数理解析研究所講究録
第2083巻 2018年 26-37

Categoricity and Functional Analysis

三重大学 教養教育機構 伊藤美香 *
Mika Ito
College of Liberal Arts and Sciences,
Mie University

1 Introduction

本研究は、無限次元における関数解析と Categoricity の役割について数学的証明論に基づいた議論を展開している。

具体的には Baire's Category における基礎をふりかえることにより、関数解析が有する本来の可能性を明らかにしている。さらに数学的証明の観点から言及することで、無限次元解析の具体的な全貌とその問題点を明らかにすることが可能となる。

関数解析、とりわけ無限次元解析においては、必ずしも連続・不連続および線形・非線形を区別する必要がない。Categoricity に注目することは、関数解析全体における明確化した見通し良い証明の可能性を見出すことでもある。例えば、 極限に注目することは証明を具体的にする。

また関数解析を Categoricity から検討することは、数学的証明論の観点からみても本質的議論ができるというにとどまらず、問題点も明確にするという利点がある。

有限次元解析と無限次元解析では、この２者は全く異なる計算的振る舞いをみせる。証明論における関数解析としてのいくつかの満たすべき定理を示したうえで、各々特徴をとらえながら証明をおこなうことが可能となり、さらに無限級数における特別な位置づけを見出すことができる。

本稿においては計算機における定理証明を念頭におき、Categoricity の意義と関数解析の関係を数学的証明という観点により見出し、その可能性を議論している。

2 Background

K.Weierstrass は論文

Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments,die fur keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen.

*三重大学非常勤講師. This work was supported by the Reserch Institute for Mathematical Sciences, a joint Reserch Center located in Kyoto University.

において、連続なのに至る所微分不可能な関数を示した。[1]

微分可能であれば連続であるが、しかし 連続であっても微分可能とは限らない、というわけである。

このことは、微分可能とはどういうことかを我々に突きつけた。このような経緯から位相空間および関数解析学は始まった。

結果として differentiability は連続・不連続の別を意味しない。関数解析においてこの点は重要である。

> 線形・非線形現象は無限次元解析で扱うことができる。Banach 空間における *Lebesgue* 積分を考えればよい。しかし無限級数の扱いは、有限次元とは全く異なることに意識を向ける必要がある。
>
> 有限次元で成り立つ定理を無限次元で行うことが困難な理由の 1 つは、無限級数の扱い方とその特質にあるといえるのかもしれない。Category[2]はこれをうまくそれを意識させていかすことができる。

Fourier 級数におけるいくつかの難問が存在している。

解析的に解くことは時に近似という手法が普通に使われる。だが、いくら近似させたところで数学的な証明にはならないという問題が存在する。これは数学的な理論というよりもむしろ連続のプロセスの解析における問題点といえるものであるが、無限級数の有する独自な集合の解析が *G.Cantor* の集合論の始まりの観点でもあったことを考えると決しておろそかに見過ごすことがあってはならない問題であるといえる。

有限次元・無限次元空間における共通概念としての関数解析を Category のもとに基礎におき、数学的証明の考察とともに考えてゆく必要があるであろう。

本稿は、以上の観点から理論背景の展望を含む Résumé として、無限次元解析における普遍的なその証明論的考察を試みている。

3 Categoricity and Baire' s category

S.Banach は *Baire'category* を使い連続関数の考察をおこなった。これは *Banach* 空間の定義の元となった考察 *Baire's Theorem* を具体的に示すものである。

> *Banach* 空間上では区間 [0,1] 上の連続関数全体がつくる線形ノルム空間 $C[0,1]$ から、さらに同様の連続な線形関数全体からなる双対空間が定義される。
>
> これが線形位相空間と同様にみなされ、$C[0,1]^*$ は極値問題を解くカギとなってきた。無限次元解析における空間としての役割を *Banach* 空間は有してきた。

時を経て、関数解析を集合論の前線から見ると、実際の解析学で現れる集合のほとんどは射影集合の正則性から射影階層の最初の 1 層、 2 層に過ぎないことがわかっている。

---

[1] *B.Bolzano* がこれに先立ち同様の関数をすでに示していた.Compactness と関連させて述べた著者における別冊講究録（数理解析研究所）がある.

[2] *S.Eilenberg, S.Mac Lane.* による 1950 年以降代数的位相幾何学から発展をみせる圏論との関連も興味深い. 本稿は集合論の起源を直接たどる Categoricity からの関連においてとらえている.

正則性とは次の 1)-3) が成り立つことをいう。
すべての *Borel* 集合が
1).*Lebesgue* 可測である.（*Luzin*）
2).*Baire's categorie* をみたす（*Luzin and Sierpiński*）
3). 完全集合の性質をみたす.
これ以外の数学的証明は *ZFC* を使い証明する範疇であることを意味する。

この観点[3]
から関数解析を眺めると *Baire's categorie* が本質的に重要であることが理解されるであろう。*Banach* 空間を支える定理が次に述べる *Baire's Category Theorem* である。

3.1 定理証明における Baire's Category と役割

定理証明における明確な分類とその見通し良さを見出すことは、調和解析および組み合わせ論的研究においても盛んに研究がなされてきた。しかしながらこれらが完全に調和し、解析学に日常的に取り入れられ、計算機における証明においてより効果的に用いられるまでには至っていない。

分野別の研究に統一的な論点を与える意味においても、無限次元解析の数学的証明における統一的見解は必要である。その上、物理学的現象に数学的証明を与える必要性も近年増してきている。

> 数学的証明論の観点で言うならば、それが超数学的証明であるべきであるという点が重要である。さらにみたすべきいくつかの定理がある。無限次元の証明では、有限次元において普通に成り立つことが通用しない場合があるという点を見逃してはならない。

Baire's Category Theorem から *Banach* 空間論は誕生したが、無限次元解析その誕生とともにこの Theorem は関数解析における証明の特質を包含してきたのである。

3.1.1 Banach の証明の概略

> 定理 2.1: *Baire's Theorem*
> 関数空間 E における（有限）部分集合である A は, 点 $t \neq 1$ とならないどの範囲においても右微分係数をとらず, これを第 2 category とする. この補集合 $\overline{A}$ を第 1 category とする.

開区間, 閉区間で語られる「Baire の Category 定理」が示される箇所.

> 定理 2.2: *S.Kaczmarz, S.Auerbach's Theorem*
> 任意に与えれれる $r > 0, M > 0.$ において, 関数空間 E に要素 g が存在すれば, この時の性質は次の a).b) によってあたえられる.

[3]ゆえに本稿では集合論自体の有する豊かで複雑な世界において, 数学的研究の範疇のほとんどを占める 1 層, 2 層にかぎって述べているということになる. これは P, NP 問題のような ZFC が要求される範疇における議論は含まないことを意味する.

a).$||g|| < r$.
b).$U(g,t,h) > M$. ただし $t \neq 1, h_t > 0$.
このことは、集合 A が第 2 category, その補集合 $\overline{A}$ が第 1 category であることを示す.

定理 2.3: *S.Banach's Theorem*
集合 A は (有限) 部分集合. もしくは空集合（第 2 category)
集合 A の補集合 $\overline{A}$ は極限が存在する箇所（第 1 category)

3.2 Category and 第 1Category における Limit

Compact 集合とは有限交差性をもつ閉集合の集まりのことである。以下に関連する定理をのべる。

定理 2.4: Compact 空間
位相空間 X の compact 集合 K の閉部分集合 C は compact 集合.
Hausdorff 位相空間 X において compact 集合は閉集合.

位相空間において極限を filter の概念で定義する。そこから導かれる定理として

定理:2.5
X が compact であるための必要十分条件は, X の任意の極大 filter がある点に収束すること.

ここから *Tikhonov* の定理がみちびかれる。この定理において *Banach* 空間における無限和・無限積が定義される。
Baire's Category を証明した *Banach* は第 1 category が limit を持つことを証明した。これは第 2 category の補集合にあたる。
以上の定理から閉区間としての第 1 category、開区間として第 2 category において limit を意識した category 的証明が可能となる。

3.2.1 Limitation problem and Limit

極限の存在を保証する定理がいくつか存在している。最初に微分の概念を無限次元空間の場合に拡張したものを *Fréchet* 微分として定義する必要がある。

定義：2.6
f を x の開集合 Ω 上で定義し, その値を Y にもつ写像として, $x_0 \in \Omega$ とする. このとき

$$\lim_{x \to x_0} ||f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)||/||x - x_0|| = 0.$$

となる $T \in L(X,Y)$ が存在するとき,f は $x = x_0$ で *Fréchet* 微分可能という.
Ω の各点で *Fréchet* 微分可能のとき,Ω で *Fréchet* 微分可能という.

定義：2.7

$x \in \Omega$. 任意の $h \in X$ に対して,

$1/t[f(x_0+th)-f(x_0)]$.

が $t \to 0$ のとき, (Y の強位相で) 極限をもつとき f は x_0 で *Gâteaux* 微分可能といい, この極限を *Gâteaux* 微分可能という.

これらの 2 つの定義から次の定理がなりたつ

定理：2.8

f が $x = x_0$ で *Fréche* 微分可能であれば,*Gâteaux* 微分可能であって, *Fréche* 微分と *Gâteaux* 微分は一致する.

極限の存在を保証する有効な条件として次の定理が成り立つ。

定理：2.9*Palais-Smale*

もし X の中の点列 x_n が 1).2) の条件を満たせば, そこから強収束する部分列がとりだせる.

1).$|f(x_n)|$ は有界.

2).$f'(x_n)$ は, n $\to \infty$ のとき (X^* のノルムで)0 に収束する.

定義：2.10

境界値問題との関連から *Laplacian*Δ が定義される.N 次元空間における重要な微分作用素となる.

$$\sum_{i=1}^{N} \partial^2/\partial x_i^2$$

White noise analysis において *Laplacian* が *Lévy* 群と調和解析的にとらえることができることがのべられている。*Laplacian* は無限次元解析における極限の存在にかかわっている。

極限操作を含めた最適値問題としては *Pontryagin* の最大原理があり、これは無限次元解析としての 1 つの観点を与えている。

極限を確率論的議論との関連でとらえる研究があり次章でも言及している。また極限の振る舞い自体を研究対象にする場合も存在している。今後、Category 的証明の観点における、より詳細な考察も必要となるであろう。

4 To Harmonic Analysis and Infinite series

正則関数の *Hardy* 空間の関数の実部（第 2 category）を特徴づける定理がある。これはブラウン運動 (*Brounian Motion*)[4]において定義される最大関数がカギとなり、それらが実数値関数の方法で証明が可能となった。

近年この領域（第 2 category）は確率論的証明が用いられるようになり、また Randomness[5]の観点からも研究がなされている。

[4] *White noize analysis* において無限次元解析の観点から重要な物理的現象を説明している.

[5] *Von Neumann* の研究が起源である.

測度論的な観点が無限次元において果たす役割は大きい。関数解析においては、*Lebesgue* 測度が基本的な概念であり、無限次元解析を可能とさせていることは数学的な証明という観点から見ても重要である。

> 開集合全体は一般的に、行列表現で表現することができる。$Vandermondematrix$ は、関数とのかかわりが見いだされる重要な行列表現である。無限次元的証明の観点からは、群と偏微分方程式で記述される箇所である。これらはすべて、*Baire's Theorem* において第 2 category に相当している。

第 1 category 同様に、無限次元では無限級数はそのままでは用いることができない。無限級数で表される数式の扱いに注意を要することが本質かつ基本である。

最適値問題の未解決の難問の多くは級数が何等かの形で関わる場合が多い。例えば *Fourier* 級数の扱いにおける「*Rochner-Riesz* 平均」総話法での L^p ノルムに関して収束する p の範囲を決定する問題では p が 3 以上になると困難が伴う難題となることがわかっている。

関数解析学における困難の 1 つは、無限級数の扱いともいえるのだろう。

> 無限次元において方程式は偏微分方程式となる。また有限的操作が普通にできないことから群論が必要となる。実際、無限次元をあつかう *Lie* 群において、*Compact Lie* 群が登場以来効果的に用いられきた。そこからは重要な近似定理がいくつか誕生している。

これについては後章でのべることになる。

4.1 Banach space and Lebesgue's Integral

Lebesgue 積分の枠組みで微分可能な関数を取り扱うための関数空間が *Baire's Category* に基づく Banach 空間であり、また無限次元空間である。

この利点はすでに述べたが、極限の存在に注目（第 1 categoty に相当）することができ、連続性の詳しい評価ができるという点において重要である。

無限次元空間として、初期値問題の解が一意に決まらないような非線形現象（離散力学系）を扱えることも重要である。これには chaos 現象を含む。

しかしいかなる空間であるかは現在多様な空間において研究がなされており、Category 的にあまり明確になってはいない。

> 無限次元空間であることを議論の基本とする。有限次元において成り立つ定理を無限次元解析で証明するにはどうしたらよいかという観点に従うこと。例えば、光は無限次元空間における量子状態である。

まずはこれらの視点が重要であろう。加えて要素の無限個の独立な（通常の）独立変数を扱うような場合それ自体はここでは問題にしていない。[6]

[6] *Fock space*（空間内の動きの自由度が無限である空間）内の固有現象の動きというような観点からは, それに沿う各々の考察が必要である. 近年になって抽象 *Lebesgue* 空間が *V.A.Rohlin* によって提案されていることも興味深い. 今後, さらに確立された数学的な証明も要求されるようになるであろう.

4.2 Lebesgue 積分の主要定理

空でない集合 X を固定し、X の部分集合からなる族を $\mathcal{M}$ とする。このとき以下の定理が成り立つ。

定理：3.1 *Lebesgue* の単調収束定理

f,g 等の関数はすべて可測で $\leqq 0$, $E, F, \ldots$ 等は $\mathcal{M}$ の要素とする。

$$0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \ldots, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

に対し、

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu(x).$$

定理：3.2 零集合の定理

$E \in \mathcal{M}$ が $\mu(E) = 0$ を満足するとき E を 0 集合とよぶ。このとき積分の定義から任意の可測関数 $f(x) \geqq 0$ に対し、

$$\int_E f(x)d\mu(x) = 0.$$

可測関数 $f(x), g(x)$ に対し、

$x \in x : f(x) \neq g(x)$ が 0 集合ならば f と g は同等。このとき f が積分確定（可積分）ならば g も同様であり、任意の $E \in \mathcal{M}$ に対して

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \int_E g(x)d\mu(x).$$

0 集合上での関数の値は積分値に影響しない。ゆえに必ずしも X 全体で定義されていない関数 X 上の積分を考えることができ、この点が重要である。

$f(x)$ が可測で $\int |f(x)|d\mu(x) = 0.$ ならば f と 0 は同等。

直積測度には *Fubini* の定理がなりたつ。また 0 集合の部分集合は必ずしも $\mathcal{M}$ に属するとはかぎらないが、定義を拡大し、すべての 0 集合の部分集合が可測空間をつくることができる。これを測度空間の完備化という。

局所コンパクト空間上の測度については *Baire* 集合および *Baire* 測度が定義される。特に *Baire* 測度 μ について以下の定理がなりたつ。

定理：3.3 リース (*Liesz*) の表現定理

$K(X)$ 上の任意の正値線形汎関数 ϕ に対し、X 上の *Baire* 測度 μ で

$\phi(x) = \int f(x)d\mu(x).$ $(f \in K(X))$ を満足するものが存在して μ は ϕ によって一意に決定される。

調和解析的には、*Fourier*級数と確率変数列の関連性が見いだされ、実数値関数で証明することができるようになったことは大きな進歩であるといえる。有界な関数全体と n-array function を用いることができ、更に Category の観点からみると、集合の濃度と関連する空間となっている。

4.2.1 関数解析と第 2 category

First-order の式の集合が有限を仮定すればいくつかの無限 Model をもつ.*Löwenheim-Skolem Theorem* ではそれが同型であるかどうかまでは保証していない。

しかし同型の場合に限り発展を見ることになり、例えば *E.Steinitz* による集合 Σ の濃度を固定しないで同型を保証したものがあった。

前章において実数値関数について少しふれたが

> 関数集合の濃度を考える場合、集合が実数 X の場合よりも必然的に高くなってゆことをふまえれば、実関数での証明が有効に作用することが十分考えられる。実際、実数値関数を用いた証明が無限次元解析に用いられてきている。

完備距離空間 E と関連させて考察すれば、U_n を至るところ稠密な開集合の列とすれば、これらの共通部分も空間 E において至る所稠密となっていることがイメージできよう。

> 定理：2.1 *Baire's Theorem*
> $I = [0,1]$ として考察すれば、I 上の連続関数のほとんどすべては、いかなる点においても有限な右微分係数を持たない。

ここから稠密な状態をイメージすることができる。さらに、この距離空間の見方は近傍との違いを明確にしている。

以上の観点からみて、無限次元解析に用いられる数学的証明にふさわしい空間といえるのである。

関数解析的証明では、有界関数全体の集合が完備性を持つことから *Lebesgue* 測度 0 の集合という概念である *Fréchet* 微分[7]がこの category でも使われ、さらに有界でない関数にも *Lebesgue's Integral* は適応可能である。このことが関数解析を無限次元空間に適用可能なとする直接的起源となっている。

5 Category にみる Compact Lie Groups

第 1 category および 第 2 category における調和解析的な表現が Compact Lie 群で可能となる。*C.Chevalley* によって紹介された Compact 化された Lie 群[8]は、関数解析の発展に伴い必要可欠のものとなった。この分野は今後の発展に負うところも大きく、より詳しい研究にあたり今後の発展を待つことにしたい。以下に要点をまとめる。

---

[7] 閉集合に相当する第 1 カテゴリーと極限を共有するため開集合でありながら極限を有している.

[8] *Compact Abelian Groups* の存在も重要である.

Compact Lie 群の表現は、すべて半単純であり、考察の対象をユニタリまたは直行行列による行列表現 P に絞ることができるという点で Category としての十分な役割を有する。

級数と合わせて表現することができ、うまくとればそのまま収束する値としての極限値を求めることが可能である。

淡中の定理により、任意の *Compact Lie* 群 g は、g の全体集合 R の全群と同一である。
E.J.Cartan の定理の特別な場合において、複素 *Lie* 群は g と *Descartes* 空間との積と同一である。
Compact Lie 環 g の表現環とは g のすべての表現の行列成分により複素数体上に生成される環のことであり、表現環の元とは、g 上の複素数値関数であり行列成分の多項式で表すことができる。

g が行列のつくる compact 群ならば g 上の任意の連続関数は g の表現環に属する関数によっていくらでも精密に近似可能である。

次章において具体的な近似定理を示す。

5.1 近似定理をいくつか紹介

定理:4.1 *(Peter-Weyl)*
g を *Compact Lie* 群、f を g 上の連続関数とする. 任意の数 $a > 0$ に対し g の表現環の関数 g ですべての $\sigma \in g$ に対して $|f(\sigma) - g(\sigma)| \leq= a$ となるものが存在する.

補題:4.2

関数からなる列が同程度連続な関数の有界集合 Φ に属していれば、その中から g で一様に収束する部分列を取り出すことができる.

補題:4.3*Bessel* の不等式

T の任意の関数 f に関して、級数 Σ は収束し, その和は $||f||^2$ で押さえることができる.

補題:4.4

$f \in T$ なら, 級数 $\Sigma_\mu(Kf \cdot \varphi)$ は g 上一様に関数 Kf に収束する.

5.2 Banach Lie Groups

無限次元 *Lie* 群には *Banach Lie* 群がある。1936 年 *G.D.Birkhoff* によってつくられた。

これは完備ノルム *Lie* 環が、*Banach* 空間の開集合上で定義されるものである。1950 年ころ *Dynkin* により完全なものとなる。これは *Hausdorff* の公式を拡大することによりなしとげられた。

また、P-進解析関数においては指数関数・対数関数が研究され、例えば指数関数の級数の場合、すべての点では収束しないにもかかわらず、基本的な等式は成り立つという振る舞い方をすることがわかっている。

これらにおいて重要な点は、*Lie* 群の局所的な理論が *Chevalley* の弟子により発展をみせ、P-進 *Lie* 群に適用できることが明らかになるにつれて、級数の収束に関する研究が *Compact Lie Group* に集約される形に向かったことである。

このことは、無限次元における級数の扱いの観点も含めて歴史的に大きな影響をもたらしたといえよう。

6 Proof Theory and Metamathematics

無限次元解析における数学的証明の必要性は高い。

例えば個別の物理的現象において、それらを実証し確かめることは多くなされてきたが、定式化がもたらすさらなる発展と同時に数学的証明はなくてはならないものへと向かう。しかしそれだけではない。

物理的証明はときとして数学的証明をもって初めて理論的な体系を有するに値することになる。このことは、定理証明系システムにおいても同様な意味をもつ。

数学的証明を特徴つける概念として完全性、健全性、無矛盾性が成り立ちことを保証する必要がある。

証明論的観点からは超数学的証明をすることが要求される。これは第 3 者がそれについて述べる方式の証明である。

6.1 Meta Theorem としての数学的証明の必要性

First order Logic における Equality の範疇において Completeness を考えることが基本である。

> 具体的には標準 model、可算標準 model、無限標準 model および巨大基数 model を Meta Theorem として位置付ける。Conpactness がこれらの本質となっている。
>
> 巨大基数 model は有限可算性を仮定して、無限 model の存在を明示するものであり、*Löwenheim-Skolem Theorem* に相当するが、無限 model が同型であることまでは保証していない。

すでに述べたが、同型での発展は、*E.Steinitz* による集合 Σ の Cardinality を固定しないで同型を保証するものがある。集合が関数集合の場合は、その集合は実数 X よりも必然的に高くなってゆく。

ここで例えば Cardinality を同型でないものも含めて考察するため n-arry function に効果的な手段を与える方法を提案するなら、*Baire's categorie*[9]における空間全体を統一的にとらえることの意義が明らかとなるであろう。このことは、同様に *Compact Lie Groups* で定義することの役割を明確にしている。

6.2 NonStandard Analysis

これまでの論文の流れから、さらなる発展をめざして無限次元解析的な証明が求められることになるであろう。具体的には超準解析的証明をする展開となり、本稿では Internal な手法での証明を取り入れることを提案して、今後の議論展開を待つことにしたい。

By the end of 1970', the views of the place and role of infinitesimal analysis had been drastically changed and enriched after publication of the internal set theory.IST by E.Nelson and the external set theory propounded soon after IST by K.Habacek and T.Kawai.

参考文献

[1] S.Arora,B.Barak.*Computational Complexity*,Cambridge University Press.(2009)

[2] R.Baire,E.Borel,H.Hadamard and H.Lebesgue.*Cing letters sur la theorie des ensembles*, Bull.Soc.Math.de France.(1905)pp.261-273.

[3] R.Baire.*Les Fonctions Discontinues*,Gauthier-villars.(1905)

[4] S.Banach, K.Kuratowski.*Sur une generalisation du problem de la measure*, Fundamenta mathematicae.14 (1929)pp.127-131.

[5] S.Banach.*Über die Baire'sche Kategorie gewisser Functionenmengen*, Recu par la Redaction le 7.5.(1931)

[6] G.Birkhoff, S.Maclane.*A survey of Modern Algebra*,The Macmillan Company.(1965)

[7] N.Bourbaki.*Éléments d'historie des mathématiques* , Masson Paris.(1984)

[8] *É.Borel.Sur la classification des ensembles de mesure null*, Bull.de la SMF, 47(1919)pp.97-125.

[9] C.Chevalley.*Theory of Lie Groups*, Princeton University Press.(1946)

[10] E.I.Gordon, A.G.Kusraef and S.S.Kutateladze.*Infinitesimal Analysis*, Kluwer Academic Publishers.(2002)

[11] J.Harrison.*Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning*, Cambridge University Press.(2009)

[9]完備距離空間 E における *Baire's Theorem* を参照

[12] T.Hida, H.H.Kuo, J.Potthoff and L.Streit. *White Noise Analysis*, World Scientific Publishing.(1990)pp.140-165.

[13] S.G.Krantz.*A Panaroma of Harmonic Analysis*,The Mathematical association of America.(1999)

[14] *P.Lévy.Problémes concrets d'analyse fonctionnelle*,Gauthier-villars.(1951)

[15] J.V.Newmann. *Various techniques used in connection with random digits*, Applied Math Series,12(1951)pp.36-38.

[16] P.Rosenthal.*The remarkable theorem of Lévy and Steinitz*,American Mathematical Monthly,94(4).(1987)pp.342-351.

[17] A.Torchinski.*Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*,Academic Press.(1986)

[18] K.Weierstrass. *Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die fur keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen*, Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 18. Juli (1872)