

# 2020年のカタストロフ理論

石川剛郎 (北海道大学大学院理学研究院数学部門)

Goo Ishikawa (Hokkaido University, Department of Mathematics)

## 1 イントロダクション

私は、2000年の春の日本数学会年会の企画特別講演として「ラグランジュ・ルジャンドル特異点をめぐって」という講演を行なった。そのときの副題は「2000年のカタストロフ理論」だった。それから、あっという間に歳月が流れ、本稿を書いている。この原稿が日の目を見るのが2020年頃かわからないが、今回のサーベイ論文に上のようなタイトルを付けてみた。

ところで、2000年の講演アブストラクトには私は次のように記している：

ルネ・トムが「カタストロフ理論」を提唱してから30年あまりの月日が経った。若い方の中には、カタストロフ理論という名前を聞いたことがない人もおられると予想する。この講演を準備するにあたり、トムの代表的著書「構造安定性と形態形成」をもう一度読み返してみた。いまなお刺激的でおもしろい本である。カタストロフ理論とは何か。一言で説明するのはもちろん難しいが、あえて言うと、「対象の状態空間における分岐集合の特異性を調べることにより、局所的形態形成を研究する方法・視点」である。したがって、カタストロフ理論は局所理論であり、形に関する理論であり、その最も基本になる概念・対象は「分岐集合」である。分岐集合は「カタストロフ集合」ともよばれる。どんな状況でも、分岐集合は何か、と問うてみること、それがカタストロフ理論の精神の具現であろう...

そして、関連するラグランジュ特異点、ルジャンドル特異点のその当時の最新の結果をサーベイしたのだった。いまなら、「ルネ・トムが「カタストロフ理論」を提唱してから50年あまりの月日が経った」となるのだろうか。

それ以前に、泉屋周一さんが応用特異点を提唱し [21] を上梓し、また、数年後、私は「数学」の論説 [8] で、可微分写像の特異性の具体的な分類に関する研究、特に、さまざまな幾何構造が交錯する状況で見いだされる「特異な特異性」の分類とその応用について解説した。

今回は、専門書 [21] や論説 [8] を踏まえ、その後の関連する研究の進展の一部を概説する。なお、専門書 [20] も関連する内容を扱っている。

まず、ルネ・トムの著書「構造安定性と形態形成」を概観する。次に、カタストロフ理論に関する私見をのべ、その基盤となると思われる具体的な結果を紹介する。そして、最近の関連するフロンタル特異点の研究にも触れるといった、鷹揚に記された短文集という体裁になっている。

もちろん、私が解説できる研究結果は、どうしても私自身の結果が中心となってしまい、限られたものになるが、それでも、今後の研究に発展に少しでも寄与できるように述べてみたい。

最終的には、「カタストロフをカタストロフとしない形態制御」に応用することを目指していきたい。実は幾何学的制御理論の枠組みでカタストロフ理論を解説することも構想していたが、まだまとまっていない段階なので、それは後日、稿を改めて世に問いたい。

## 2 ルネ・トムの「構造安定性と形態形成」概観

「構造安定性と形態形成」[25] をざっと眺めてみよう。

第1章「序論」では、モデルとは、形態とは、カタストロフ集合とは、といった、次章以降で詳しく述べられる一般的なスタンス、ものの考え方が簡単に触られている。第2章「形態と構造安定性」では、形態の研究における構造安定性の重要性が述べられ、第3章「数学における構造安定性」において、いわゆる数学的なカタストロフ理論の枠組みの基本が解説され、引き続き、第4章「形態の運動学；カタストロフ」において理論の核心が述べられる。ここでは、静的モデルと代謝モデルが導入される。状態空間  $B$  と時間軸  $T$  の直積にカタストロフ集合  $K$  が与えられているとする。このとき静的モデルは、各  $x \in W \setminus K$  (正則点) に対して、 $W = B \times T$  と内部変数  $U$  との直積上の関数  $G: W \times U \rightarrow \mathbb{F}$  で与えられる。ここで  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  である。このとき、関数  $G(x, \cdot): U \rightarrow \mathbb{F}$  が定まる。代謝モデルでは、各  $x \in W \setminus K$  に対して  $U$  上の  $x$  に依存するベクトル場  $X(x)$  と力学系  $(U, X(x))$  のアトラクタ  $c(x)$  で与えられる。さらに、通常カタストロフ (カタストロフ集合が半解析的、あるいは劣解析的) と本質的カタストロフの概念が導入される。静的モデルの解説に、波面 (wave front) が取り上げられている。第5章「レジームの闘争に由来する空間  $\mathbb{R}^4$  上の基本カタストロフ」で、いわゆるトムによる初等カタストロフの分類が解説されている。第6章「一般モルフォロジー」は一般カタストロフの概説である。

第7章「形態力学」では、冒険的なアイディアとトム自身が書いているが、力学のモデル、情報と位相的複雑度、情報・意味・構造安定性、エネルギーと空間的複雑度、形式力学、形態と情報、という項目が並ぶ。

さらに、生物学から言語学までの応用カタストロフ理論が、第8章「生物学とトポロジー」、第9章「発生学における局所モデル」、第10章「生物のための全体的モデル(後生動物)」、第11章「微細構造におけるモデル」、第12章「生物学における大問題」、第13章「動物から人間へ:思考と言語」と展開されている。第8章の最初に出てくる次の言葉は深く理解したいところである:

... 生物学の根本的問題はトポロジーの問題である。トポロジー(位相幾何学)はまさに局所から大域への移行をゆるす数学の部門であるからである....

### 3 2020年のカタストロフ理論と応用特異点論

さて、トムによれば、カタストロフ理論は、基本(初等)カタストロフ理論と、一般カタストロフ理論に大きく分けられる。この分類はトムの言葉で言う「静的モデル」と「代謝モデル」の違いに対応する。カタストロフ理論の基礎は、写像の特異点論であり、力学系の分岐理論である。基本カタストロフ理論は、極言すれば関数族の特異点論の応用であり、関数の臨界点の分岐に基づくモデルを構築しようとする。写像の特異点論の基本概念であり、基本カタストロフ理論の基礎概念は構造安定性と開折のヴァーサリティーである([1][3][24])。

ルネ・トムは、「構造安定性と形態形成」において、特異点論と実代数幾何を応用したカタストロフ理論を創始し、生物の形、すなわち、生体の形態形成を鮮やかに説明してみせた。そのときの根本的な概念が構造安定性であった。さらに、社会科学を含めたより広い分野にカタストロフ理論を応用する試みがなされた。しかし、その根拠、すなわち、応用可能であるという根拠、は希薄であったといわざるを得ない。

現代では、当時と比較すると状況が次の3点で異なっている。

1つ目は、特異点論および実代数幾何が発展していること、幾何学的特異点論によって、様々な状況において安定的に現れる特異点が分類され解析されていることである。構造安定性は、その枠組み、扱うべき対象の制約条件に関わって決まる概念であり、きめ細かな理論が必要であり、実閉体上の代数幾何と共に、ルネ・トム(やマザー)の理論を超えたものが整備されてきているのである。

2つ目は、広い意味の形態の問題が広い分野で認識され、重要性が増大していること、幾何学を応用できる、あるいは応用すべき分野が当時に比べて格段と広がっていることである。現代では異分野の情報が得やすく、応用上の敷居が低くなっていて、異なる分野の問題意識・哲学を理解した上で抽象化し、幾何学化することが当時に比べれば容易になってきている。

3つ目は、幾何学的な制御理論が整備され、当時に比べると、形態を制御するような動的な問題を数学の問題としてより明確に定式化できるようになってきたこと、さ

らにその離散化により、現実的に広い意味の形態制御のモデルを提案し現実的に設計可能になってきたことである。

ここでは、「形態」という言葉を広い意味で用いている。化学物質の形態、生体の形態、ネットワークの形態・トポロジー、また、空間だけではなく時空における形態も扱うことができるから、「形態」とはロボット、工作機械のモーシオン・プランニングの問題なども視野に入れた用語である。

このような背景をもとに、この形態制御という大きくて重要な問題に対して、実特異点論および実代数幾何に的を絞った上で、具体的な応用問題に即してモデルを提案し解析し、その中でより汎用的な数学理論を創ることを目指したい。単に、古い理論を新しい問題に適用してみる、ということではない。古い理論を振り返りながら、その過程で、従来の理論からより新しい理論を創り、その新しい理論を新しい問題に应用するのである。新しい酒を新しい器に入れるのである。

ルネ・トムは著書「構造安定性と形態形成」[25]により、トムソンの「生物の形」を数学的に説明しようとした。このいわゆる「カタストロフ理論」は、関数の特異点の開折 (unfolding) の理論を基礎とし、生物の発生、形態形成の理論に適用された。すなわち、ルネ・トムは、ポテンシャル関数の開折 (変形) の分岐集合の幾何を生物形態の形成理論に適用しようとした。この理論は、広く社会科学にも適用され、いわゆる「カタストロフ理論」と呼ばれた。もちろん、その理論は、適用できる正当な条件が満たされていれば適用可能である。通常は拘束条件が課せられているのが現実であり、近似的にも条件が満たされず、理論がそのまま適用されることはない。

形態形成という (ルネ・トムの) 生物系への特異点論の応用のイメージが強い。しかしながら、それに限ることはない。「形態」を広い意味に捉えている。例えば、ナノ・サイエンスにおいて扱われている形態は「機能」と深く関わっているから、形態の問題は本質的である。

化学物質・微細構造の形態、結晶成長、生体の形態を理解し、物性の創発に基づいて形態を制御すること、微細構造から巨視的構造に渡って、その形態発展の制御は、化学・生物・工学の分野で重要である。新物質の開発、医療技術、等と関連して、基本的かつ応用上重要な課題である。理論的には、化学結合の空間問題は、量子力学的変分問題の解の特異性 ([26])、確率振幅の重ね合わせから得られる相関数の臨界特異性、あるいはフェーズ特異性などの問題が根本にあるのであって、特異点論、実代数幾何に関わって当然であり、この視点はまだ考慮されていないと思われる。

形態の分岐、変形問題も、時空で考えれば (次元の高い) 形態である。幾何学的特異点論の分野では、トム、マザー等による一般論に引き続いて、様々な制約条件のもとでの構造安定性およびその形態の分岐の解析が発展している。また、代数幾何学の発展に基づいて、実代数幾何の一般理論が研究され、半代数集合、劣解析集合の幾何



学，実閉体の研究が発展もめざましく，たとえば到達集合の劣解析性など，広く制御系の研究に応用されている．これは，ルネ・トムのカタストロフ理論が提唱された時代とは明らかに異なっている．理論も発展し，応用技術も発展し，応用の社会的重要性も増大している．

幾何学的特異点論の分野では，近年，様々な制約条件のもとでの構造安定性およびその形態の分岐の解析が発展しつつある（次節以降を参照）．また，[22][15][16][18][19]も参照せよ．一方で，実代数幾何の発展もめざましく，たとえば到達集合の劣解析性など，広く制御系に応用されている．この状況は明らかに，ルネ・トムがカタストロフ理論を提唱した時代とは大きく異なっている．理論も発展し，応用技術も発展し，応用の社会的重要性も増大している．そこで，(広い意味の) 形態制御の具体的な問題をとりあげ，形態制御のために必要な特異点論，実代数幾何の研究を推進していくことが重要である．応用の可能性を広げることと同時に，応用できるという根拠を明確にする．理論的に整備され，実験，実装技術，画像技術が発展し，また，形態制御の重要性が増している現在において，実特異点論と実代数幾何に的を絞った応用とフィードバックを目指すことに大きな意義がある．

## 4 特異性の分類と認識

数学における分類というものの基本的な考え方は，対象の範囲および分類の同値関係を合理的に設定し，標準形により代表元を明示するというものである．分類問題では，設定された範囲内に新しい例があることを発見し，従来知られているものと同じではないことを証明したり，あるいは，設定された範囲内には，もう新しい例が見つからない，ということを実証したりして，完璧な分類リストを完成させることを目標とする．

現代の幾何学の中で，特に，接触幾何やシンプレクティック幾何は特別な役割を果たしている．幾何の問題を追求していく過程で，接触構造・シンプレクティック構造が陰に陽に自然に現れ，その上に固有の幾何学が展開されることが多い．これらの構造は，位相構造や微分構造そのもの程ではないものの，‘柔らかい’構造である．一方で，幾何学において，当然ながら計量構造，共形構造，射影構造などの比較的‘固い’構造も重要である．幾何構造の分類とともに，幾何構造が写像の特異性にどのように反映されるか，分類問題・分類結果にどのような違いが生じるかに注目することを考えたい．

さらに分類された特異性を特徴付ける，いわゆる認識問題も重要である．

たとえば，ある幾何学的問題で現れるユークリッド空間内のジェネリックな特異点の分類リストが，空間を少し摂動したときにも通用するのだろうか，という問題の解決には，認識問題の解が非常に役に立つ．

## 5 接線曲面の特異点の分類問題

Euclid 幾何学で局所的に平面と等長的な曲面を可展面 (developable surface) と呼ぶ. その重要な例として接線曲面 (tangent surface, tangent developable) がある. 空間曲線の接線の作る線織面である. 接線曲面は特異点を持つ ([4][10]).

接線曲面の特異性は, 曲線の型 (type) とよばれる射影不変量によって記述される.  $I \subset \mathbb{R}$  を开区間とする. 射影構造が与えられた多様体上の曲線  $\gamma: I \rightarrow M$  を考える. 曲線  $\gamma$  が  $t_0 \in I$  で有限型 (of finite type) であるとは,  $\gamma(t_0)$  を中心とする  $M$  上の局所射影座標系  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  と  $t_0$  を中心とする  $I$  の局所座標系  $t$  および狭義単調増大する自然数列  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m$  が存在して,  $\gamma$  が次の局所表示を持つときに言う:

$$x_1(t) = t^{a_1} + o(t^{a_1}), \quad x_2(t) = t^{a_2} + o(t^{a_2}), \quad \dots, \quad x_m(t) = t^{a_m} + o(t^{a_m}).$$

曲線  $\gamma$  が  $t_0 \in I$  で有限型であるとき,  $a_1, a_2, \dots, a_m$  は一意的に定まる (射影座標系の取り方に依らない). このとき,  $\gamma$  は  $t_0$  で型  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  を持つと言う. すべての点  $t_0 \in I$  で有限型のとき,  $\gamma$  は有限型であると言う.

**Example 5.1** 空間曲線  $\gamma: I \rightarrow M^3$  が  $t_0$  で型  $a = (a_1, a_2, a_3)$  を持つとする.  $\gamma$  の接線曲面は,  $a = (1, 2, 3)$  のときカスプ縁,  $(2, 3, 4)$  のとき燕尾形 (swallowtail),  $(1, 3, 4)$  のとき Mond 曲面である. これらはフロント, すなわち,  $PT^*(\mathbb{R}P^3)$  への Legendre 持ち上げが Legendre はめ込みとなる.  $(1, 2, 4)$  のとき, 接線曲面は, 閉じた笠となる. 閉じた笠は Legendre 持ち上げ自体が特異点を持つ特異 Legendre 部分多様体となる.

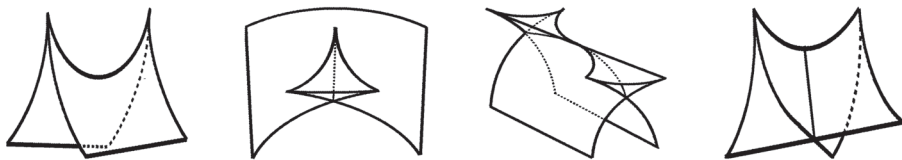


図 1: 左から, カスプ縁, 燕尾, Mond 曲面, 閉じた笠

有限型曲線  $\gamma: I \rightarrow M^m$  について, 各点で接触超平面が定まる. 有限型曲線  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}P^m$  に沿って接触平面の作る双対射影空間  $\mathbb{R}P^{m*}$  における曲線,  $\gamma^*: I \rightarrow \mathbb{R}P^{m*}$  を  $\gamma$  の双対曲線 (dual curve) と呼ぶ. このとき  $\gamma^*$  も有限型となり, 双対定理  $\gamma^{**} = \gamma$  が成り立つ. また, 双対公式 (Arnold, Scherbak) が成り立つ: 曲線  $\gamma$  の  $t = t_0$  における型が  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$  のとき,  $\gamma^*$  の型は

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m) = (a_m - a_{m-1}, a_m - a_{m-2}, \dots, a_m - a_1, a_m)$$

で与えられる. 空間曲線  $\gamma: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}P^3$  の接線曲面は,  $\gamma^*$  の接触平面の作る軌跡 ( $\gamma^*$  の双対曲面) となり,  $\gamma^*: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}P^{3*}$  の接線曲面は,  $\gamma$  の接触平面の作る軌跡 ( $\gamma$  の双対曲面) となる. したがって, 接線曲面の双対性の観点から見ると, カस्प縁は射影自己双対, 燕尾と閉じた笠は射影双対, Mond 曲面は射影自己双対であると言える. ここでは, 射影幾何の枠組みで双対性を説明しているが, 球面幾何では, ‘射影直線’は大円に対応し, 射影双対性は‘大円織面’の特異性に関する球面双対性として出現し, 球面幾何における固有の不変量により特異点が特徴付けられる.

接線曲面の特異性の分類問題は, Euclid 空間における境界付き曲面の可展面による拡張問題にも応用されている ([5]). その際, Frenet-Serret 枠付き曲線の接線曲面の特異性の分類問題が自然に生じる ([6] 参照).

## 6 Legendre-ヌル双対性

ある種の幾何構造に関する双対性の観点から得られる接線曲面の分類結果を紹介する.

シンプレクティック幾何からの構成は [8] にすでに紹介したので, 結果的に類似の分類結果を不定値計量の幾何から導く構成 ([17]) を紹介する.

$V = \mathbb{R}^{2,3}$  を指標が  $(2, 3)$  の不定値計量ベクトル空間とする. その計量を  $(|)$  と記す. 部分空間  $W \subset V$  がナルであるとは, 任意の  $u, v \in W$  について,  $(u|v) = 0$  のときに言う. ナル旗多様体  $Z = \mathcal{F}_{1,2}^{\text{null}}(V) := \{V_1 \subset V_2 \subset V \mid V_2 \text{ ナル空間, } \dim(V_i) = i, i = 1, 2\}$  を考える.  $\dim \mathcal{F}_{1,2}^{\text{null}}(V) = 4$  である.

$X := \{V_1 \subset V \mid V_1: \text{ナル直線}\}$  および ナル-Grassmann 多様体  $Y := \{V_2 \subset V \mid V_2: \text{ナル平面}\}$ ,  $\dim \text{LG}(V) = 3$  に対し, 自然な射影により 2 重ファイブレーション

$$Y \xleftarrow{\pi_1} Z = \mathcal{F}_{1,2}^{\text{null}}(V) \xrightarrow{\pi_2} X$$

が作られる.

多様体  $Y$  には自然な接触構造  $\mathcal{D} \subset TY$  が入る. 実際,  $y = V_2 \in Y$  に対して,

$$\mathcal{D}_y = T_y(\pi_1 \pi_2^{-1} \pi_2 \pi_1^{-1}(y)) = T_y\{y' \in Y \mid y' \cap y \neq \{0\}\} \subset T_y Y$$

により定まる.

$X$  は  $(1, 2)$  型の非定値共形構造を持つ. 零錐 (null cone)  $\mathcal{C} \subset TX$  は  $x = V_1 \in X$  について,  $\mathcal{C}_x := \text{Tangent Cone}_x(\pi_2 \pi_1^{-1} \pi_1 \pi_2^{-1}(x))$  で定まる. ただし,  $\pi_2 \pi_1^{-1} \pi_1 \pi_2^{-1}(x) = \{x' \in X \mid (x'|x) = 0\}$  である.

ナル旗多様体  $Z = \mathcal{F}_{1,2}^{\text{nil}}(V)$  は **Engel 構造**  $\mathcal{E} \subset T\mathcal{F}_{1,2}^{\text{nil}}(V)$  を持つ:  $(V_1, V_2) \in \mathcal{F}_{1,2}^{\text{nil}}(V)$  について,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(V_1, V_2)} &:= \{v \in T\mathcal{F}_{1,2}^{\text{nil}}(V) \mid \pi_{1*}(v) \in D_{V_2}(\subset TY)\} \\ &= T_{(V_1, V_2)}(\pi_2^{-1}\pi_2\pi_1^{-1}(V_2)) = T_{(V_1, V_2)}(\pi_1^{-1}\pi_1\pi_2^{-1}(V_1)) \\ &= \text{Ker}(\pi_1)_* \oplus \text{Ker}(\pi_2)_* \end{aligned}$$

である. その**導来系** (derived system)  $\mathcal{E}^2 := \mathcal{E} + [\mathcal{E}, \mathcal{E}]$  は, 接触構造  $\mathcal{D}$  の引き戻し  $\pi_1^*\mathcal{D}$  に等しい.

$I \subset \mathbb{R}$  を開区間とする. 曲線  $f: I \rightarrow (Z, \mathcal{E})$  が **Engel 積分曲線** とは  $f_*(TI) \subset \mathcal{E} (\subset TZ)$  のときに言う. 曲線  $g: I \rightarrow (Y, \mathcal{D})$  が **Legendre 曲線** とは  $g_*(TI) \subset \mathcal{D} (\subset TY)$  であり,  $h: I \rightarrow (X, \mathcal{C})$  が **ナル曲線** とは  $h_*(TI) \subset \mathcal{C} (\subset TX)$  のときに言う.

$f: I \rightarrow (Z, \mathcal{E})$  が Engel 積分曲線ならば,  $\pi_1 \circ f: I \rightarrow (Y, \mathcal{D})$  は Legendre 曲線であり,  $\pi_2 \circ f: I \rightarrow (X, \mathcal{C})$  はナル曲線である.  $f: I \rightarrow (Z, \mathcal{E})$  を Engel 積分曲線とし,  $\pi_1 \circ f$  と  $\pi_2 \circ f$  がともに有限型曲線とする.  $Y$  内の曲線  $\pi_1 \circ f$  と  $X$  内の曲線  $\pi_2 \circ f$  それぞれに接線曲面が定まる. このとき  $\pi_1(\pi_2^{-1}(\pi_2(f(I))))$  は曲線  $\pi_1(f(I))$  の接線曲面となり,  $\pi_2(\pi_1^{-1}(\pi_1(f(I))))$  は曲線  $\pi_2(f(I))$  の接線曲面となる.

Engel 積分曲線のジェット空間  $J_r^{\mathcal{E}}(I, \mathcal{F}_{1,2}^{\text{nil}})$  が定義できて, 各  $a, b$  に対し, 十分大きな  $r$  を取り,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\pi_1, a} &:= \{j^r f(t_0) \in J_r^{\mathcal{E}}(I, \mathcal{F}_{1,2}^{\text{nil}}) \mid \pi_1 \circ f: I \rightarrow \text{P}(V) \text{ の型が } a\} \\ \Sigma_{\pi_2, b} &:= \{j^r f(t_0) \in J_r^{\mathcal{E}}(I, \mathcal{F}_{1,2}^{\text{nil}}) \mid \pi_2 \circ f: I \rightarrow \text{LG}(V) \text{ の型が } b\} \end{aligned}$$

と定める. このとき,  $\Sigma_{\pi_1, a} \neq \emptyset$  である必要十分条件は  $a_3 = a_1 + a_2$  であって, そのとき  $\Sigma_{\pi_1, a}$  の余次元が  $a_2 - 2$  となる. また,  $\Sigma_{\pi_2, b} \neq \emptyset$  である必要十分条件は  $b_3 = 2b_2 - b_1$  であり,  $\Sigma_{\pi_1, a}$  の余次元が  $b_2 - 2$  となる. さらに,

**双対性公式:** Engel 積分曲線  $f: I \rightarrow \mathcal{F}_{1,2}^{\text{nil}}$  について  $t_0 \in I$  で  $\pi_1 \circ f$  が型  $a$  を持ち,  $\pi_2 \circ f$  が型  $b$  を持つとき,  $(b_1, b_2, b_3) = (a_2 - a_1, a_2, a_3)$ ,  $(a_1, a_2, a_3) = (b_2 - b_1, b_2, b_3)$  が成立する.

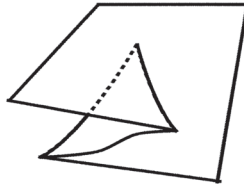
Engel 積分曲線に対して**横断性定理**を証明することにより, 次の結果を得る:

**Theorem 6.1**  $C^\infty$ -位相に関してジェネリックな Engel 積分曲線  $f: I \rightarrow \mathcal{F}_{1,2}^{\text{nil}}$  に対して,  $\pi_1 \circ f$ ,  $\pi_2 \circ f$  の型の対と接線曲面芽の微分同相類の対は次の表で尽される:

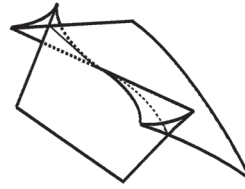
- (I)  $(1, 2, 3), (1, 2, 3)$ ; カスパ縁 (cuspidal edge), カスパ縁.
- (II)  $(1, 3, 4), (2, 3, 4)$ ; Mond 曲面, 燕尾 (swallowtail).
- (III)  $(2, 3, 5), (1, 3, 5)$ ; ジェネリック折り目襞, Scherbak 曲面.

$\gamma$  の型が  $(2, 3, 5)$  のとき, 接線曲面は**折り目襞** (folded pleat) と呼ばれる. また,  $\gamma$  の型が  $(1, 3, 5)$  のとき, 接線曲面は **Scherbak 曲面** (Scherbak surface) と呼ばれる.





折り目襞



Scherbak 曲面

折り目襞の微分同相類は定まらない ([4]). 実際, 折り目襞はジェネリックなものとは非ジェネリックなものとの2つの微分同相類からなる. ジェネリックな方をジェネリック折り目襞 (generic folded pleat) と呼ぶ.

## 7 (2,3,5)-分布と Lagrange 錐構造の双対性, $G_2$ 幾何

射影平面の射影双対性や Legendre-ヌル双対性と関連して, 例外群  $G_2$  の幾何学と関連して導かれる (2,3,5)-分布と Lagrange 錐構造の双対性および特異性について論文 [15] で分類を与えた. 実際, split 8 元数から作ったある種の旗多様体として 6 次元多様体  $Z$  とその上の階数 2 の分布  $E$  で, 増大度 (2,3,4,5,6) を持つもの, 射影多様体として 5 次元多様体  $Y$  とその上の階数 2 の分布  $D$  で増大度 (2,3,5) を持つもの, および, Grassmann 多様体として 5 次元多様体  $X$  とその上の接触構造  $D'$  とその中の Lagrange 錐構造  $C \subset TX$  を構成し, 2 重ファイブレーション

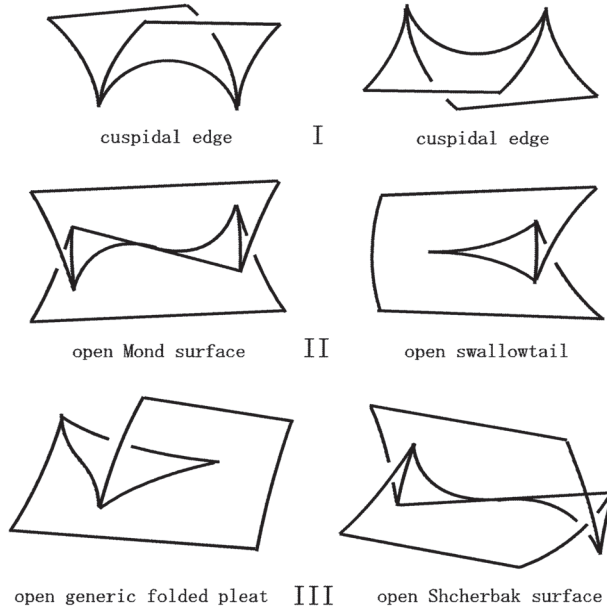
$$(Y, D) \longleftarrow (Z, E) \longrightarrow (X, C)$$

を構成した. ここで,  $D'$  は  $C$  の線形包 (linear hull) として復元できるので  $C$  のみを記している. そして, [15] では, さらにジェネリックな  $E$  積分曲線からできる  $Y$  上の接線曲面と  $X$  の接線曲面の特異性の分類を行った. ここでは, その分類結果のみを紹介しよう.

**Theorem 7.1** [15] (2,3,5)-分布と Lagrange 錐構造の双対性に現れる接線曲面のジェネリックな特異性とそれらの双対性は

- I: (カスプ縁, カスプ縁)
- II: (開 Mond 曲面, 開燕尾)
- III: (ジェネリック開折り目襞, 開 Scherbak 曲面)

により与えられる.



ここで、カスプ縁とは、5次元空間に埋め込まれたカスプ縁のことである。また、開 Mond 曲面 (open Mond surface) は Mond 曲面の開化 ([9]) であり、 $(1, 3, 4, 5, *)$  型の曲線の接線曲面である。開燕尾 (open swallowtail) は燕尾の開化であり、 $(2, 3, 4, 5, *)$  型の曲線の接線曲面である。開折り目襞 (open folded pleats) は折り目襞の開化であり、 $(2, 3, 5, 6, *)$  型の曲線の接線曲面である。開 Scherbak 曲面 (open Scherbak surface) は Scherbak 曲面の開化であり、 $(1, 3, 5, 6, *)$  型の曲線の接線曲面である。曲線の型の最後の \* はその数に依存しないで接線曲面の微分同相類が定まることを意味している。ただし、開折り目襞については、2つの微分同相類のうちジェネリックな方をとる。

なお、 $(2, 3, 5)$  分布については [13][14][12] も参照せよ。

これらの特異性は、今後の形態の研究において避けて通れない対象になると考えられる。なお、構造安定性を超えて、分岐集合の研究については、今後の問題となる。

## 8 フロント特異点

最後に、形態の理論で重要であるフロント特異点について、特徴付け、認識、安定性について概観する。なお、関連する概念や記号については [8][11] も参照せよ。また [2] も参照せよ。

**Definition 8.1**  $f: (\mathbb{F}^n, a) \rightarrow (\mathbb{F}^m, b)$ ,  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  を滑らかな ( $= C^\infty$  または正則) 写像芽,  $n \leq m$  とする.  $f$  が**フロントル**とは,  $f$  に沿って定義された滑らかな  $n$  次元平面場  $\tilde{f}(t) (\subseteq T_{f(t)}\mathbb{F}^m)$ ,  $t \in (\mathbb{F}^n, a)$  が存在して, 微分写像の像  $f_*(T_t\mathbb{F}^n) \subseteq \tilde{f}(t)$  となる時に言う.

$\tilde{f}$  をフロントル  $f$  の **Legendre 持ち上げ** とよぶ.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Gr}(n, T\mathbb{F}^m) & \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ (\mathbb{R}^n, a) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{F}^m, b). \end{array}$$

ここで,  $\text{Gr}(n, T\mathbb{F}^m)$  は  $T\mathbb{F}^m$  の  $n$ -平面の全体からなる *Grassmann 束* である.

フロントル  $f$  がはめ込みとなる *Legendre 持ち上げ* を持つとき  $f$  を**フロント**と呼ぶ.

**Example 8.2** すべてのはめ込みはフロントルであり, フロントである. 実際,  $\tilde{f}(t) = f_*(T_t\mathbb{F}^n)$  とおけばよい.

$n = m$  のとき, 任意の  $f$  はフロントルである. 実際,  $\tilde{f}(t) = T_{f(t)}\mathbb{F}^m$  とおけばよい.

定値写像はフロントルである. 実際, 任意のリフトをとればルジャンドルとなる.

フロントル写像の概念は, 波面 (*wave-front*) の概念 ([2][20]) の自然な一般化である.

**Lemma 8.3**  $f$  がフロントルならば,  $f$  の *Jacobi* イデアル  $J_f$  ( $f$  の *Jacobi* 行列式の  $n$ -小行列式で生成されるイデアル) は単項イデアルとなる. すなわち,  $J_f$  の元  $\lambda$  が存在して,  $J_f$  は  $\lambda$  で生成される. 生成元  $\lambda$  は  $\mathcal{O}_a$  の単元倍を除いて一意に定まる. さらに,  $J_f \neq 0$  ならば, 逆も成立し  $f$  はフロントルとなる.

$\lambda$  をフロントル  $f$  の **Jacobian** (ヤコビアン) と呼ぶ.

特異点集合  $S(f)$  は  $S(f) = \{t \in (\mathbb{F}^n, a) \mid \lambda(t) = 0\}$  で与えられる. (したがって, 佐治健太郎さんの提唱に従って,  $\lambda$  を **singularity identifier** (特異点同定関数) と呼ぶこともできる.)

**Definition 8.4**  $S(f)$  が *nowhere dense* のとき, すなわち, *Jacobi* イデアル  $J_f \neq 0$  のとき, フロントル  $f$  は**プロパー フロントル**と呼ぶ.

フロントル  $f$  がプロパーである必要十分条件は, Legendre 持ち上げ  $\tilde{f}$  が一意的なことである.

**Definition 8.5**  $f: (\mathbb{F}^n, a) \rightarrow (\mathbb{F}^m, b)$  をフロンタルとする.  $(\mathbb{F}^m, b)$  の座標系  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m$  が  $\tilde{f}$  (あるいは  $f$ ) に適合的であるとは,

$$\tilde{f}(a) = \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_b, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_b \right\rangle_{\mathbb{F}} \subseteq T_b \mathbb{F}^m$$

となるときに言う. この条件は,

$$\tilde{f}(a) = \{v \in T_b \mathbb{F}^m \mid dx_{n+1}(v) = 0, \dots, dx_m(v) = 0\}$$

と同値である.

適合的な座標系について,  $f_i = x_i \circ f, (1 \leq i \leq m)$  とおく. このとき, Jacobian は Jacobi 行列の最上部の通常の意味の Jacobian に等しい:

$$\lambda = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)}.$$

**Lemma 8.6**  $c_{ij} \in \mathcal{E}, n+1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, a_{ij}(a) = 0$  が存在して,

$$df_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} df_j \quad (n+1 \leq i \leq m),$$

が成り立つ.

$f$  は  $(f_1, \dots, f_n): (\mathbb{F}^n, a) \rightarrow \mathbb{F}^n$  の開化である ([8][9]).

$\mathcal{V}_a$  を  $(\mathbb{F}^n, a)$  上のベクトル場の芽が作る  $\mathcal{E}_a$  加群とする.

$$\mathcal{K}_f := \{\eta \in \mathcal{V}_a \mid \eta f_i \in J_f, 1 \leq i \leq m\} = \{\eta \in \mathcal{V}_a \mid \eta(f^* \mathcal{E}_b) \subseteq J_f\}$$

とおく.

**Lemma 8.7**  $f: (\mathbb{F}^n, a) \rightarrow (\mathbb{F}^m, b)$  をフロンタルで  $\text{corank } 1$  とする. このとき, 商  $\mathcal{E}_a$  加群  $\mathcal{K}_f/\lambda \mathcal{V}_a$  は階数 1 の自由  $\mathcal{E}_a$  加群である.

$\mathcal{K}_f/\lambda \mathcal{V}_a$  の生成元  $\eta \in \mathcal{V}_a$  を核ベクトル場 (kernel vector field) (あるいはナルベクトル場 (null vector field)) と呼ぶ. この概念は, [23] において最初に導入されたものであり, 写像芽の認識問題で重要な役割を果たす. 不定値計量の研究に登場する「ナルベクトル」と紛らわしいので, ここでは, 核ベクトル場と呼ぶ.

さらに, 関数芽  $h \in \mathcal{E}_a$  に対して,  $h$  の点  $a$  における  $\eta$  に関する位数を

$$\text{ord}_a^\eta(h) := \inf\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid (\eta^i h)(a) \neq 0\},$$

で定まる.

このとき, 次の認識定理が成り立つ.



**Theorem 8.8** (燕尾特異点の認識)  $f: (\mathbb{F}^2, a) \rightarrow (\mathbb{F}^3, b)$  をフロントルで  $\text{corank } 1$  とする. このとき, 次の3条件は互いに同値である:

- (1)  $f$  は燕尾 (*swallowtail*) と  $\mathcal{A}$  同値である.
  - (2)  $f$  はフロント (つまり,  $\tilde{f}$  がはめ込み) で,  $(d\lambda)(a) \neq 0, \text{ord}_a^\eta(\lambda) = 2$ .
  - (3)  $\lambda$  は正則関数  $(t_1, t_2) \rightarrow t_1$  と  $\mathcal{K}$  同値で,  $\text{ord}_a^\eta(\lambda) = 2, \text{ord}_a^\eta(f_3) = 4$ .
- (1) と (2) の同値性は [23] において最初に示された.  
さらに次も成り立つ.

**Theorem 8.9** (開燕尾特異点の認識)  $f: (\mathbb{F}^2, a) \rightarrow (\mathbb{F}^4, b)$  をフロントルで  $\text{corank } 1$  とする. このとき, 次の3条件は互いに同値である:

- (1)  $f$  は開燕尾 (*open swallowtail*) と  $\mathcal{A}$  同値である.
- (2)  $f$  は正則関数  $t_1$  と  $\mathcal{K}$  同値,  $\text{ord}_a^\eta(\lambda) = 2, (\eta^3 f_i)(a) = 0, i = 3, 4$ , さらに  $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F})$  が存在して,  $(f'_3, f'_4) = (f_3, f_4)A$  とおくと,  $\text{ord}_a^\eta(f'_3) = 4, \text{ord}_a^\eta(f'_4) = 5$ .
- (3)  $f$  は Whitney カスプ  $(t, u) \rightarrow (t^2 + 2u, t^3 + 3tu)$  のヴァーサル開化, すなわち,

$$f^* \mathcal{E}_b = \mathcal{R}_f := \{h \in \mathcal{E}_a \mid dh \in d(f^* \mathcal{E}_b)\},$$

が成り立つ.

(1), (3) の同値性は, 本質的に [7] に与えられている.

開化理論 (*opening theory*) については, [9] も参照せよ.

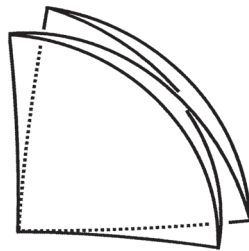
**Definition 8.10** フロントル  $f: (\mathbb{F}^n, a) \rightarrow (\mathbb{F}^m, b)$  をフロントルとする.  $f$  がフロントル安定とは,  $f$  の任意の (*Legendre* 持ち上げも含めた) フロントル変形が  $\mathcal{A}$  同値で自明化できるときに言う.

たとえば, 燕尾や開燕尾は安定である. これらは  $\text{corank } 1$  であるが,  $\text{corank } 2$  の安定フロントルも存在する:

**Example 8.11** (カスプの積 (*product of cusps*))  $f: (\mathbb{F}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{F}^4, 0)$  を

$$f(t, s) := (x_1, x_2, x_3, x_4) = (t^2, s^2, t^3, s^3) \sim_{\mathcal{A}} (t^2 + s^3, s^2 + t^3, t^3, s^3),$$

により定義する.



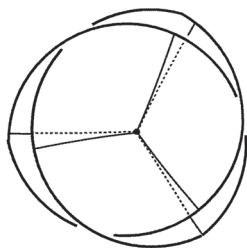
The product of cusps

すると,  $f$  はフロンタルで  $\text{corank } 2$  であり,  $\text{Legendre}$  持ち上げ  $\tilde{f}$  ははめ込みになる.  $f$  は  $(t, s) \mapsto (t^2, s^2)$  のヴァーサル開化であり,  $f^* \mathcal{O}_b = \mathcal{R}_f$  を満たす. さらに,  $f$  はフロンタル安定である.

**Example 8.12** (複素カスプ (complex cusp))  $f: (\mathbb{F}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{F}^4, 0)$  を

$$f(t, s) := (x_1, x_2, x_3, x_4) = (t^2 - s^2, 2ts, t^3 - 3ts^2, 3t^2s - s^3),$$

により定義する.  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  の場合,  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2, z \mapsto (z^2, z^3)$  のことである.



The complex cusp

すると,  $f$  はフロンタルで  $\text{corank } 2$  であり,  $\text{Legendre}$  持ち上げ  $\tilde{f}$  ははめ込みになる.  $f$  は  $(t, s) \mapsto (t^2 - s^2, 2ts)$  のヴァーサル開化であり,  $f^* \mathcal{O}_b = \mathcal{R}_f$  を満たす. さらに,  $f$  はフロンタル安定である.

これらの特異点の認識問題や, 微分幾何は興味深い問題である.

また, フロンタル安定特異点  $\mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^4$  の  $\text{corank } 2$  の場合も含めた分類は興味深い. その分類問題に関する楽観的な予想を記して本稿の筆を置くこととする.

本稿で概略を説明したフロンタルの特徴付け, フロンタル特異性の分類問題および認識問題, フロンタル安定性問題の詳細については, また稿を改めたい.

**予想.** フロンタル安定なフロント写像芽  $f: (\mathbb{F}^2, a) \rightarrow (\mathbb{F}^4, b)$  は, はめ込み, カスプ縁, 開燕尾, カスプ積, 複素カスプのどれかと  $\mathcal{A}$  同値である.

## 参考文献

- [1] V.I. Arnol'd, *Catastrophe Theory*, Springer (1984).
- [2] V.I. Arnol'd, *Singularities of Caustics and Wave Fronts*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1990).

- [3] T. Bröcker *Differentiable Germs and Catastrophes*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **17** (1975).
- [4] G. Ishikawa, *Singularities of developable surfaces*, London Math. Soc. Lect. Notes Series, **263** (1999), 403–418.
- [5] G. Ishikawa, *Singularities of flat extensions from generic surfaces with boundaries*, Differential Geometry and its Applications, **28–3** (2010), 341–354.
- [6] G. Ishikawa, *Generic bifurcations of framed curves in a space form and their envelopes*, Topology and its Applications, **159** (2012), 492–500.
- [7] Goo Ishikawa, *Singularities of tangent varieties to curves and surfaces*, Journal of Singularities, **6** (2012), 54–83.
- [8] 石川 剛郎 「写像の特異性の分類問題とその応用」 **64-1** (2012), 75–96.
- [9] G. Ishikawa, *Openings of differentiable map-germs and unfoldings*, Topics on Real and Complex Singularities, Proceedings of the 4th Japanese-Australian Workshop (JARCS4), Kobe 2011, World Scientific (2014), 87–113.
- [10] G. Ishikawa, *Singularities of Curves and Surfaces in Various Geometric Problems*, CAS Lecture Notes **10**, Exact Sciences, (2015).
- [11] G. Ishikawa, *Singularities of frontals*, to appear in "Singularities in Generic Geometry", Advanced Studies in Pure Mathematics (ASPM), Mathematical Society of JAPAN,  
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/GooIshikawaProcKobeKyoto2015-HP.pdf>
- [12] G. Ishikawa, Y. Kitagawa, A. Tsuchida, W. Yukuno, *Duality of (2,3,5)-distributions and Lagrangian cone structures*, in preparation.
- [13] G. Ishikawa, Y. Kitagawa, W. Yukuno, *Duality of singular paths for (2,3,5)-distributions*, Journal of Dynamical and Control Systems, **21** (2015), 155–171.
- [14] G. Ishikawa, Y. Kitagawa, W. Yukuno, *Duality on geodesics of Cartan distributions and sub-Riemannian pseudo-product structures*, Demonstratio Mathematica. vol. 48-2 (2015) 193–216.
- [15] G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, *Singularities of tangent surfaces in Cartan's split  $G_2$ -geometry*, Asian Journal of Mathematics, vol.20–2, (2016), 353–382.
- [16] G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi,  *$D_n$ -geometry and singularities of tangent surfaces*, RIMS Kōkyūroku Bessatsu, B55 (2016), 67–87.
- [17] G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, *Null frontal singular surfaces in Lorentzian 3-spaces*, in preparation.
- [18] G. Ishikawa, T. Yamashita, *Singularities of tangent surfaces to generic space curves*, J. Geometry, vol.108 (2017), 301–318.

- [19] G. Ishikawa, T. Yamashita, *Singularities of tangent surfaces to directed curves*, Topology and its Applications, **234** (2018), 198–208.
- [20] 泉屋周一「波面の伝播と特異点」共立出版(2018).
- [21] 泉屋周一, 石川剛郎「応用特異点論」共立出版(1998).
- [22] S. Izumiya, Maria del Carmen Romero Fuster, Maria Aparecida Soares Ruas, F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific (2015).
- [23] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. of Math. **221-2** (2005), 303–351.
- [24] 野口 広, 福田 拓生「復刊 初等カタストロフイー」共立出版 (2002. 元々は共立全書版 1976).
- [25] ルネ・トム「構造安定性と形態形成」彌永昌吉, 宇敷 重広 訳, 岩波書店 (1980). (原著: René Thom, *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*, InterEdition Paris (1972, 1977)).
- [26] H. Teramoto, K. Kondo, S. Izumiya, M. Toda, T. Komatsuzaki, *Classification of Hamiltonians in neighborhoods of band crossings in terms of the theory of singularities*, Journal of Mathematical Physics **58**, pp.073502-1-073502-39 (2017).