delta)$ に対して

$$(t, I_t \gamma) \in W \subset \mathrm{dom}(F)$$

かつ，写像 $\mathcal{T}_{t_0, \phi_0} \colon \mathit{\Gamma}_{t_0, \phi_0}(T, \delta) \to \mathit{\Gamma}_{t_0, \phi_0}(T, \delta)$ は well-defined である．

証明. 仮定より，F は (t_0, ϕ_0) の $[t_0, +\infty) \times H$ におけるある近傍 W において有界である．したがって，$M > 0$ が存在して，

$$\sup_{(t, \phi) \in W} \|F(t, \phi)\|_E \leq M$$

となる．この W に対して，補題 4.2 より $T, \delta > 0$ が存在して，すべての $t \in [t_0, t_0 + T]$ とすべての $\gamma \in \mathit{\Gamma}_{t_0, \phi_0}(T, \delta)$ に対して

$$(t, I_t \gamma) \in W$$

となる．$T > 0$ を小さく取り直して，$MT \leq \delta$ としてよいことに注意する．すると，$t \in [t_0, t_0 + T]$ と $\gamma \in \mathit{\Gamma}_{t_0, \phi_0}(T, \delta)$ に対して

$$\|\mathcal{T}_{t_0, \phi_0}(\gamma)(t) - \phi_0(0)\|_E \leq \int_{t_0}^{t} \|F(u, I_u \gamma)\|_E \, \mathrm{d}u \leq MT \leq \delta$$

となる．したがって，任意の $\gamma \in \mathit{\Gamma}_{t_0, \phi_0}(T, \delta)$ に対して $\mathcal{T}_{t_0, \phi_0}(\gamma) \in \mathit{\Gamma}_{t_0, \phi_0}(T, \delta)$ となり，写像 $\mathcal{T}_{t_0, \phi_0}$ は well-defined である． □

命題 5.5. $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ を固定し，$\mathrm{dom}(F)$ は (t_0, ϕ_0) の $[t_0, +\infty) \times H$ における近傍であると仮定する．F が (t_0, ϕ_0) において連続かつ (t_0, ϕ_0) の C^0-延長に関して局所 Lipschitz ならば，(7) が解をもつような (t_0, ϕ_0) の $[t_0, +\infty) \times H$ における近傍 W が存在する．

証明. 補題 5.4 における，$T, \delta > 0$ と (t_0, ϕ_0) の $[t_0, +\infty) \times H$ における近傍 W を取る．定義 4.3 より，$T, \delta > 0$ を小さく取り直して，$LT < 1$ かつ，不等式 (5) がすべての $t \in [t_0, t_0 + T]$ とすべての $\gamma \in \mathit{\Gamma}_{t_0, \phi_0}(T, \delta)$ に対して成り立つようにできることに注意する．

補題 5.2 と補題 5.4 より，$\mathcal{T}_{t_0,\phi_0}$ の不動点 γ は，(7) の解である．任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{t_0,\phi_0}(T,\delta)$ に対して，

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \|\mathcal{T}_{t_0,\phi_0}(\gamma_1)(t) - \mathcal{T}_{t_0,\phi_0}(\gamma_2)(t)\| &\le \int_{t_0}^{t_0+T} \|F(u, I_u\gamma_1) - F(u, I_u\gamma_2)\|_E \,\mathrm{d}u \\ &\le LT \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_E\end{aligned}$$

となるので，$\mathcal{T}_{t_0,\phi_0}$ は縮小写像である．よって，補題 4.1 と Banach の不動点定理（縮小写像の原理）より，$\mathcal{T}_{t_0,\phi_0}$ は不動点をもつ． □

5.3 適切性のための必要十分条件

5.3.1 遅れ型関数微分方程式が定める局所半流れ

RFDE $(*)$ の初期値問題の局所的な解の存在と一意性の結果（第 5.2 節参照）をまとめると以下のようになる．

命題 5.6. 任意の $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して，$\mathrm{dom}(F)$ は $[t_0, +\infty) \times H$ における (t_0, ϕ_0) の近傍であると仮定する．このとき，F が連続かつ C^0-延長に関して局所 Lipschitz ならば，RFDE $(*)$ の初期値問題は，一意な極大解をもつ．さらに，Φ_F は $\mathbb{R} \times H$ の位相部分空間 $\mathrm{dom}(F)$ における非自励系の局所半流れである．

証明. 命題 5.4, 5.3 を組み合わせることで，RFDE $(*)$ の初期値問題が局所一意解をもつことが従う．よって，定理 2.10 より，RFDE $(*)$ の初期値問題は一意な極大解をもつ．あとは，補題 6.3 の条件 (ii) と (iii) を確認すればよい．

(ii) 定義より，任意の $(t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して，

$$\Phi_F(0, t_0, \phi_0) = I_{t_0} x_F(\cdot; t_0, \phi_0) = \phi_0.$$

(iii) $(\tau_1, t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(\Phi_F)$, $(\tau_2, t_0 + \tau_1, \Phi_F(\tau_1, t_0, \phi_0)) \in \mathrm{dom}(\Phi_F)$ と仮定する．これらは

$$\begin{gathered}[t_0, t_0 + \tau_1] + I \subset \mathrm{dom}\big(x_F(\cdot; t_0, \phi_0)\big), \\ [t_0 + \tau_1, (t_0 + \tau_1) + \tau_2] + I \subset \mathrm{dom}\big(x_F(\cdot; t_0 + \tau_1, \Phi_F(\tau_1, t_0, \phi_0))\big)\end{gathered}$$

と同値である．定義より $\Phi_F(\tau_1, t_0, \phi_0) = I_{t_0+\tau_1} x_F(\cdot; t_0, \phi_0)$ であるので，極大解の構成法より

$$[t_0, t_0 + \tau_1 + \tau_2] + I \subset \mathrm{dom}\big(x_F(\cdot; t_0, \phi_0)\big),$$

すなわち，$(\tau_1 + \tau_2, t_0, \phi_0) \in \mathrm{dom}(\Phi_F)$ である．また，

$$\begin{aligned}\Phi_F(\tau_1 + \tau_2, t_0, \phi_0) &= I_{t_0+\tau_1+\tau_2} x_F(\cdot; t_0, \phi_0) \\ &= I_{(t_0+\tau_1)+\tau_2} x_F(\cdot; t_0 + \tau_1, \Phi_F(\tau_1, t_0, \phi_0)) \\ &= \Phi_F(\tau_2, t_0 + \tau_1, \Phi_F(\tau_1, t_0, \phi_0))\end{aligned}$$

である．

以上より，結論が成り立つ． □

5.3.2 C^0-延長に関する一様な局所 Lipschitz 条件

補題 5.7. 自明な方程式 $\dot{x}=0$ が定める H 上の半流れ

$$\mathbb{R}_+ \times H \ni (t,\phi) \mapsto S_H(t)\phi \in H$$

が連続ならば，任意の $(t_0,\phi_0) \in \mathbb{R} \times H$ と (t_0,ϕ_0) の任意の近傍 W に対して $T,\delta > 0$ と (t_0,ϕ_0) の近傍 W_0 が存在し次が成り立つ：すべての $(\sigma,\psi) \in W_0$, $\gamma \in \Gamma_{\sigma,\psi}(T,\delta)$, $t \in [\sigma,\sigma+T]$ に対して

$$(t, I_t\gamma) \in W.$$

証明. 次で与えられる写像 $\tau\colon \mathbb{R}\times H \times \mathbb{R}_+ \times H \to \mathbb{R}\times H$

$$\tau(\sigma,\psi,u,\xi) := \tau_{\sigma,\psi}(u,\xi) = (\sigma+u, S_H(u)\psi+\xi)$$

を考える．仮定より，τ は連続である．$\tau_{t_0,\phi_0}(0,\mathbf{0}) = (t_0,\phi_0)$ であるので，(t_0,ϕ_0) の与えられた近傍 W に対して，(t_0,ϕ_0) の近傍 W_0, $T>0$, $\mathbf{0}$ の近傍 N が存在して

$$\tau(W_0 \times [0,T] \times N) \subset W$$

となる．結論は，補題 4.2 の証明と同様の議論により従う． □

定義 5.8. 任意の $(t_0,\phi_0) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して以下の条件が成り立つとき，F は **C^0-延長に関して一様に局所 Lipschitz** (uniformly locally Lipschitzian about C^0-continuations) であるという：(t_0,ϕ_0) の $\mathrm{dom}(F)$ における近傍 W_0 と $T,\delta,L>0$ が存在して，すべての $(\sigma,\psi) \in W_0$, $\gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma_{\sigma,\psi}(T,\delta)$, $t \in [\sigma,\sigma+T]$ に対して

$$\|F(t,I_t\gamma_1) - F(t,I_t\gamma_2)\|_E \le L \cdot \sup_{t' \in [\sigma,t]} \|\gamma_1(t') - \gamma_2(t')\|_E$$

が成り立つ．

注 10. 半流れ $\mathbb{R}_+ \times H \ni (t,\phi) \mapsto S_H(t)\phi \in H$ が連続で $\mathrm{dom}(F)$ が (t_0,ϕ_0) の近傍であれば，補題 5.7 より ($T,\delta>0$ を小さく取り直せば)，上の $\gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma_{\sigma,\psi}(T,\delta)$ に対して

$$(t,I_t\gamma_1),(t,I_t\gamma_2) \in \mathrm{dom}(F) \quad (\forall t \in [\sigma,\sigma+T])$$

とできる．

5.3.3 定理 A の証明

補題 5.9. 履歴汎関数 F は条件

- $\mathrm{dom}(F)$ は開集合
- F: $\mathrm{dom}(F) \subset \mathbb{R}\times H \to E$ は連続かつ，C^0-延長に関して一様に局所 Lipschitz

を満たすとする．このとき，次が成り立つ：

(i) RFDE $(*)$ の初期値問題は一意な極大解をもち，$\varPhi_F$ は $\mathrm{dom}(F)$ における非自励系の局所半流れである.

(ii) さらに，$(S_H(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ が局所同程度連続 C_0 半群ならば次が成り立つ：任意の $(t_0,\phi_0)\in\mathrm{dom}(F)$ に対して，$T>0$ と (t_0,ϕ_0) の近傍 W_0 が存在して，
- $[0,T]\times W_0\subset\mathrm{dom}(\varPhi_F)$,
- $(\varPhi_F^\tau|_{W_0})|_{\tau\in[0,T]}$ は同程度連続.

証明. (i) C^0-延長に関して一様に局所 Lipschitz であれば，C^0-延長に関して局所 Lipschitz であるので，結論は命題 5.6 より従う.

(ii) $(S_H(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ が局所同程度連続 C_0 半群であると仮定する．$(t_0,\phi_0)\in\mathrm{dom}(F)$ を固定し，F がその上で有界となるような (t_0,ϕ_0) の近傍 $W\subset\mathrm{dom}(F)$ を取る．補題 5.7 と定義 5.8 より，$T,\delta,L>0$ と (t_0,ϕ_0) の近傍 W_0 が取れて，すべての $(\sigma,\psi)\in W_0$，$\gamma,\gamma_1,\gamma_2\in\varGamma_{\sigma,\psi}(T,\delta)$，$t\in[\sigma,\sigma+T]$ に対して，$(t,I_t\gamma)\in W$ かつ

$$\|F(t,I_t\gamma_1)-F(t,I_t\gamma_2)\|_E\le L\cdot\sup_{t'\in[\sigma,t]}\|\gamma_1(t')-\gamma_2(t')\|_E.$$

$T>0$ を小さく取り直すことで，補題 5.4 と命題 5.6 より，任意の $(\sigma,\psi)\in W_0$ に対して $\mathfrak{T}_{\sigma,\psi}\colon\varGamma_{\sigma,\psi}(T,\delta)\to\varGamma_{\sigma,\psi}(T,\delta)$ は well-defined かつ縮小的になる．よって，任意の $(\sigma,\psi)\in W_0$ に対して

$$[\sigma,\sigma+T]+I\subset\mathrm{dom}(x_F(\cdot;\sigma,\psi)),$$

すなわち $[0,T]\times W_0\subset\mathrm{dom}(\varPhi_F)$ である.

Step 1. 分解

各 $(\sigma,\psi)\in W_0$ に対して，写像 $y(\cdot;\sigma,\psi)\colon\big[0,T_F(\sigma,\psi)\big)+I\to E$ を

$$y(s;\sigma,\psi)=x(\sigma+s;\sigma,\psi)-\overline{\psi}(s)\quad(s\in[0,T(\sigma,\psi))+I)$$

で定める．$(\sigma_0,\psi_0)\in W_0$ を固定する．すべての $(\tau,\sigma,\psi)\in[0,T]\times W_0$ に対して，

$$\begin{aligned}&\varPhi_F^\tau(\sigma,\psi)-\varPhi_F^\tau(\sigma_0,\psi_0)\\&=I_{\sigma+\tau}x_F(\cdot;\sigma,\psi)-I_{\sigma_0+\tau}x_F(\cdot;\sigma_0,\psi_0)\\&=[I_\tau y(\cdot;\sigma,\psi)+S_H(\tau)\psi]-[I_\tau y(\cdot;\sigma_0,\psi_0)+S_H(\tau)\psi_0]\\&=[I_\tau y(\cdot;\sigma,\psi)-I_\tau y(\cdot;\sigma_0,\psi_0)]+[S_H(\tau)\cdot(\psi-\psi_0)].\end{aligned}$$

仮定より，$(S_H(t))_{t\in[0,T]}$ は $\mathbf{0}$ において同程度連続であるので，$(\varPhi_F^\tau|_{W_0})|_{\tau\in[0,T]}$ が同程度連続となるためには

$$I_\tau y(\cdot;\sigma,\psi)\to I_\tau y(\cdot;\sigma_0,\psi_0)\quad\text{as }(\sigma,\psi)\to(\sigma_0,\psi_0)$$

が $\tau\in[0,T]$ について一様に成り立てばよい．任意の $(\sigma,\psi)\in W_0$ に対して $y(\cdot;\sigma,\psi)$ は $\mathbf{0}$ の C^0-延長である．H は C^0-統制されているので，上の一様な収束を得るためには

$$\sup_{s\in[0,T]}\|y(s;\sigma,\psi)-y(s;\sigma_0,\psi_0)\|_E\to 0\quad\text{as }(\sigma,\psi)\to(\sigma_0,\psi_0).\tag{8}$$

となればよい．

Step 2. 正規化された不動点問題

$\eta_{\sigma,\psi} := y(\cdot;\sigma,\psi)|_{[0,T]+I}$ と置くと，$\eta_{\sigma,\psi} \in \Gamma_{0,\mathbf{0}}(T,\delta)$ で，

$$\mathcal{S}_{\sigma,\psi}(\gamma)(s) = \begin{cases} 0, & s \in I, \\ \displaystyle\int_0^s F\bigl(\sigma+u, S_H(u)\psi + I_u\gamma\bigr)\,\mathrm{d}u, & s \in [0,T]. \end{cases}$$

で定まる $\mathcal{S}_{\sigma,\psi} \colon \Gamma_{0,\mathbf{0}}(T,\delta) \to \Gamma_{0,\mathbf{0}}(T,\delta)$ の不動点である．

Step 3. 一様縮小原理

$\Gamma := \Gamma_{0,\mathbf{0}}(T,\delta)$ と置く．(8) が成り立つためには，写像 $W_0 \ni (\sigma,\psi) \mapsto \eta_{\sigma,\psi} \in \Gamma$ が連続であればよい．このためには，一様縮小原理より，

1. 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して，$W_0 \ni (\sigma,\psi) \mapsto \mathcal{S}_{\sigma,\psi}(\gamma) \in \Gamma$ は連続，
2. $(\mathcal{S}_{\sigma,\psi})_{(\sigma,\psi)\in W_0}$ は一様縮小写像

となればよい．

1. $(\sigma_0,\psi_0) \in W_0$ と $\gamma \in \Gamma$ を固定する．$\mathbb{R} \times H$ の部分集合

$$K := \bigl\{\, \bigl(\sigma_0 + u, S_H(u)\psi_0 + I_u\gamma\bigr) : u \in [0,T] \,\bigr\}$$

を考える．K は，連続写像 $[0,T] \ni u \mapsto \tau_{\sigma_0,\psi_0}(u, I_u\gamma)$ の像なのでコンパクトである．

$\varepsilon > 0$ を取る．F の連続性より次が成り立つ：$\delta > 0$ と $\mathbf{0} \in H$ の近傍 N が存在し，すべての $(t_1,\phi_1) \in K$ とすべての $(t_2,\phi_2) \in \mathrm{dom}(F)$ に対して，

$$|t_1 - t_2| < \delta,\ \phi_1 - \phi_2 \in N \implies \|F(t_1,\phi_1) - F(t_2,\phi_2)\|_E \leq \varepsilon/T.$$

$(S_H(t))_{t\in[0,T]}$ の $\mathbf{0}$ における同程度連続性より，$\mathbf{0} \in H$ の近傍 N' が存在して，

$$S_H(t)\phi \in N \quad (\forall t \in [0,T],\ \phi \in N').$$

よって，すべての $(\sigma,\psi) \in W_0$ に対して，$|\sigma - \sigma_0| < \delta$ かつ $\psi - \psi_0 \in N'$ ならば，

$$\tau_{\sigma,\psi}(u, I_u\gamma) - \tau_{\sigma_0,\psi_0}(u, I_u\gamma) = \bigl(\sigma - \sigma^0, S_H(u)(\psi - \psi^0)\bigr) \in (-\delta,\delta) \times N$$

となり，これより

$$\begin{aligned} &\sup_{s\in[0,T]} \|\mathcal{S}_{\sigma,\psi}(\gamma)(s) - \mathcal{S}_{\sigma_0,\psi_0}(\gamma)(s)\|_E \\ &\leq \int_0^T \|F \circ \tau_{\sigma,\psi}(u, I_u\gamma) - F \circ \tau_{\sigma_0,\psi_0}(u, I_u\gamma)\|_E \,\mathrm{d}u \\ &\leq \int_0^T \varepsilon/T \,\mathrm{d}u = \varepsilon. \end{aligned}$$

を得る．

2. 各 $(\sigma,\psi)\in W_0$ と $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ に対して，

$$\begin{aligned}&\sup_{s\in[0,T]}\|\mathcal{S}_{\sigma,\psi}(\gamma_1)(s)-\mathcal{S}_{\sigma,\psi}(\gamma_2)(s)\|_E\\&\le\int_0^T\|F\circ\tau_{\sigma,\psi}(u,I_u\gamma_1)-F\circ\tau_{\sigma,\psi}(u,I_u\gamma_2)\|_E\,\mathrm{d}u\\&\le LT\cdot\sup_{s\in[0,T]}\|\gamma_1(s)-\gamma_2(s)\|_E.\end{aligned}$$

よって，$(\mathcal{S}_{\sigma,\psi})_{(\sigma,\psi)\in W_0}$ は一様縮小写像である．

以上より，結論が成り立つ． □

定理 *A* の証明. (a) ⇒ (b): $F_0\colon\mathbb{R}\times H\to E$ を恒等的に $0\in E$ に等しい写像とする．すると，F_0 は (a) における条件を満たす履歴汎関数であるので，仮定より Φ_{F_0} は連続である．

$$S_H(t)\phi=\Phi_{F_0}(t,\phi)\quad(\forall(t,\phi)\in\mathbb{R}_+\times H)$$

であるので，系 6.10 より，Φ_{F_0} が連続であることは $(S_H(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ が局所同程度連続 C_0 半群であることと同値である．

(b) ⇒ (a): 条件を満たす履歴汎関数 F: $\mathrm{dom}(F)\subset\mathbb{R}\times H\to E$ を固定する．命題 5.6 より，RFDE $(*)$ の初期値問題は一意な極大解をもち，Φ_F は $\mathrm{dom}(F)$ における非自励系の局所半流れである．補題 5.9 と定理 6.8 より，脱出時刻関数 $T_F(\cdot)$ は下半連続かつ Φ_F は連続である．よって，RFDE $(*)$ の初期値問題は適切である． □

6 自励系と非自励系の局所半流れ

6.1 自励系の局所半流れ

定義 6.1 (ref. [6, 1]). X を位相空間とする．次の条件を満たす写像 Φ: $\mathrm{dom}(\Phi)\subset\mathbb{R}_+\times X\to X$ を，X における**局所半流れ** (local semiflow) とよぶ：

1. 関数 $T(\cdot)\colon X\to(0,\infty]$ が存在して，$\mathrm{dom}(\Phi)=\bigcup_{x\in X}[0,T(x))\times\{x\}$.
2. すべての $x\in X$ に対して，$\Phi(0,x)=x$.
3. 任意の $(t_1,x)\in\mathrm{dom}(\Phi)$ と任意の $(t_2,\Phi(t_1,x))\in\mathrm{dom}(\Phi)$ に対して，

$$(t_1+t_2,x)\in\mathrm{dom}(\Phi),\quad\Phi(t_1+t_2,x)=\Phi(t_2,\Phi(t_1,x)).$$

$T(x)$ を x の**脱出時刻** (escape time) といい，関数 $T(\cdot)\colon X\to(0,\infty]$ を**脱出時刻関数**とよぶ．$T(\cdot)$ の値が恒等的に ∞ に等しいとき，局所半流れ Φ は**大域的** (global) であるという．

注 11. Hájek [6] は，上の 3 つの条件を満たす写像 Φ で，脱出時刻関数 $T(\cdot)$ が下半連続かつ Φ が連続であるものを局所半流れと呼んだ．このノートでは，上の 3 つの条件をもって局所半流れとよぶ．

$t \in \mathbb{R}_+$ に対して,

$$\mathrm{dom}(\Phi^t) = \{x \in X : T(x) > t\}, \quad \Phi^t(x) = \Phi(t, x)$$

で定まる写像 Φ^t: $\mathrm{dom}(\Phi^t) \to X$ を, Φ の**時刻** t **写像** (time t-map) とよぶ. 上の定義において, $T(x) > t$ とは $(t, x) \in \mathrm{dom}(\Phi)$ ということに他ならない.

局所半流れは, 次で定義する「非自励系の局所半流れ」と区別するために, 自励系の局所半流れということがある.

6.2 非自励系の局所半流れ

定義 6.2 (cf. [3]). X を位相空間, Φ: $\mathrm{dom}(\Phi) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times X \to X$ を写像とする. Φ に対して, 次で定義される写像 $\overline{\Phi}$: $\mathrm{dom}(\Phi) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R} \times X$

$$\overline{\Phi}(\tau, t, x) = (t + \tau, \Phi(\tau, t, x)) \quad ((\tau, t, x) \in \mathrm{dom}(\Phi))$$

を考える. $\overline{\Phi}$ がある位相部分空間 $D \subset \mathbb{R} \times X$ における局所半流れであるとき, Φ は D における**局所プロセス** (local process), または D における**非自励系の局所半流れ** (non-autonomous local semiflow) であるという. $\overline{\Phi}$ を Φ の拡張された局所半流れという.

「プロセス」の用語は Hájek [5, 2. Definition], Dafermos [3, Definition 2.1] による.

$D \subset \mathbb{R} \times X$ における非自励系の局所半流れ Φ に対しても, $\tau > 0$ に対して**経過時刻** τ **写像** (elapsed time τ-map) Φ^τ: $\mathrm{dom}(\Phi^\tau) \to X$ を

$$\mathrm{dom}(\Phi^\tau) = \{(t, x) \in D : T(t, x) > \tau\}, \quad \Phi^\tau(t, x) = \Phi(\tau, t, x)$$

で定める.

次の補題は, 非自励系の局所半流れであるための特徴づけを与える. 証明は省略する.

補題 6.3. X を位相空間, D を $\mathbb{R} \times X$ における位相部分空間とする. 写像 Φ: $\mathrm{dom}(\Phi) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times X \to X$ が, D における非自励系の局所半流れであるための必要十分条件は, 以下が成り立つことである:

(i) 関数 $T(\cdot) : D \to (0, \infty]$ が存在して, $\mathrm{dom}(\Phi) = \bigcup_{(t,x) \in D} [0, T(t, x)) \times \{(t, x)\}$.
(ii) すべての $(t, x) \in D$ に対して, $\Phi(0, t, x) = x$.
(iii) 任意の $(\tau_1, t, x) \in \mathrm{dom}(\Phi)$ と任意の $(\tau_2, t + \tau_1, \Phi(\tau_1, t, x)) \in \mathrm{dom}(\Phi)$ に対して,

$$(\tau_1 + \tau_2, t, x) \in \mathrm{dom}(\Phi), \quad \Phi(\tau_1 + \tau_2, t, x) = \Phi(\tau_2, t + \tau_1, \Phi(\tau_1, t, x)).$$

注 12. Dafermos [3] は, $T(\cdot) = \infty$ の場合に上の条件によってプロセスを定義した.

上の補題より, 非自励系の局所半流れ Φ が自励系の局所半流れであるための必要十分条件は, 任意の $(\tau, t, x) \in \mathrm{dom}(\Phi)$ に対して $\Phi(\tau, t, x)$ が「現在の時刻」t に依存しないことである.

以下のセクションにおける局所半流れに関する定理は, 拡張された局所半流れに適用することで非自励系の局所半流れに対しても成り立つことに注意する.

6.3 脱出時刻関数の下半連続性

局所半流れ Φ が大域的であるときは，その脱出時刻関数の下半連続性は定義より自明である．一般に，位相空間における与えられた局所半流れに対して，その脱出時刻関数が下半連続であるかどうかは自明ではない．この下半連続性は，コンパクト空間上の局所半流れが大域的であることを帰結するなどの意味で重要である ([6], ref. [1]).

補題 6.4. X を位相空間とし，Φ を $T(\cdot)\colon X \to (0,\infty]$ を脱出時刻関数とする X における局所半流れとする．このとき，$T(\cdot)$ が $x \in X$ において下半連続であることと次の条件は同値である：任意の $0 < T < T(x)$ に対して $[0,T] \times N \subset \mathrm{dom}(\Phi)$ となるような x の近傍 N が存在する．

証明. Φ が x において下半連続であることは，任意の $0 < T < T(x)$ に対して x の近傍 N が存在し，すべての $y \in N$ に対して $T(y) > T$ が成り立つことである．これは，$[0,T] \times N \subset \mathrm{dom}(\Phi)$ が成り立つことと同値である． □

次の定理は，脱出時刻関数 $T(\cdot)$ が下半連続であるための十分条件を与える．

定理 6.5 ([16], cf. [20]). X を位相空間とし，Φ を $T(\cdot)\colon X \to (0,\infty]$ を脱出時刻関数とする X における局所半流れとする．２つの条件

(i) 任意の $x \in X$ に対して，$(0, T(x)) \ni t \mapsto \Phi^t(x) \in X$ は左連続

(ii) 任意の $x \in X$ に対して $T > 0$ と x の近傍 N が存在して，
- $[0,T] \times N \subset \mathrm{dom}(\Phi)$
- 各 $t \in [0,T]$ に対して，時刻 t 写像の N への制限 $\Phi^t|_N\colon N \to X$ は連続

が成り立つとする．このとき，$T(\cdot)$ は下半連続である．

証明. $x_0 \in X$ を固定し，$T(\cdot)$ が $x_0 \in X$ において下半連続であることを示す．

次の２つの条件を満たす $0 < T < T(x_0)$ からなる集合 S を考える：

- x_0 の近傍 N が存在して，$[0,T] \times N \subset \mathrm{dom}(\Phi)$,
- 各 $t \in [0,T]$ に対して，$\Phi^t|_N$ は連続である．

仮定より，$S \neq \emptyset$ であるので，S の上限 $t_* := \sup S$ が存在する．t_* は $0 < t_* \leq T(x_0)$ を満たす．$t_* = T(x_0)$ であれば，補題 6.4 より，$T(\cdot)$ は x_0 において下半連続であることが従う．そこで，$t_* < T(x_0)$ と仮定して矛盾を導く．

$t_* < T(x_0)$ より $(t_*, x_0) \in \mathrm{dom}(\Phi)$ である．

$$x_* := \Phi^{t_*}(x_0) \in X$$

と置く．仮定より，この x_* に対して $T_* > 0$ と x_* の開近傍 N_* が存在して，

- $[0,T_*] \times N_* \subset \mathrm{dom}(\Phi)$

- 各 $t \in [0, T_*]$ に対して $\Phi^t|_{N_*}$ は連続

となる．仮定より，$(0, T(x_0)) \ni t \mapsto \Phi^t(x_0) \in X$ は t_* において左連続である．したがって，$\delta > 0$ が存在し，すべての $t \in (0, T(x_0))$ に対して

$$t_* - \delta < t < t_* \implies \Phi^t(x_0) \in N_*$$

となる．そこで，

$$\max\{t_* - \delta, t_* - (T_*/2)\} < t' < t_*$$

なる $t' > 0$ を取る．$t' < t_*$ より x_0 の近傍 N' が存在して，

- $[0, t'] \times N' \subset \mathrm{dom}(\Phi)$
- 各 $t \in [0, t']$ に対して $\Phi^t|_{N'}$ は連続

である．$\Phi^{t'}(x_0) \in N_*$ かつ $\Phi^{t'}|_{N'}$ は x_0 において連続であるので，N' を小さく取り直して

$$\Phi^{t'}(N') \subset N_*$$

としてよい．すると，$t \in (t', t' + T_*]$ と $x \in N'$ に対して，

$$(t', x) \in \mathrm{dom}(\Phi), \quad (t - t', \Phi^{t'}(x)) \in \mathrm{dom}(\Phi)$$

となるので，$(t, x) \in \mathrm{dom}(\Phi)$，すなわち

$$[0, t' + T_*] \times N' \subset \mathrm{dom}(\Phi)$$

が従う．さらに，$t \in (t', t' + T_*]$ に対して，

$$\Phi^t|_N = \Phi^{t-t'}|_{N_*} \circ \Phi^{t'}|_{N'}$$

より，$\Phi^t|_N$ は連続．これより，$t_* < t' + T_* \in S$ を得るが，これは $t_* = \sup S$ に反する．よって，$t_* = T(x_0)$ であり，結論が示された．□

注 13. この定理の証明のアイデアは，状態依存遅れをもつ微分方程式が定める半流れに関する Walther [20, Theorem 1] の証明から着想を得た．

6.4 局所半流れの連続性と一様構造

このセクションでは，相空間の一様構造を用いた局所半流れの連続性の特徴づけを考える．一様空間を含む一般位相に関する参考文献として，Kelley [15] を挙げる．一様空間 $X = (X, \mathfrak{U})$, $U \in \mathfrak{U}$ および $x \in X$ に対して，

$$U[x] := \{y \in X : (x, y) \in U\}$$

と表す．また，$U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ に対して，

$$U_1 \circ U_2 = \{(x, y) \in X \times X : z \in X \text{ が存在して，} (x, z) \in U_2 \text{ かつ } (z, y) \in U_1\}.$$

定義 6.6. X を位相空間，$Y=(Y,\mathcal{V})$ を一様空間，$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間 Λ を添字集合にもつ X から Y への写像の族とする．$x_0\in X$ を固定する．

- 任意の $V\in\mathcal{V}$ に対して x_0 の近傍 N が存在し，すべての $x\in N$ とすべての $\lambda\in\Lambda$ に対して $(f_\lambda(x),f_\lambda(x_0))\in V$ が成り立つとき，$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は x_0 において**同程度連続** (equi-continuous) であるという．
- 任意の $\lambda_0\in\Lambda$ に対して λ_0 の近傍 W が存在し，$(f_\lambda)_{\lambda\in W}$ が x_0 において同程度連続であるとき，$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は x_0 において**局所同程度連続** (locally equi-continuous) であるという．

定理 6.7 (ref. [18])**.** $X=(X,\mathcal{U})$ を一様空間とし，$\Phi\colon \mathrm{dom}(\Phi)\subset\mathbb{R}_+\times X\to X$ を，$T(\cdot)\colon X\to(0,\infty]$ を脱出時刻関数とする局所半流れとする．

$$I\times W\subset\mathrm{dom}(\Phi)$$

を満たす $\mathbb{R}_+$ の区間 I と X の部分集合 W の組 (I,W) に関する以下の条件は同値である：

(a) 制限写像 $\Phi|_{I\times W}\colon I\times W\to X$ は連続である．

(b) 任意の $x\in W$ に対して $I\ni t\mapsto\Phi^t(x)\in X$ は連続かつ，$(\Phi^t|_W)_{t\in I}$ は局所同程度連続である．

$T(\cdot)$ が下半連続ならば補題 6.4 より，$I\times W\subset\mathrm{dom}(\Phi)$ なる組 (I,W) は存在する．

定理 *6.7* の証明. (b) $\Rightarrow$ (a): $(t_0,x_0)\in I\times W$ を固定し，$\Phi|_{I\times W}$ が (t_0,x_0) において連続であることを示す．$U\in\mathcal{U}$ とし，$U'\circ U'\subset U$ なる対称な $U'\in\mathcal{U}$ を取る．$I\ni t\mapsto\Phi^t(x_0)\in X$ は t_0 で連続だから，$\delta>0$ が存在し，すべての $t\in I$ に対して

$$|t-t_0|<\delta\implies\Phi^t(x_0)\in U'[\Phi^{t_0}(x_0)].$$

また，$(\Phi^t|_W)_{t\in I}$ の x_0 における局所同程度連続性より，$\delta'>0$ と x_0 の近傍 N が存在して，すべての $(t,x)\in I\times W$ に対して

$$|t-t_0|<\delta',\ x\in N\implies(\Phi^t(x),\Phi^t(x_0))\in U'.$$

$\delta_0=\min\{\delta,\delta'\}$ と置くと，これはすべての $(t,x)\in I\times W$ に対して

$$|t-t_0|<\delta_0,\ x\in N\implies\Phi(t,x)\in U[\Phi(t_0,x_0)]$$

が成り立つことを意味する．よって，$\Phi|_{I\times W}$ は (t_0,x_0) において連続である．

(a) $\Rightarrow$ (b): 任意の $x\in X$ に対する写像 $I\ni t\mapsto\Phi^t(x)\in X$ の連続性は仮定から従う．$x_0\in W$ を固定し，$(\Phi^t|_W)_{t\in I}$ が x_0 において局所同程度連続であることを示す．I は区間であるので，$[a,b]\subset I$ なる任意の有界閉区間に対して，$(\Phi^t|_W)_{t\in[a,b]}$ が x_0 において同程度連続であることを示せばよい．

$(\Phi^t|_W)_{t\in[a,b]}$ が x_0 において同程度連続でないと仮定して矛盾を導く．すると，次が成り立つような $U\in\mathcal{U}$ が取れる：W における x_0 の任意の近傍 N に対して，$(t_N,x_N)\in[a,b]\times N$ が存在して，

$$(\Phi^{t_N}(x_N),\Phi^{t_N}(x_0))\notin U.$$

$\mathcal{N}$ を x_0 の X における近傍全体の集合とし，包含 $\subset$ による有向集合と考える．すると，x_N の取り方よりネット $(x_N)_{N\in\mathcal{N}}$ は x_0 に収束する．また，$(t_N)_{N\in\mathcal{N}}$ はコンパクト集合 $[a,b]$ におけるネットであるから，ある $t_* \in [a,b]$ に収束するような部分ネット (t_{N_α}) が存在する．$\Phi|_{I\times W}$ は連続であるから，

$$\Phi^{t_{N_\alpha}}(x_{N_\alpha}) \to \Phi^{t_*}(x_0), \quad \Phi^{t_{N_\alpha}}(x_0) \to \Phi^{t_*}(x_0).$$

これは，$(\Phi^{t_{N_\alpha}}(x_{N_\alpha}), \Phi^{t_{N_\alpha}}(x_0)) \notin U$ に矛盾する．よって，$(\Phi^t|_W)_{t\in[a,b]}$ は x_0 において同程度連続である． □

注 14. 一様空間における局所半流れは Sell [18] によって扱われている．この定理は，そこで扱われている内容の若干の一般化である．

定理 6.8 ([20, 16]). $X = (X, \mathcal{U})$ を一様空間とし，Φ を $T(\cdot)\colon X \to (0,\infty]$ を脱出時刻関数とする X における局所半流れとする．このとき，$T(\cdot)$ が下半連続かつ Φ が連続であるための必要十分条件は，以下が成り立つことである：

(i) 任意の $x \in X$ に対して，$[0, T(x)) \ni t \mapsto \Phi^t(x) \in X$ は連続．
(ii) 任意の $x \in X$ に対して $T > 0$ と x の近傍 N が存在して，
  1. $[0,T] \times N \subset \mathrm{dom}(\Phi)$,
  2. N への制限写像の族 $(\Phi^t|_N)_{t\in[0,T]}$ は同程度連続．

証明．(必要性) $x \in X$ を固定する．補題 6.4 より，$T(\cdot)$ の下半連続性は (ii) の 1 が成り立つような $T > 0$ と x の近傍 N の存在を保証する．Φ は連続であるので，(i) が成り立つ．とくに，$\Phi|_{[0,T]\times N}$ は連続であるので，(ii) の 2 が成り立つ．

(十分性) $T(\cdot)$ が下半連続であることは定理 6.7 より従う．

$x_0 \in X$ を固定する．定理 6.5 と同様にして，次の条件を満たす $0 < T < T(x_0)$ からなる集合 S を考える：

- x_0 の近傍 N が存在して，$[0,T] \times N \subset \mathrm{dom}(\Phi)$,
- $(\Phi^t|_N)_{t\in[0,T]}$ は同程度連続である．

定理 6.5 の証明と全く同様の議論により，$\sup S = T(x_0)$ が従う．したがって，任意の $0 < T < T(x_0)$ に対して x_0 の近傍 N が存在し，

$$[0,T] \times N \subset \mathrm{dom}(\Phi)$$

かつ，$(\Phi^t|_N)_{t\in[0,T]}$ は同程度連続である．よって，定理 6.7 より $\Phi|_{[0,T]\times N}$ は連続である．これより，Φ は連続である． □

注 15. 仮定 1 を

- 任意の $x \in X$ に対して，$(0, T(x)) \ni t \mapsto \Phi^t(x) \in X$ は連続である

にすれば，制限 $\Phi|_{\mathbb{R}_{>0}\times X}\colon \mathbb{R}_{>0} \times X \to X$ の連続性が得られる．

6.5 局所同程度連続 C_0 半群

定義 6.9. X を位相線型空間，$(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ を X の上の線型作用素の族とする．以下の性質が満たされるとき，$(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ は **局所同程度連続** C_0 **半群**であるという：

1. $S(0)$ は X 上の恒等作用素である．
2. すべての $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ に対して，$S(t_1+t_2) = S(t_1)\cdot S(t_2)$．
3. 各 x に対して，曲線 $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto S(t)x \in X$ は連続である．
4. $(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ は $0 \in X$ において局所同程度連続である．

注 16. Yosida [21] では，局所凸空間における同程度連続 C_0 半群が扱われている．

上の定義 6.9 の性質 1, 2 を満たす線型作用素の族 $(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ を，X 上の（線型）半群とよぶことにする．

補題 6.10. X を位相線型空間，$(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ を X の上の線型作用素の族とする．$(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ が $0 \in X$ において局所同程度連続なら，$(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ は各 $x_0 \in X$ において局所同程度連続である．

証明. 各 $x_0 \in X$ に対して，$\{x_0 + N : N \text{ は } 0 \in X \text{ の近傍}\}$ が x_0 の基本近傍系であることから従う． □

系 2. X を位相線型空間，$(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ を X 上の線型半群とする．このとき，以下の性質は同値である：

(a) $(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ は局所同程度連続 C_0 半群である．
(b) 半流れ $\mathbb{R}_+ \times X \ni (t,x) \mapsto S(t)x \in X$ は連続である．

証明. 次で定義される X における半流れ $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times X \to X$

$$\Phi(t,x) = S(t)x$$

に対して，定理 6.7 を $I = \mathbb{R}_+$, $W = X$ として適用する．すると，性質 (b) は (i) 任意の $x \in X$ に対して $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto S(t)x \in X$ は連続，かつ (ii) $(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ は局所同程度連続であるであることと同値である．これは，補題 6.10 より，$(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ が局所同程度連続 C_0 半群であることを意味する． □

参考文献

[1] N. P. Bhatia and O. Hájek, “Local Semi-dynamical Systems,” Springer-Verlag, Berlin-New York, 1969.

[2] C. Chicone, “Ordinary Differential Equations with Applications,” Second edition. Springer, New York, 2006.

[3] C. M. Dafermos, *An invariance principle for compact processes*, J. Diff. Eqns. **9** (1971), 239–252.

[4] R. Gordon, *Riemann integration in Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math. **21** (1991), 923–949.

[5] O. Hájek, *Theory of processes. I*, Czechoslovak Math. J. **17** (1967), 159–199.

[6] O. Hájek, *Local characterisation of local semi-dynamical systems*, Math. Systems Theory **2** (1968), 17–25.

[7] J. K. Hale, *Linear functional-differential equations with constant coefficients*, Contributions to Differential Equations **2** (1963), 291–317.

[8] J. K. Hale, *A stability theorem for functional-differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 942–946.

[9] J. K. Hale, *Dynamical systems and stability*, J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 39–59.

[10] J. K. Hale and J. Kato, *Phase space for retarded equations with infinite delay*, Funkcial. Ekvac. **21** (1978), 11–41.

[11] J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, "Introduction to Functional Differential Equations," Springer-Verlag, New York, 1993.

[12] Y. Hino, S. Murakami and T. Naito, "Functional-differential equations with infinite delay," Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[13] F. Kappel and W. Schappacher, *Some considerations to the fundamental theory of infinite delay equations*, J. Differential Equations. **37** (1980), 141–183.

[14] J. Kato, *Stability problem in functional differential equations with infinite delay*, Funkcial. Ekvac. **21** (1978), 63–80.

[15] J. L. Kelley, "General Topology," D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London, 1955.

[16] J. Nishiguchi, *A necessary and sufficient condition for well-posedness of initial value problems of retarded functional differential equations*, J. Differential Equations **263** (2017), 3491–3532.

[17] K. Schumacher, *Existence and continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay*, Arch. Rational Mech. Anal. **67** (1978), 315–335.

[18] G. R. Sell, "Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations," Van Nostrand Reinhold Co., London, 1971.

[19] H. L. Smith and H. R. Thieme, "Dynamical Systems and Population Persistence," American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[20] H.-O. Walther, *The solution manifold and C^1-smoothness for differential equations with state-dependent delay*, J. Differential Equations **195** (2003), 46–65.

[21] K. Yosida, "Functional Analysis," Springer-Verlag, Berlin, 1980.