

波面のガウス写像について
(On Gauss maps of wave fronts)

神戸大学大学院理学研究科 寺本 圭佑*1

(Department of Mathematics, Kobe University, Keisuke TERAMOTO)

1 はじめに

特異点を持つ曲線や曲面の微分幾何学的研究が近年活発に行われている。特に、波面やフロントルに関する結果が多くある (例えば, [4, 6, 7, 9, 10, 11, 15, 16, 20] など)。波面のガウス曲率は特異点の近くで一般に非有界となり, 平均曲率は非有界となることが知られている ([20])。最近, Martins-佐治-梅原-山田 [14] によって, 有理的有界性の概念が導入された。本稿では, 非退化特異点を持つ波面のガウス写像に現れる特異点の型の波面の微分幾何学的性質を用いた特徴づけを紹介する。また, カスプ辺に対して, 特異曲線と放物点曲線の接触具合を考察し, それらの曲線の接触とガウス曲率の有理的有界性の関係について紹介する。

2 準備

まず, いくつかの準備をする。詳細は, [1, 12, 20] などを参照。

2.1 波面

$\Sigma \subset (\mathbf{R}^2; u, v)$ を領域, $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を C^∞ 写像とする。このとき, f がフロントルであるとは, f に沿う単位ベクトル場 $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$ があって, 任意の点 $q \in \Sigma$ に対して, $\langle df_q(X_q), \nu(q) \rangle = 0$ が成り立つときをいう。ここで, S^2 は \mathbf{R}^3 内の単位球面, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbf{R}^3 の標準内積を意味する。さらに, フロントル f が波面であるとは, 組 $(f, \nu): \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2$ がはめ込みを与えるときをいう。ベクトル場 ν を単位法線ベクトルまたは, ガウス写像という。

f をフロントルとする。点 $p \in \Sigma$ が f の特異点であるとは, $\text{rank } df_p < 2$ となる点のことをいう。いま, $S(f)$ で f の特異点集合を表すことにする。関数 $\lambda: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$ を,

$$\lambda(u, v) = \det(f_u, f_v, \nu)(u, v) \quad (f_u = \partial f / \partial u, f_v = \partial f / \partial v)$$

とし, 符号付き面積密度関数と呼ぶ。定義より, $S(f) = \lambda^{-1}(0)$ が成立する。 f の特異点 $p \in S(f)$ をとる。このとき, p が非退化特異点であるとは, $(\lambda_u(p), \lambda_v(p)) \neq (0, 0)$ が成り立つときをいう。点 $p \in S(f)$ が非退化特異点のとき, 陰関数定理より, 点 p の近傍 V と正則曲線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto \gamma(t) \in V$ が存在し, $\gamma(0) = p$, $\text{Im}(\gamma) = V \cap S(f)$ が成り立つ。さらに, 非退化特異点は余階数 1 の特異点なので, ある零にならないベクトル場 η が存在し, 任意の $q \in V \cap S(f)$ に対して, $df_q(\eta_q) = 0$ が成り立つ。曲線 γ とベクトル場 η をそれぞれ特異曲線, 退化ベクトル場という。波面に現れる generic な特異点は, カスプ辺 $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$ とツバメの尾 $(u, v) \mapsto (u, 3v^4 + uv^2, 4v^3 + 2uv)$ であることが知られている ([1])。さらに, これらは非退化特異点である。

非退化特異点 p が第一種であるとは, $\det(\gamma', \eta)(0) \neq 0$ が成り立つときをいい, それ以外の非退化特異点を第二種という。 f が波面であり, p が第一種るとき, f は p でカスプ辺である。

*1 本研究は, 日本学術振興会特別研究員奨励費 (課題番号 17J02151) の助成を受けています。

2.2 非退化特異点をもつ波面の不変量

$f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ をフロンタル, p を非退化特異点とする. また, V を p の近傍, γ を特異曲線, η を退化ベクトル場とする. 点 p が第一種するとき, γ に沿って, 次の不変量が知られている ([13, 14, 20]): 特異曲率 κ_s , 極限法曲率 κ_ν , カスプ的曲率 κ_c , カスプ的振率 κ_t , 変曲曲率 κ_ν . 特異曲率 κ_s は, 内的な不変量であることに注意する ([7, 20]). さらに, f が波面であることと, κ_c が特異曲線 γ 上零にならないことは同値である ([14]).

一方, p が第二種するとき, 次の不変量が知られている ([14]): 極限法曲率 $\kappa_\nu(p)$, 正規化されたカスプ的曲率 μ_c . f が p で波面であることと, $\mu_c(p) \neq 0$ となることは同値であることに注意する. この他にも, いくつかの不変量が知られている ([14]).

さて, K, H を $V \setminus S(f)$ 上で定義された f のガウス曲率と平均曲率とする. このとき, $\kappa_j: V \setminus S(f) \rightarrow \mathbf{R}$ ($j = 1, 2$) を

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad \kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

で定義する. これらは, f の正則点集合上で定義された主曲率である. f が波面するとき, κ_j ($j = 1, 2$) のうち, 一方は V 上の有界な C^∞ 関数として拡張でき, 他方は特異点の近くで非有界となる ([15, 23]). 有界な主曲率を κ , 非有界となる主曲率を $\tilde{\kappa}$ と表す. 有界な主曲率 κ に対して, $\kappa(p) = \kappa_\nu(p)$ が成り立つ. また, $\hat{\kappa} = \lambda \tilde{\kappa}$ とおくと, $\hat{\kappa}$ は V 上の C^∞ 関数となり, さらに $\hat{\kappa}(p) \neq 0$ を満たす.

非退化特異点 p の近傍 V 上で定義されたベクトル場 \mathbf{V} を κ に対応する主ベクトルとする.

定義 2.1. 上述の設定で, p が f の峰点であるとは, $\mathbf{V}\kappa(p) = 0$ が成り立つときをいう. さらに, p が f の k 次の峰点であるとは, $\mathbf{V}^{(m)}\kappa(p) = 0$ ($1 \leq m \leq k$), $\mathbf{V}^{(k+1)}\kappa(p) \neq 0$ が成り立つときをいう.

正則曲面の峰点については, [3, 5, 8, 17] などを参照していただきたい. 波面 f が点 p でカスプ辺をもつとき, p が峰点であるための必要十分条件は, $4\kappa_t^3 + \kappa_t\kappa_c^2 = 0$ が点 p で成り立つことである ([22]).

2.3 有理的有界性と有理的連続性

ここでは, 関数に対する有理的有界性について紹介する. 有理的有界, 有理的連続の概念は多様体上の関数に対して定義できるが, ここではユークリッド空間の場合を考える. 詳細は [14] を参照していただきたい. $\mathbf{R} \times S^1$ に次の同値関係 \sim を入れる:

$$(r, \theta) \sim (-r, \theta + \pi), \quad (r, \theta) \in \mathbf{R} \times S^1.$$

この同値関係による $\mathbf{R} \times S^1$ の商空間を $\mathcal{M} = \mathbf{R} \times S^1 / \sim$ とする. また, 標準射影を

$$\Pi: \mathbf{R} \times S^1 \rightarrow \mathcal{M}$$

とする. $(\mathbf{R}^2; u, v)$ を (u, v) 平面とする. このとき, C^∞ 関数 $\Phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}^2$ で,

$$\Phi \circ \Pi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

を満たすものが唯一存在する. この写像 Φ は \mathbf{R}^2 の原点における標準的なブローアップを与える ([6]). 同様に, 領域 $\Sigma \subset \mathbf{R}^2$ の $p \in \Sigma$ におけるブローアップを定義することができる. いま, $\Phi: \hat{\Sigma}_p^2 \rightarrow \Sigma$ を p におけるブローアップとする.

定義 2.2 ([14]). $p \in \Sigma$ とし, $\mathcal{U}(\subset \Sigma)$ を p の近傍, $\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$ を稠密開集合とする. また, $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{R}$ を C^∞ 関数とする. このとき, φ が点 p において有理的有界であるとは, ある C^∞ 関数 $\lambda: \Phi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbf{R}$ が存在し, 以下の条件が成り立つときをいう:

- $\Phi^{-1}(\mathcal{O} \setminus \{p\}) = \Phi^{-1}(\mathcal{U} \setminus \{p\}) \cap \lambda^{-1}(\mathbf{R} \setminus \{0\})$,
- $\lambda^{-1}(0) \cap \Phi^{-1}(\{p\})$ は, 有限集合,
- ある C^∞ 関数 $\psi: \Phi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbf{R}$ が存在し, $q \in \Phi^{-1}(\mathcal{O})$ に対して $\psi(q) = \lambda(q)\varphi(\Phi(q))$ が成り立つ.

さらに, 関数 φ が点 p において有理的連続であるとは, φ が点 p で有理的有界であり, ある定数 c が存在して, $q \in \Phi^{-1}(\{p\})$ に対して $\psi(q) = c\lambda(q)$ が成り立つときをいう.

例 2.3. [14] で与えられた例を紹介する. φ_i ($i = 1, 2$) を

$$\varphi_1(u, v) = 1 + \frac{uv}{u^2 - v^2}, \quad \varphi_2(u, v) = 1 + \frac{u^2v}{u^2 - v^2}$$

で定義される関数とする. これらは原点において有界ではない. いま, $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$ ($r \geq 0$) とすると,

$$\varphi_1(r, \theta) = 1 + \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}, \quad \varphi_2(r, \theta) = 1 + \frac{r \cos^2 \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$$

となる. 関数 λ を $\lambda(r, \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ とすると, φ_1, φ_2 はともに原点で有理的有界となる. さらに, $\psi = \lambda + r \cos^2 \theta \sin \theta$ と定義すると, φ_2 は原点で有理的連続となる.

$f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $p \in \Sigma$ を非退化特異点とする. このとき, f のガウス曲率を K で表すと, 一般に K は p の近くで非有界となる ([20]). しかし, 次のことが知られている.

事実 2.4 ([14]). 波面 f のガウス曲率が非退化特異点 p において有理的有界であるための必要十分条件は, f のガウス写像 ν が点 p で特異点をもつことである. これは, $\kappa_\nu(p) = 0$ と同値である. さらに, 点 p がカスプ辺であるとき, K が点 p において有理的連続であるための必要十分条件は, $\kappa_\nu(p) = \kappa'_\nu(p) = 0$ となることである.

3 ガウス写像の特異点

$f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $p \in \Sigma$ を f の非退化特異点, $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$ を f のガウス写像とする. 点 p の近傍 V をとり, κ を V 上で有界な f の主曲率とする. 関数 $\Lambda: V \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\Lambda(u, v) = \det(\nu_u, \nu_v, \nu)(u, v)$$

と定め, 特異点識別子と呼ぶ. ワインガルテンの公式から,

$$\Lambda = K\lambda = \kappa \cdot \hat{\kappa}$$

が成り立つ. ただし, λ は符号付き面積密度関数, K は f のガウス曲率, $\hat{\kappa} = \lambda\kappa$ である. いま, $\hat{\kappa}(p) \neq 0$ なので, p が ν の特異点であるための必要十分条件は $\kappa(p) = 0$ となることであることがわかる. $q \in V$ で, $\kappa(q) = 0$ を満たすものを f の放物点という. 放物点の集合を $\kappa^{-1}(0)$ で表し, 放物点曲線と呼ぶ.

さて, ガウス写像 ν は \mathbf{R}^2 内の領域 Σ から S^2 への写像なので, 2次元多様体間の写像である. このとき, \mathcal{A}_e 余次元が 1 以下の特異点は次のものに \mathcal{A} 同値であることが知られている ([18, 25]): 折り目特異点

$(u, v) \mapsto (u, v^2)$, カスプ特異点 $(u, v) \mapsto (u, v^3 + uv)$, ツバメの尾特異点 $(u, v) \mapsto (u, v^4 + uv)$, 唇特異点 $(u, v) \mapsto (u, v^3 + u^2v)$, 嘴特異点 $(u, v) \mapsto (u, v^3 - u^2v)$ (図 1).

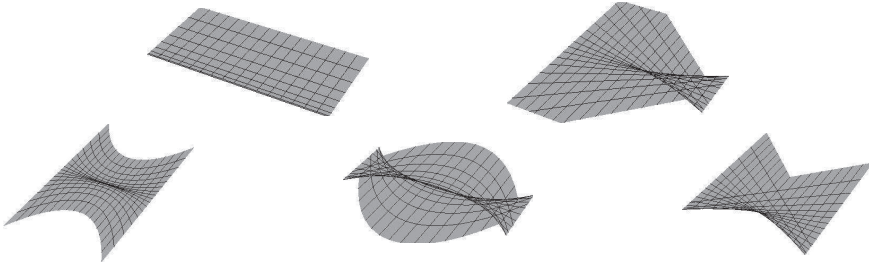


図 1 左上から右下に, 折目特異点, カスプ特異点, 唇特異点, 嘴特異点, ツバメの尾特異点.

これらの特異点に対する判定法が [19, 25] で与えられている. この判定法を利用することで, 以下の特徴づけを得る.

定理 3.1. $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $p \in \Sigma$ を f の非退化特異点, ν を f のガウス写像とする. κ が p の近くで有界な主曲率関数であるとし, $p \in \kappa^{-1}(0)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

1. $(\partial_u \kappa(p), \partial_v \kappa(p)) \neq (0, 0)$ のとき,
 - p が ν の折目特異点であるための必要十分条件は, p が f の峰点でないことである.
 - p が ν のカスプ特異点であるための必要十分条件は, p が f の 1 次の峰点であることである.
 - p が ν のツバメの尾特異点であるための必要十分条件は, p が f の 2 次の峰点であることである.
2. $(\partial_u \kappa(p), \partial_v \kappa(p)) = (0, 0)$ のとき,
 - p が ν の唇特異点であるための必要十分条件は, $\det \text{Hess}(\kappa(p)) > 0$ となることである.
 - p が ν の嘴特異点であるための必要十分条件は, p が f の 1 次の峰点であり, $\det \text{Hess}(\kappa(p)) < 0$ となることである.

f が点 p で余階数 1 の特異点を持つ波面であるとする, 対応するガウス写像 ν は p で余階数 2 の特異点を持たないことに注意する. 正則曲面に対しても, 同様の特徴づけが知られている ([2]).

4 カスプ辺の特異曲線と放物点曲線との接触

$f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$ を f のガウス写像とし, $p \in \Sigma$ がカスプ辺であるとする. 点 p を通る特異曲線を γ で表す. ガウス写像 ν もまた p で特異点を持つとする. すなわち p が f の放物点であると仮定する. さらに, p の近傍 V 上で有界な f の主曲率を κ と表し, $(\partial_u \kappa(p), \partial_v \kappa(p)) \neq (0, 0)$ と仮定する. このとき, 点 p を通る放物点曲線は陰関数定理により (局所的に) 正則曲線となる. このような仮定の下, 特異曲線 γ と放物点曲線 $\kappa^{-1}(0)$ の接触について考える.

定義 4.1 ([8]). $\alpha: I \ni t \mapsto \alpha(t) \in \mathbf{R}^2$ を正則な平面曲線とする. β を滑らかな関数 $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ の零点集合によって定義される別の正則平面曲線とする. このとき, α が点 $t_0 \in I$ において β と $(k+1)$ 点接触を持

つとは, 合成関数 $g(t) = F(\alpha(t))$ が,

$$g(t_0) = g'(t_0) = \cdots = g^{(k)}(t_0) = 0, \quad g^{(k+1)}(t_0) \neq 0$$

を満たすときをいう。ただし, $g^{(i)} = d^i g/dt^i$ ($1 \leq i \leq k+1$) を意味する。さらに, α が t_0 において β と少なくとも $(k+1)$ 点接触を持つとは, 合成関数 $g(t) = F(\alpha(t))$ が,

$$g(t_0) = g'(t_0) = \cdots = g^{(k)}(t_0) = 0$$

を満たすときをいう。このとき, 整数 k を接触の次数という。

カस्प辺に対して, 次のことが成り立つ。

補題 4.2. $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν をそのガウス写像, $p \in \Sigma$ をカस्प辺とする。 κ を p の近くで有界な主曲率とする。このとき, $\kappa = 0$ によって定められる放物点曲線が p で正則となるための必要十分条件は, 点 p において $\kappa'_\nu \neq 0$ または $4\kappa_t^2 + \kappa_s \kappa_c^2 \neq 0$ のどちらかが成立することである。

さて, 定義 4.1 と 補題 4.2 より, 次のことがわかる。

命題 4.3. $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν を f のガウス写像, $p \in \Sigma$ をカस्प辺とする。 κ を p の近くで有界な主曲率関数とし, $\kappa(p) = 0$ であり, $(\partial_u \kappa(p), \partial_v \kappa(p)) \neq (0, 0)$ を満たすとする。このとき, 点 p を通る特異曲線 γ が p において $\kappa^{-1}(0)$ で定義される放物点曲線と $(k+1)$ 点接触 ($k \geq 1$) を持つための必要十分条件は, $4\kappa_t(p)^2 + \kappa_s(p)\kappa_c(p)^2 \neq 0$,

$$\kappa_\nu(p) = \kappa'_\nu(p) = \cdots = \kappa_\nu^{(k)}(p) = 0 \text{ かつ } \kappa_\nu^{(k+1)}(p) \neq 0$$

が成り立つことである。

事実 2.4 と 命題 4.3 から, 次のことがわかる。

系 4.4. $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $p \in \Sigma$ をカस्प辺とする。このとき, f のガウス曲率 K が p で有理的有界であるための必要十分条件は, 放物点曲線が p を通ることである。さらに, 特異曲線 γ と放物点曲線が p で少なくとも 2 点接触を持つとき, K が p において有理的連続となる。

逆に, 次のことが言える。

命題 4.5. $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$ を f のガウス写像, p をカस्प辺とする。 f のガウス曲率 K が p において有理的連続であるとする。このとき, ν が p でカस्प特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa_t(p) = 0$ かつ $\kappa_s(p)\kappa'_c(p) \neq 0$ となることである。

さて, カस्प辺について次のことが知られている。特異曲線 γ がカस्प辺の曲率線であるための必要十分条件は, κ_t が γ 上で恒等的に零となることである ([11, 23])。これは, 有界な主曲率に対応する主方向ベクトルが, 特異曲線に接していることを意味する。カस्प辺の特異曲線が曲率線になっているとき, 次のことがわかる。

命題 4.6. $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を波面, ν をそのガウス写像, $p \in \Sigma$ をカस्प辺とする。 γ を p を通る特異曲線とする。 κ が p の近くで有界な主曲率であり, 放物点曲線 $\kappa^{-1}(0)$ が p を通る正則曲線とする。さらに, γ が曲率線であるとする。このとき,

(1) p が ν の折り目特異点であるための必要十分条件は, $\kappa'_\nu \neq 0$ が p で成り立つことである。

- (2) p が ν のカusp特異点であるための必要十分条件は、 $\kappa'_\nu = 0$, $\kappa''_\nu \neq 0$ であり $\kappa_s \neq 0$ が p で成り立つことである。
- (3) p が ν のツバメの尾特異点であるための必要十分条件は、 $\kappa'_\nu = \kappa''_\nu = 0$, $\kappa'''_\nu \neq 0$ であり、 $\kappa_s \neq 0$ が p で成り立つことである。

命題 4.3, 4.6 と系 4.4 から次のことが従う。

系 4.7. 命題 4.6 と同じ状況で、点 p が ν のカusp特異点 (resp. ツバメの尾特異点) であるための必要十分条件は、 γ が p において $\kappa^{-1}(0)$ と 2 点接触 (resp. 3 点接触) を持つことである。さらに、

- p が ν の折り目特異点のとき、 f のガウス曲率 K は p で有理的有界だが有理的連続でない。
- p が ν のカusp特異点またはツバメの尾特異点のとき、 K は p において有理的連続である。

例 4.8. $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を

$$f(u, v) = \left(u, \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2, \frac{1}{3}v^3 + u^4 \right)$$

で与えられる C^∞ 写像とする。この写像は、カusp辺を与え、 $S(f) = \{v = 0\}$, $\eta = \partial_v$ が成り立つ。写像 $\nu: \mathbf{R}^2 \rightarrow S^2$ を

$$\nu(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2+(-4u^3+uv)^2}} (-4u^3+uv, -v, 1)$$

とすると、 ν は f のガウス写像である。この f に対し、 u 軸上で

$$\kappa_\nu(u) = \frac{12u^2}{\sqrt{1+16u^6(1+u^2+16u^6)}}$$

と $\kappa_t = 0$ が成り立つ。すなわち、 $f(u, 0)$ は曲率線である。また、 $\kappa_s(0) = 1 \neq 0$ であることに注意する。さらに、 ν の特異点識別子は $\bar{\Lambda}(u, v) = 12u^2 - v$ である。よって、 f の放物点曲線 $\kappa^{-1}(0)$ は、方程式 $12u^2 - v = 0$ で与えられる。ただし、 κ は有界な C^∞ 主曲率である。また、原点は ν の非退化特異点である。直接計算により、特異曲線は原点で放物点曲線 $\kappa^{-1}(0)$ と 2 点接触を持つ。つまり、 $\kappa_\nu(0) = \kappa'_\nu(0) = 0$ と $\kappa''_\nu(0) \neq 0$ が成り立つ。命題 4.6 から、原点は ν のカusp特異点となる (図 2)。さらに、 f のガウス曲率 K は系 4.7 より原点で有理的連続となる。

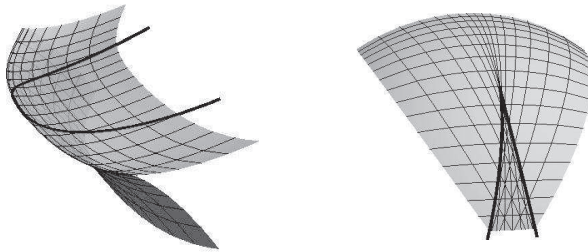


図 2 例 4.8 のカusp辺 (左側) とそのガウス写像 (右側)。太い曲線はそれぞれ放物点曲線の f 及び ν による像。

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, Vol.1, Monographs in Mathematics **82**, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [2] T. Banchoff, T. Gaffney and C. McCrory, *Cusps of Gauss mappings*, Research Notes in Mathematics **55**, Pitman, 1981.
- [3] J. W. Bruce, P. J. Giblin and F. Tari, *Families of surfaces: focal sets, ridges and umbilics*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **125** (1999), 243–268.
- [4] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, Math. Z. **259** (2008), 827–848.
- [5] T. Fukui and M. Hasegawa, *Singularities of parallel surfaces*, Tohoku Math. J. **64** (2012), 387–408.
- [6] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella – a differential geometric approach via blowing up*, J. Singul. **4** (2012), 35–67.
- [7] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, Internat. J. Math. **26**, No. 4 (2015), 34pp.
- [8] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas and F. Tari, *Differential Geometry from Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific, 2016.
- [9] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and “flat” spacelike surfaces*, J. Singul. **2** (2010), 92–127.
- [10] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space*, J. Math. Soc. Japan **62** (2010), 789–849.
- [11] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Flat surfaces along cuspidal edges*, J. Singul. **16** (2017), 73–100.
- [12] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.
- [13] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, Canad. J. Math. **68** (2016), 445–462.
- [14] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifolds, 247–281, Springer Proc. Math. Stat., **154**, Springer, Tokyo, 2016.
- [15] S. Murata and M. Umehara, *Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, J. Differential Geom. **221** (2005), 303–351.
- [16] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edes*, Tohoku Math. J. **68** (2016), 73–90.
- [17] I. R. Porteous, *Geometric differentiation*, Cambridge University Press, 2001.
- [18] J. H. Rieger, *Families of maps from the plane to the plane*, J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), 351–369.
- [19] K. Saji, *Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications*, Hiroshima Math. J. **40** (2010), 229–239.
- [20] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.

- [21] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The duality between singular points and inflection points on wave fronts*, Osaka J. Math. **47** (2010), 591–607.
- [22] K. Teramoto, *Parallel and dual surfaces of cuspidal edges*, Differential Geom. Appl. **44** (2016), 52–62.
- [23] K. Teramoto, *Principal curvatures and parallel surfaces of wave fronts*, to appear in Adv. Geom., arXiv:1612.00577.
- [24] K. Teramoto, *Focal surfaces of wave fronts in the Euclidean 3-space*, preprint.
- [25] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. **62** (1955), 374–410.