数理解析研究所講究録 第2087巻 2018年 131-140

Codimension-three bifurcation from uniform equilibria in a chemotaxis-growth system
走化性・増殖系における余次元３の分岐

Taka-aki Aoki[*1], **Takayuki Narumi**[*2] **and Koichi Osaki**[*3]

[*1]Graduate School of Science and Technology, Kwansei Gakuin University,
[*2]Graduate School of Sciences and Technology for Innovation, Yamaguchi University
[*3]School of Science and Technology, Kwansei Gakuin University

青木崇明[*1]，**鳴海孝之**[*2]，**大崎浩一**[*3]

[*1]関西学院大学大学院理工学研究科, [*2]山口大学創成科学研究科, [*3]関西学院大学理工学部

1　はじめに

本研究では，走化性・増殖系の定常パターン解の分岐問題を考える．特に，余次元が3の分岐において，余次元1の問題に帰着させることなく分岐解の存在を示す．方法としては，Ambrosetti と Prodi [1] による，Lyapunov-Schmidt 還元に基づく分岐定理を適用する．Ambrosetti と Prodi [1] の方法は，分岐をトランスクリティカルに限定するかわりに，余次元が1という仮定を要求しない．その利点として例えば，複合モードの対称性を事前に知っておく必要がないことなどが挙げられる．久藤ら [2] は，空間2次元の走化性・増殖系に対し，正六角形パターン（Neumann 境界条件下で余次元 2）の対称性に注目して，分岐の余次元を1とすることで対応する解の存在を示した．本研究では，空間次元が2および3の走化性・増殖系における余次元3の分岐問題を直接考える．空間3次元の走化性・増殖系においては，鳴海・大崎 [3] によって，面心立方格子 (face-centered cubic; FCC) パターン解（余次元 1）ならびに体心立方格子 (body-centered cubic; BCC) パターン解（余次元 3）が安定的に存在することが数値的に示されている．本研究では，特に余次元が3である BCC パターンについて，これが自明解からの分岐解として捉えられることを示す．さらに，空間2次元においては対応する数値計算結果も示す．

[*1] Taka-aki Aoki (bxm87930@kwansei.ac.jp)

2　走化性・増殖系

Budrene と Berg [4, 5] は，大腸菌 *E. coil* が，寒天を薄く敷いたシャーレにおいて，巨視的で規則性をもった特徴的な空間パターンを形成することを発見した．三村と辻川 [6] は，この現象が拡散と走化性，そして増殖といった作用によって引き起こされると仮定し，次の数理モデル（走化性・増殖系）を提案した：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla\rho) + f(u) & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta\rho - b\rho + cu & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial \rho}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\ \rho(x,0) = \rho_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで，Ω は境界 $\partial\Omega$ をもつ $\mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ 内の有界領域であり，係数 b, c, d および χ は正定数である．未知関数 $u(x,t)$ および $\rho(x,t)$ は，位置 $x \in \Omega$，時刻 $t \in [0,\infty)$ における大腸菌の密度と化学物質の濃度をそれぞれ表す．関数

$$f(u) = au(1 - \mu u)$$

は大腸菌のロジスティック成長を表す．ここで，a と μ は正定数である．第 1 式右辺第 1 項 $d\Delta u$ ならびに第 2 式右辺第 1 項 $\Delta\rho$ は，大腸菌と化学物質の拡散をそれぞれ表す．第 1 式右辺第 2 項 $-\chi\nabla\cdot(u\nabla\rho)$ は大腸菌の走化性を表し，係数 χ はその強度を表す．第 2 式右辺第 2 項 $-b\rho$ および第 3 項 cu は，化学物質の自然崩壊および大腸菌による化学物質の分泌をそれぞれ表す．

3　Ambrosetti-Prodi の分岐定理

X と Y を Banach 空間とし，非線形作用素 $F : (\chi_1,\chi_2)\times X \to Y$ は $\mathcal{C}^\infty$-級であるとする．また，Y における非線形方程式 $F(\chi,u) = 0$ は，任意の分岐パラメータ $\chi \in (\chi_1,\chi_2)$ に対して，自明解 $u = 0$ を有するとする：$F(\chi,0) = 0$, $\chi \in (\chi_1,\chi_2)$．分岐点を $\chi = \chi^*$ とし，分岐点からの隔たり $\lambda = \chi - \chi^*$ を導入する．Ambrosetti と Prodi により導出された分岐方程式は次の通りである：

$$\begin{aligned} N(\lambda,v) := PM(v + \lambda\gamma(\lambda,v)) + \frac{1}{2}P\mathcal{B}[v + \lambda\gamma(\lambda,v), v + \lambda\gamma(\lambda,v)] \\ + \lambda P\tilde{\psi}(\lambda,v,\lambda\gamma(\lambda,v)) = 0 \in Z. \end{aligned} \tag{3.1}$$

ただし，$M := F_{u\chi}(\chi^*, 0)$, $\mathcal{B} := F_{uu}(\chi^*, 0)$ であり，P は $\mathrm{Range}\, F_u(\chi^*, 0)$ の位相的補空間 Z への射影作用素を表す．また，$\tilde{\psi}$ は滑らかな関数である．Ambrosetti と Prodi による多余次元の分岐定理は次の通り：

Theorem 3.1. （Ambrosetti-Prodi の分岐定理 [1]）核空間 $V = \mathrm{Ker}\, F_u(\chi^*, 0)$ が X 内に位相的補空間をもつこと，および $R = \mathrm{Range}\, F_u(\chi^*, 0)$ は閉で，Y 内に位相的補空間 Z をもつことを仮定する．また，分岐方程式 (3.1) に対して，次の 2 つの条件を満たす $v^* \in V$, $v^* \neq 0$, が存在すると仮定する：

(a) $N(0, v^*) = PMv^* + \frac{1}{2}P\mathcal{B}[v^*, v^*] = 0$,
(b) 線形作用素 $N_v(0, v^*) = S : V \to Z$, $Sv = PMv + P\mathcal{B}[v^*, v]$, は逆をもつ.

このとき，$(\chi^*, 0)$ から分岐する非自明解が存在して，

$$\chi = \chi^* + \lambda, \quad u = \lambda[v^* + \lambda\tilde{v}(\lambda)]$$

と表される．ただし，$\tilde{v}(\lambda)$ は λ についての滑らかな関数で，非自明解 $u(\lambda)$ は，$u(0) = 0$ および $u'(0) = v^*$ を満たす.

4　2 次元走化性・増殖系における余次元 3 の分岐

走化性・増殖系 (2.1) の定常問題を考える：

$$\text{(SE)} \qquad \begin{cases} d\Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla\rho) + au(1-\mu u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta\rho - b\rho + cu = 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \dfrac{\partial\rho}{\partial\nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u \geq 0,\ \rho \geq 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

本節および次節では，空間 2 次元走化性・増殖系を考え，領域 Ω は長方形領域 Ω_{r} とする：

$$\Omega_{\mathrm{r}} = \left(0, \frac{\pi}{l}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{3}l}\right). \tag{4.1}$$

Hilbert 空間 X と Y を

$$X = H^2_{\mathrm{N}}(\Omega_{\mathrm{r}}) \times H^2_{\mathrm{N}}(\Omega_{\mathrm{r}}), \quad Y = L^2(\Omega_{\mathrm{r}}) \times L^2(\Omega_{\mathrm{r}})$$

と定義し，それぞれのノルムを

$$\|U\|_X := \sqrt{\|u\|^2_{H^2} + \|\rho\|^2_{H^2}}, \quad \|U\|_Y := \sqrt{\|u\|^2_{L^2} + \|\rho\|^2_{L^2}}, \quad U = {}^T[u\ \rho],$$

で与える．ここで，$H^2_{\mathrm{N}}(\Omega) = \left\{ w \in H^2(\Omega);\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\}$．また，ノルムにより誘導される Y の内積は次の通り：

$$\langle U_1, U_2 \rangle_Y := \langle u_1, u_2 \rangle_{L^2} + \langle \rho_1, \rho_2 \rangle_{L^2}, \quad U_1 = {}^T[u_1\ \rho_1],\ U_2 = {}^T[u_2\ \rho_2] \in Y.$$

以上の設定の下，(SE) の定数定常解：

$$U^* = \begin{bmatrix} u^* \\ \rho^* \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1/\mu \\ c/(\mu b) \end{bmatrix}$$

から分岐する非自明解の存在について考える．走化性係数 χ を分岐パラメータとする．また，非線形作用素 $F : (0, \infty) \times X \to Y$ を

$$F(\chi, U) := \begin{bmatrix} d\Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla \rho) + au(1 - \mu u) \\ \Delta \rho - b\rho + cu \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

と定義する．このとき，(SE) に関する分岐問題は次のように定式化される：

$$F(\chi, U) = 0 \ \in Y, \quad (\chi, U) \in (0, \infty) \times X. \tag{4.3}$$

斉次 Neumann 境界条件下での $L^2(\Omega_{\mathrm{r}})$ の直交基底を

$$\left\{ \phi_{n_x}(x)\, \psi_{n_y}(y) \mid n_x, n_y \geq 0 \right\}; \quad \phi_{n_x}(x) = \cos(l n_x x),\ \psi_{n_y}(y) = \cos(\sqrt{3} l n_y y)$$

と定める．このとき，Y の直交基底として，

$$\left\{ {}^T \left[h_{\boldsymbol{n}}\, \phi_{n_x}(x) \psi_{n_y}(y) \quad k_{\boldsymbol{n}}\, \phi_{n_x}(x) \psi_{n_y}(y) \right] \mid n_x, n_y \geq 0 \right\}$$

を選ぶことができる．また，X も Y と同じ直交基底を有する．この基底を固定し，(χ^*, U^*) から分岐する (SE) の非自明解について考える．

分岐点の候補は次のように特徴づけられる：

Proposition 4.1. 線形化作用素 $L = F_U(\chi, U^*)$ に対して，$V = \mathrm{Ker}\, L \neq \{0\}$ を満たす χ の値は，

$$\chi = \chi(\boldsymbol{n}) := \frac{\mu}{c} \left[d l^2 (n_x^2 + 3n_y^2) + \frac{ab}{l^2 (n_x^2 + 3n_y^2)} + a + bd \right] \tag{4.4}$$

で与えられる．加えて，$\chi(\boldsymbol{n})$ はパラメータ l を $l = l_{\mathrm{cr}}(\boldsymbol{n}) := \frac{1}{\sqrt{n_x^2 + 3n_y^2}} \left(\frac{ab}{d} \right)^{\frac{1}{4}}$ と選択するとき最小値をとる：

$$\min_l \chi(\boldsymbol{n}) = \frac{\mu}{c} (\sqrt{a} + \sqrt{bd})^2 := \chi_{\mathrm{cr}}. \tag{4.5}$$

核空間 V が 3 つの直交基底で張られるような最小の Fourier モードの組は,

$$\boldsymbol{n} = (n_x, n_y) = (1,3),\ (4,2),\ (5,1)$$

である．実際，$n_x^2 + 3n_y^2 = 1^2 + 3\cdot 3^2 = 4^2 + 3\cdot 2^2 = 5^2 + 3\cdot 1^2 = 28$ である一方，$n_x^2 + 3n_y^2 \leq 27$ においては，他に 3 重解は存在しない．この 3 つの Fourier モードが張る核空間 V は次式で表される：

$$V = \mathrm{span}\,\{\Phi_{13},\ \Phi_{42},\ \Phi_{51}\}.$$

ここで，$\Phi_{\boldsymbol{n}}(x,y) = {}^T[\phi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\ \ \eta_{\boldsymbol{n}}\,\phi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)]$. Hilbert 空間 Y の部分空間 R と Hilbert 空間 X における V の位相的補空間 W は，ラプラシアンを要素にもつ微分作用素 $L|_W$ に関して同型であるため，R の位相的補空間 Z は，V と同じ基底で張られる：

$$Z = \mathrm{span}\,\{\Phi_{13},\ \Phi_{42},\ \Phi_{51}\}.$$

このとき，射影作用素 $P : Y \to Z$ は次式で表現される：

$$\begin{aligned}
P\,\Phi &= \frac{\langle\Phi,\Phi_{13}\rangle_Y}{\|\Phi_{13}\|_Y^2}\,\Phi_{13} + \frac{\langle\Phi,\Phi_{42}\rangle_Y}{\|\Phi_{42}\|_Y^2}\,\Phi_{42} + \frac{\langle\Phi,\Phi_{51}\rangle_Y}{\|\Phi_{51}\|_Y^2}\,\Phi_{51} \\
&= \frac{1}{1+\eta_{13}^2}\left(\frac{\langle\Phi,\Phi_{13}\rangle_Y}{\|\phi_1(x)\psi_3(y)\|_{L^2}^2}\,\Phi_{13} + \frac{\langle\Phi,\Phi_{42}\rangle_Y}{\|\phi_4(x)\psi_2(y)\|_{L^2}^2}\,\Phi_{42} + \frac{\langle\Phi,\Phi_{51}\rangle_Y}{\|\phi_5(x)\psi_1(y)\|_{L^2}^2}\,\Phi_{51}\right) \\
&= \frac{4\sqrt{3}\,l^2}{\pi^2(1+\eta_{13}^2)}\big(\langle\Phi,\Phi_{13}\rangle_Y\,\Phi_{13} + \langle\Phi,\Phi_{42}\rangle_Y\,\Phi_{42} + \langle\Phi,\Phi_{51}\rangle_Y\,\Phi_{51}\big) \in Z, \quad \Phi \in Y.
\end{aligned}$$

Theorem 3.1 の条件 (a) と (b) を満たす $v^* \in V$ を求める．$v^* \in V$ を次のように表す：

$$v^* = \alpha\,\Phi_{13} + \beta\,\Phi_{42} + \gamma\,\Phi_{51} := \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{bmatrix} \in V; \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

これを条件 (a) の式へ代入することで，α, β, γ が決定される．関係式 $a - bd = 0$ は $v^* = 0$ を導くため，条件 (a) を満たすためには，$a - bd \neq 0$ が必要となる [7]．このとき，条件 (a) を満たす次の v^* の候補 4 つが求められる：

$$\begin{aligned}
v^* = {}&\widetilde{A}\,(\Phi_{13} + \Phi_{42} + \Phi_{51}), \quad \widetilde{A}\,(\Phi_{13} - \Phi_{42} - \Phi_{51}), \\
&\widetilde{A}\,(-\Phi_{13} + \Phi_{42} - \Phi_{51}), \quad \widetilde{A}\,(-\Phi_{13} - \Phi_{42} + \Phi_{51}); \quad \widetilde{A} = \frac{4c}{\mu^2(a-bd)}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

一方，条件 (b) においては，上で求めた各候補 (4.7) を 1 つ固定して得られる，それぞれの作用素 $Sv = PMv + P\mathcal{B}[v^*, v] : V \to Z$ について，その表現行列がすべて正則であることが示される [7]．つまり，全てが逆をもつ．

以上のことより，次の定理が得られる：

Theorem 4.2. 関数 $v^* \in V$ を (4.7) で定義されたものとし，$l = l_{\mathrm{cr}}(1,3)$, $\chi^* = \chi_{\mathrm{cr}}$ とする．このとき，条件 $a - bd \neq 0$ の下で，$(\chi_{\mathrm{cr}}, U^*)$ から分岐する (SE) の非自明解 $(\chi(\lambda), U(\lambda)) \in (0,\infty) \times X$ が存在し，

$$\chi(\lambda) = \chi_{\mathrm{cr}} + \lambda, \quad U(\lambda) = U^* + \lambda\,[v^* + \lambda\tilde{v}(\lambda)]$$

と表される．ただし，$\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ は十分小で，$\tilde{v}(\lambda)$ は λ についての滑らかな関数である．

5　2次元走化性・増殖系における数値計算結果

本節では，空間2次元走化性・増殖系に対して，領域 $\Omega = \Omega_{\mathrm{r}}$ での数値計算の結果を示す．Theorem 4.2 における仮定には $a - bd \neq 0$ があるが，それを満たすときと満たさないとき（$a - bd = 0$），それぞれにおける時間発展解の振る舞いを調べた．各初期関数は定数定常解に摂動を与えたものとした．なお，いずれも $\chi = \chi_{\mathrm{cr}}$ としている．

まず，$a - bd \neq 0$ を満たす係数として，

$$a = 8,\ b = 49,\ c = 1,\ d = 1/32,\ \mu = 1,\ l = 2$$

を選ぶ（$\chi_{\mathrm{cr}} = 529/32 = 16.53125$ となる）．このとき，図1から図4に示される結果が得られた．ここで，図4に示した定常解は (4.7) の関数 $v^* = \widetilde{A}(\Phi_{13} + \Phi_{42} + \Phi_{51})$ に対応したパターンであることがわかる．

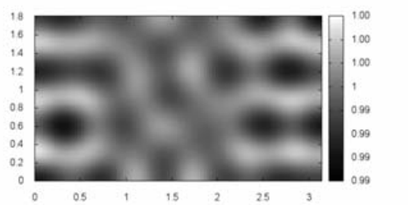

図1: $a = 8$, $b = 49$, $c = 1$, $d = 1/32$, $\mu = 1$, $l = 2$ の $t = 100$ における計算結果

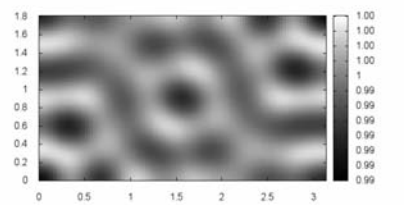

図2: $a = 8$, $b = 49$, $c = 1$, $d = 1/32$, $\mu = 1$, $l = 2$ の $t = 500$ における計算結果

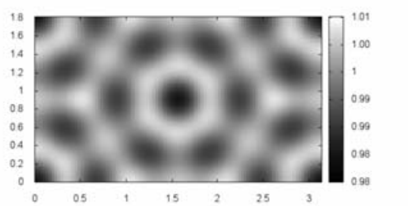

図3: $a = 8$, $b = 49$, $c = 1$, $d = 1/32$, $\mu = 1$, $l = 2$ の $t = 1000$ における計算結果

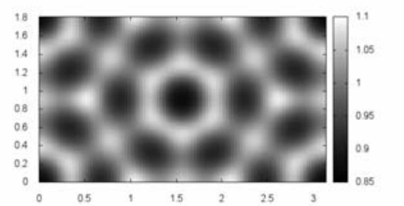

図4: $a = 8$, $b = 49$, $c = 1$, $d = 1/32$, $\mu = 1$, $l = 2$ の $t = 2000$ における計算結果

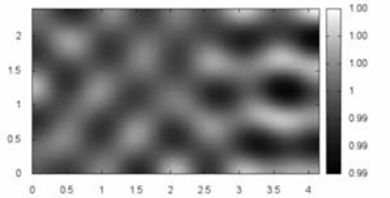

図 5: $a = 8$, $b = 32$, $c = 1$, $d = 1/16$, $\mu = 1$, $l = 4\sqrt{7}$ の $t = 100$ における計算結果

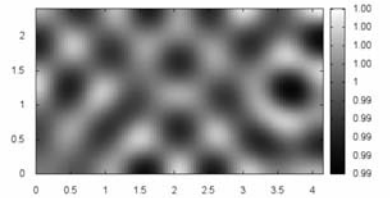

図 6: $a = 8$, $b = 32$, $c = 1$, $d = 1/16$, $\mu = 1$, $l = 4\sqrt{7}$ の $t = 500$ における計算結果

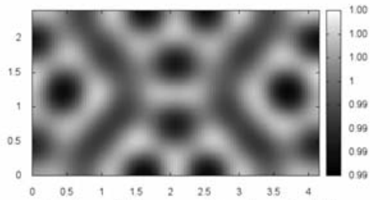

図 7: $a = 8$, $b = 32$, $c = 1$, $d = 1/16$, $\mu = 1$, $l = 4\sqrt{7}$ の $t = 1000$ における計算結果

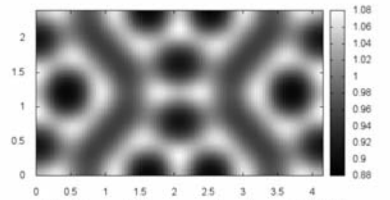

図 8: $a = 8$, $b = 32$, $c = 1$, $d = 1/16$, $\mu = 1$, $l = 4\sqrt{7}$ の $t = 2000$ における計算結果

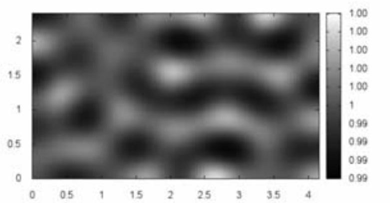

図 9: $a = 8$, $b = 64$, $c = 1$, $d = 1/8$, $\mu = 1$, $l = 4\sqrt{7}$ の $t = 100$ における計算結果

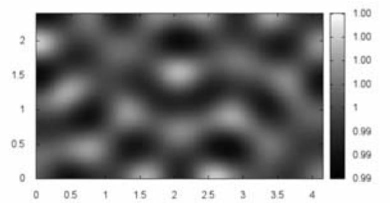

図 10: $a = 8$, $b = 64$, $c = 1$, $d = 1/8$, $\mu = 1$, $l = 4\sqrt{7}$ の $t = 500$ における計算結果

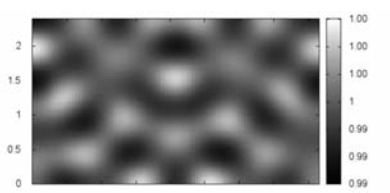

図 11: $a = 8$, $b = 64$, $c = 1$, $d = 1/8$, $\mu = 1$, $l = 4\sqrt{7}$ の $t = 1000$ における計算結果

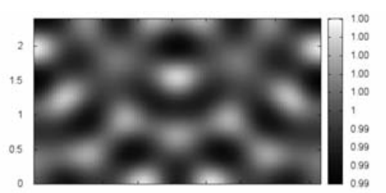

図 12: $a = 8$, $b = 64$, $c = 1$, $d = 1/8$, $\mu = 1$, $l = 4\sqrt{7}$ の $t = 2000$ における計算結果

次に，$a-bd\neq 0$ を満たす係数として，

$$a=8,\ b=32,\ c=1,\ d=1/16,\ \mu=1,\ l=4\sqrt{7}$$

を選ぶ（$\chi_{\rm cr}=18$ となる）．このとき，図 5 から図 8 に示される結果が得られた．ここで，図 8 に示した定常解は (4.7) の関数 $v^*=\widetilde{A}(-\Phi_{13}-\Phi_{42}+\Phi_{51})$ に対応したパターンであることがわかる．

最後に，$a-bd=0$ を満たす係数として，

$$a=8,\ b=64,\ c=1,\ d=1/8,\ \mu=1,\ l=4\sqrt{7}$$

を選ぶ（$\chi_{\rm cr}=18$ となる）．このとき，図 9 から図 12 に示される結果が得られた．この数値計算では (4.7) の 4 つの関数に対応する定常パターンは得られなかった．

6　3 次元走化性・増殖系における余次元 3 の分岐

鳴海・大崎 [3] は，立方体領域において，面心立方格子 (face-centered cubic; FCC) パターン解ならびに体心立方格子 (body-centered cubic; BCC) パターン解が安定的に存在することを数値計算により確認した．FCC パターン解が余次元 1 であるのに対して，BCC パターン解は余次元 3 であるから，久藤ら [2] と同じように，BCC パターン解を古典的分岐定理 [8] で扱うには複合モードの基底を予め把握しておく必要がある．本節では，Ambrosetti-Prodi の分岐定理により，関数空間に制限を設けることなく分岐点近傍での BCC パターン解の存在について考察する．

扱う定常問題は空間 3 次元における (SE) であり，Ω として次の立方体領域 $\Omega_{\rm c}$ を考える：

$$\Omega_{\rm c}=\left(0,\frac{\pi}{l}\right)\times\left(0,\frac{\pi}{l}\right)\times\left(0,\frac{\pi}{l}\right). \tag{6.1}$$

Hilbert 空間 X と Y を

$$X=H^2_{\rm N}(\Omega_{\rm c})\times H^2_{\rm N}(\Omega_{\rm c}),\quad Y=L^2(\Omega_{\rm c})\times L^2(\Omega_{\rm c})$$

と改めて設定することで, (SE) の分岐問題は, (4.2) で定義される作用素 $F:(0,\infty)\times X\to Y$ を用いて (4.3) で定式化される．

斉次 Neumann 境界条件の下での $L^2(\Omega_{\rm c})$ の直交基底を

$$\left\{\phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)\phi_{n_z}(z)\mid n_x,n_y,n_z\geq 0\right\};\quad \phi_n(x)=\cos(lnx)$$

と定める．このとき，Y の直交基底として，

$$\left\{{}^T\left[h_{\boldsymbol{n}}\,\phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)\phi_{n_z}(z)\ \ k_{\boldsymbol{n}}\,\phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)\phi_{n_z}(z)\right]\ \mid n_x,n_y,n_z\geq 0\right\}$$

を選ぶことができる．

Proposition 6.1. 線形化作用素 $L = F_U(\chi, U^*)$ に対して，$V = \mathrm{Ker}\, L \neq \{0\}$ を満たす χ の値は，

$$\chi = \chi(\boldsymbol{n}) := \frac{\mu}{c}\left[dl^2|\boldsymbol{n}|^2 + \frac{ab}{l^2|\boldsymbol{n}|^2} + a + bd\right] \tag{6.2}$$

で与えられる．ここで，$|\boldsymbol{n}|^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$．加えて，$\chi(\boldsymbol{n})$ はパラメータ l を $l = l_{\mathrm{cr}}(\boldsymbol{n}) := \frac{1}{|\boldsymbol{n}|^2}\left(\frac{ab}{d}\right)^{\frac{1}{4}}$ と選択するとき最小値をとる：$\min\limits_{l} \chi(\boldsymbol{n}) = \dfrac{\mu}{c}(\sqrt{a} + \sqrt{bd})^2 = \chi_{\mathrm{cr}}$．

BCC パターンは，$|\boldsymbol{n}|^2 = 2$ を満たす 3 つのモード関数の線形結合によって得られ，属する核空間 V の次元も 3 となる：

$$V = \mathrm{span}\{\Phi_{110},\ \Phi_{101},\ \Phi_{011}\}.$$

ここで，$\Phi_{\boldsymbol{n}}(x,y,z) = {}^T[\phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)\phi_{n_z}(z) \ \ \eta_{\boldsymbol{n}}\, \phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)\phi_{n_z}(z)]$. Hilbert 空間 Y の部分空間 R について，その位相的補空間 Z は V と同じ基底で張られる：

$$Z = \mathrm{span}\{\Phi_{110},\ \Phi_{101},\ \Phi_{011}\}.$$

このとき，射影作用素 $P: Y \to Z$ は次式で表現される：

$$\begin{aligned} P\,\Phi &= \frac{\langle \Phi, \Phi_{110}\rangle_Y}{\|\Phi_{110}\|_Y^2}\,\Phi_{110} + \frac{\langle \Phi, \Phi_{101}\rangle_Y}{\|\Phi_{101}\|_Y^2}\,\Phi_{101} + \frac{\langle \Phi, \Phi_{011}\rangle_Y}{\|\Phi_{011}\|_Y^2}\,\Phi_{011} \\ &= \frac{4l^3}{\pi^3(1+\eta_{110}^2)}\big(\langle \Phi, \Phi_{110}\rangle_Y\,\Phi_{110} + \langle \Phi, \Phi_{101}\rangle_Y\,\Phi_{101} + \langle \Phi, \Phi_{011}\rangle_Y\,\Phi_{011}\big), \quad \Phi \in Y. \end{aligned}$$

Theorem 3.1 の条件 (a) と (b) を満たす $v^* \in V$ を求める．$v^* \in V$ を次のように表す：

$$v^* = \alpha\,\Phi_{110} + \beta\,\Phi_{101} + \gamma\,\Phi_{011} := \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{bmatrix} \in V; \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

これを条件 (a) の式へ代入することで，α, β, γ が決定される．関係式 $a - bd = 0$ は $v^* = 0$ を導くため，条件 (a) を満たすためには $a - bd \neq 0$ が必要となる．このとき，条件 (a) を満たす次の v^* の候補 4 つが求められる：

$$\begin{aligned} v^* = \widetilde{B}\,(\Phi_{110} + \Phi_{101} + \Phi_{011}),\ &\widetilde{B}\,(\Phi_{110} - \Phi_{101} - \Phi_{011}), \\ \widetilde{B}\,(-\Phi_{110} + \Phi_{101} - \Phi_{011}),\ &\widetilde{B}\,(-\Phi_{110} - \Phi_{101} + \Phi_{011});\ \widetilde{B} = \frac{2c}{\mu^2(a-bd)}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

条件 (b) については空間 2 次元の場合 [7] と同様に示すことができる．すなわち，(6.4) の 4 つの v^* に対して，S が逆をもつ．

以上のことより，次の定理が得られる：

Theorem 6.2. 関数 $v^* \in V$ を (6.4) で定義されたものとし，$l = l_{\rm cr}(1,1,0)$, $\chi^* = \chi_{\rm cr}$ とする．このとき，条件 $a - bd \neq 0$ の下で，$(\chi_{\rm cr}, U^*)$ から分岐する (SE) の非自明解 $(\chi(\lambda), U(\lambda)) \in (0,\infty) \times X$ が存在し，

$$\chi(\lambda) = \chi_{\rm cr} + \lambda, \quad U(\lambda) = U^* + \lambda\left[v^* + \lambda\tilde{v}(\lambda)\right]$$

と表される．ただし，$\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ は十分小で，$\tilde{v}(\lambda)$ は滑らかな λ の関数である．

$-\phi_1(x) = \phi_1\left(\frac{\pi}{l} - x\right)$ であることを踏まえると，(6.4) の 2 番目，3 番目，4 番目のパターンは 1 番目のパターンをそれぞれ z, y, x 方向のみ区間内で反転したものであることがわかる．よってこれらは全て，頂点の位置が異なるものの，BCC パターンを表している．つまり，$|\boldsymbol{n}|^2 = 2$ の場合，Theorem 6.2 で捉えられるパターンは，全て BCC パターンである．

参考文献

[1] A. Ambrosetti and G. Prodi, “*A Primer of Nonlinear Analysis*”, Cambridge University Press, 1993.

[2] K. Kuto, K. Osaki, T. Sakurai, and T. Tsujikawa, *Spatial pattern formation in a chemotaxis-diffusion-growth model*, Phys. D 241 (2012), 1629–1639.

[3] T. Narumi and K. Osaki, *Three-Dimensional Pattern Formations in a Biological Model of Chemotaxis and Growth*, RIMS Kôkyûroku 1917 (2014), 86–93.

[4] E. O. Budrene and H. C. Berg, *Complex patterns formed by motile cells of Escherichia coli*, Nature 349 (1991), 630–633.

[5] E. O. Budrene and H. C. Berg, *Dynamics of formation of symmetrical patterns of chemotactic bacteria*, Nature 376 (1995), 49–53.

[6] M. Mimura and T. Tsujikawa, *Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth*, Phys. A 230 (1996), 499–543.

[7] T. Aoki and K. Osaki, *Bifurcations with multi-dimensional kernel in a chemotaxis-growth system*, Sci. Math. Japonicae (2017), to appear.

[8] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from Simple Eigenvalues*, J. Func. Anal. 8 (1972), 321–340.