

ヤング図形集団における 極限形状とガウスゆらぎの動的モデル

Dynamic model for limit profiles and their Gaussian fluctuations in Young diagram ensembles

北海道大学大学院理学研究院数学部門 洞 彰人
Akihito Hora
Department of Mathematics, Faculty of Science
Hokkaido University

概要

おおむね講演した内容に沿って、ヤング図形の集団における極限形状とそのゆらぎについて概観する。動的なモデルに主眼をおく。講演で用いたスライドは [12] にある。

序

図 1 はヤング図形の成長を描いたヤンググラフである。各列に同じ箱数のヤング図形が並べられている。右にいくと箱が1つ増え(隅に箱が1つ積まれ), 左にいくと箱が1つ減る(角から箱が1つ取り除かれる)。この2つの操作(増 → 減, または減 → 増)を1ステップとみなすと, 同じ箱数のヤング図形の間での推移が得られる。ヤング図形を図 2 の一番右のように表示すると, この推移は山から1つ箱をとって谷に移動させるものである*1。砂の山を(少々荒っぽく)ならすような感じであろうか。本稿では, ある自然な確率のもとでこの推移から生じるマルコフ連鎖を考え, 推移の回数とヤング図形の箱数がともに大きくなる極限において, ヤング図形の巨視的な形状の時間発展を観察する動的モデルを取り扱う。

一般のマルコフ連鎖に目を向けてみよう。マルコフ連鎖の1ステップの枝分れによるランダムな構造が, ステップを重ねるとどんどん複雑になる。他方, マルコフ連鎖の規模(たとえば状態空間の自由度)が大きくなると, そのことによる統計的な効果が生じる。この2つのブレンドないしはバランスの結果として浮かび上がる巨視的な法則を捉える手段が, 時空に関するスケールリング極限である。

*1 山からとった箱をそこにできた谷に戻す(つまりヤング図形は変化しない)のも許す。

ランダムに1つ選び出すとき、得られるサンプルの形状に何らかの一定の特徴が見られるかどうかに着目する. 図2の一番右は, ヤング図形 $\lambda = (1^1 2^2 3^1) \in \mathbb{Y}_8$ を xy -座標平面にのせたものである. ただし, 箱の頂点が格子点にくるように, 箱の1辺の長さを $\sqrt{2}$ にしている. 太線で示したボーダーを λ のプロファイルと呼ぶ. 箱数 $|\lambda| = n$ を動かしても箱の占める部分の面積が一定 (= 2) になるように,

$$\lambda^{\sqrt{n}}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda(\sqrt{n}x), \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n$$

というスケールリングを定める. $n \rightarrow \infty$ のときに, $\lambda^{\sqrt{n}}$ が (何らかの意味で) ある関数のグラフ (極限形状) に収束するかどうか, その収束の過程のゆらぎはどんなものか, さらに確率 \mathbb{P}_n が巨視的な時刻に依存して変化していく場合, 極限形状やそのゆらぎの時間発展がどのように記述されるか, などを考えてみよう.

\mathbb{Y}_n は n 次対称群 \mathfrak{S}_n の既約表現の同値類をパラメータづける. ヤング図形自体は表現と直接関係しない文脈でも現れるが, 本稿ではこのような $\mathbb{Y}_n \cong \widehat{\mathfrak{S}}_n$ に基づく表現論的な集団としての確率空間 $(\mathbb{Y}_n, \mathbb{P}_n)$ を取り扱う. 確率 \mathbb{P}_n がモデルの性質を規定する訳であるが, 特に表現の既約分解や分岐則に起因するランダムな構造に注目する. とりわけ重要なのが

$$M_{\text{Pl}}^{(n)}(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n!}, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n \quad (0.1)$$

で定まる \mathbb{Y}_n 上のプランシェレル測度 $M_{\text{Pl}}^{(n)}$ であり, さまざまな文脈で登場する. たとえば, $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n$ の (両側) 正則表現の既約分解

$$L^2(\mathfrak{S}_n) \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} V^\lambda \otimes V^{\bar{\lambda}}$$

の両辺の次元をとって正規化すれば, (0.1) の \mathbb{Y}_n にわたる和が1という等式を得る. 一方, 誘導表現の既約分解

$$\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} V^\lambda \cong \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Y}_{n+1}: \lambda \nearrow \mu} V^\mu, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n$$

の次元をとった $(n+1) \dim \lambda = \sum_{\mu: \lambda \nearrow \mu} \dim \mu$ により,

$$p(\lambda, \mu) = \frac{\dim \mu}{(n+1) \dim \lambda}, \quad \lambda \nearrow \mu, \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n, \quad \mu \in \mathbb{Y}_{n+1} \quad (0.2)$$

とおく. ただし, $\lambda \nearrow \mu$ はヤング図形 λ に箱を1つ加えてヤング図形 μ ができることを示す記号である. ヤンググラフの根つこの \emptyset から出発して (0.2) を推移確率にもつマルコフ連鎖をプランシェレル成長過程と呼ぶ. その n ステップめの分布が $M_{\text{Pl}}^{(n)}$ である. また, ロビンソン・シェンステッド対応

$$\mathfrak{S}_n \cong \{(P, Q) \mid P \text{ と } Q \text{ は } \lambda\text{-型の標準盤, } \lambda \in \mathbb{Y}_n\}$$

によれば, 置換 $x \in \mathfrak{S}_n$ に含まれる最長増加部分列の長さの \mathfrak{S}_n 上の一様確率測度に関する分布と, $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ の最長行の長さの $\mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)}$ に関する分布とが一致する.

1 静的モデル

プランシェレル集団 $(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)})$ に対する静的モデルは, 次に述べるヴェルシック・ケロフ [21] とローガン・シェップ [19] によるヤング図形の極限形状の発見をもって嚆矢とする. \mathbb{R} 上の C^1 級関数

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2} \right), & |x| \leq 2 \\ |x|, & |x| > 2 \end{cases} \quad (1.1)$$

を定める. $|x| \leq 2$ の部分をパラメータ表示すれば,

$$\begin{cases} x = 2 \sin \theta \\ y = \frac{4}{\pi} (\theta \sin \theta + \cos \theta), \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

とも書ける. $y = \Omega(x)$ のグラフの概形は図 3 のとおり.

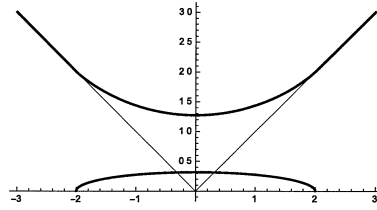


図 3 ヤング図形の極限形状 Ω と標準半円分布 (1.8)

このとき, 大数の弱法則に相当する

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)} \left(\left\{ \lambda \in \mathbb{Y}_n \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |\lambda^{\sqrt{n}}(x) - \Omega(x)| \geq \epsilon \right\} \right) = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

が成り立つ. \mathbb{Y}_n 上のプランシェレル測度はヤンググラフの経路全体

$$\mathfrak{T} = \{ (t(0) = \emptyset \nearrow t(1) = \square \nearrow t(2) \nearrow t(3) \nearrow \dots) \mid t(n) \in \mathbb{Y}_n \}$$

の上のプランシェレル測度 \mathbb{M}_{Pl} に

$$\mathbb{M}_{\text{Pl}}(\{t \in \mathfrak{T} \mid t(n) = \lambda\}) = \mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{Y}_n, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

をみたとすように持ち上げられる. こうしておく, 大数の強法則に相当する

$$\mathbb{M}_{\text{Pl}} \left(\left\{ t \in \mathfrak{T} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |t(n)^{\sqrt{n}}(x) - \Omega(x)| = 0 \right\} \right) = 1$$

が成り立つ。このヤング図形の極限形状の結果は、漸近的表現論の源流の1つであり、現在まで脈々とその影響は続いている。

他の既約分解に基づく表現論的な集団 (たとえばトルウッド・リチャードソン係数の漸近挙動とか) においても、然るべき極限形状が観察される。とりわけ、自由確率論との深い繋がりを見出したケロフとビアンとの寄与は著しい。極限形状という集中現象が起こるメカニズムとして、ビアン [2] が提起した次のような近似的乗法性という弱いエルゴード性にあたる概念がある。 \mathbb{Y}_n 上の確率 $\mathbb{M}^{(n)}$ に対し、その特性関数ともいえる \mathfrak{S}_n 上の正定値関数

$$f^{(n)}(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \mathbb{M}^{(n)}(\lambda) \tilde{\chi}^\lambda(x), \quad x \in \mathfrak{S}_n \quad (1.2)$$

を定める。ただし、 $\tilde{\chi}^\lambda$ は $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ に対応する \mathfrak{S}_n の既約指標であり、それを次元 $\dim \lambda$ で割って正規化したものが $\tilde{\chi}^\lambda$ である。 $\text{supp } x \cap \text{supp } y = \emptyset$ なる $x, y \in \mathfrak{S}_n$ に対して $f^{(n)}$ が

$$f^{(n)}(xy) - f^{(n)}(x)f^{(n)}(y) = o(n^{-\frac{|x|+|y|}{2}}), \quad n \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

をみたすとき、 $(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}^{(n)})$ が近似的乗法性をみたすという。ただし、 $|x|$ は x を互換の積で表すときの最小の個数である。プランシェレル測度 $\mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)}$ に対しては $f^{(n)} = \delta_e$ となり、誤差項なしで (1.3) が成り立つ。つまり、 (\mathfrak{S}_n) 上のプランシェレル測度はエルゴード的である。ヤング図形の極限形状について、初歩の表現の話から技術的詳細に至るまで [11] を参照くださると幸いである。

極限形状のゆらぎについては、次のケロフの中心極限定理が最も基本になる。 \mathfrak{S}_n の正規化された既約指標 $\tilde{\chi}^\lambda$ のサイクル型が $\rho (\in \mathbb{Y}_n)$ の共役類中の1点での値を $\tilde{\chi}_\rho^\lambda$ で表す。特に、 $\tilde{\chi}_{(1^n)}^\lambda = \tilde{\chi}^\lambda(e) = 1$ 。長さ $k (\leq n)$ の巡回置換での値は $\tilde{\chi}_{(k, 1^{n-k})}^\lambda$ と書ける。

ケロフの中心極限定理 [16] プランシェレル集団 $(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)})$ における確率変数の族 $\{n^{k/2} \tilde{\chi}_{(k, 1^{n-k})}^\lambda\}_{k \in \{2, 3, \dots\}}$ は $n \rightarrow \infty$ で漸近的に独立なガウス系をなす。すなわち、各 X_k が正規分布 $N(0, k)$ にしたがう独立確率変数列 $\{X_k\}_{k \in \{2, 3, \dots\}}$ に任意の有限次元分布が収束する。—

$k \geq 2$ に対して $n^{k/2} \tilde{\chi}_{(k, 1^{n-k})}^\lambda$ が平均 0、分散 1 をもつことは、既約指標の直交関係から確認される。

ケロフの中心極限定理を代数的な確率空間の枠組で言い直すこともできる。 \mathfrak{S}_n の共役類 C_ρ に対し ($\rho \in \mathbb{Y}_n$ はサイクル型)、左正則表現を通して $A_\rho = \sum_{x \in C_\rho} x$ を $\ell^2(\mathfrak{S}_n)$ に作用させる (隣接作用素)。 $B(\ell^2(\mathfrak{S}_n))$ 上に (真空) 状態 $\langle \delta_e, \cdot \delta_e \rangle$ を定める。このとき、次の命題はケロフの中心極限定理と同値である。

▶ $\forall k \in \{2, 3, \dots\}, \forall p_2, \dots, p_k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ に対し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \delta_e, \left(\frac{A_{(2, 1^{n-2})}}{\sqrt{|C_{(2, 1^{n-2})}|}} \right)^{p_2} \cdots \left(\frac{A_{(k, 1^{n-k})}}{\sqrt{|C_{(k, 1^{n-k})}|}} \right)^{p_k} \delta_e \right\rangle = \prod_{j=2}^k \int_{\mathbb{R}} x^{p_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (1.4)$$

ケロフの中心極限定理はさまざまな方向に拡張されている. この研究集会のタイトルと多少関係することを (1.4) の続きとして 1 つ述べておく ([14]). 隣接作用素の量子分解

$$A_{(j,1^{n-j})} = A_{(j,1^{n-j})}^+ + A_{(j,1^{n-j})}^- + A_{(j,1^{n-j})}^o$$

を考える. ここで,

$$A_{(j,1^{n-j})}^+ = \sum_{x \in C_{(j,1^{n-j})}} x^+, \quad x^+ \delta_y = \begin{cases} \delta_{xy} & \text{if } c(xy) < c(y) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

($c(y)$ は y を分解したときの互いに素なサイクルの個数), さらに不等号を逆向きあるいは等号にして $A_{(j,1^{n-j})}^-$, $A_{(j,1^{n-j})}^o$ も定める. また, 可分なヒルベルト空間 H 上のボゾン・フォック空間 $\Gamma(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n}$ を用意し, H の正規直交基底 $\{v_j\}_{j \in \{2,3,\dots\}}$ に対して, 生成作用素 $B_j^+ = a^+(v_j)$ と消滅作用素 $B_j^- = a^-(v_j)$ を定める. このとき, 非可換な作用素たちの任意有限個の任意の順序の積の任意の行列要素の収束の意味で, いわゆる量子中心極限定理

$$\left\{ \left(\frac{A_{(j,1^{n-j})}^+}{\sqrt{|C_{(j,1^{n-j})}|}}, \frac{A_{(j,1^{n-j})}^-}{\sqrt{|C_{(j,1^{n-j})}|}}, \frac{A_{(j,1^{n-j})}^o}{\sqrt{|C_{(j,1^{n-j})}|}} \right) \right\}_{j \in \{2,3,\dots\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{(B_j^+, B_j^-, 0)\}_{j \in \{2,3,\dots\}}$$

が成り立つ.

ケロフの中心極限定理をヤング図形のプロファイルのゆらぎと結びつけるため, プロファイルを解析するのに使われる道具を少し準備しよう*2. ヤング図形 $\lambda \in \mathbb{Y}$ を図 2 右のように xy -平面に置いたとき, プロファイルの谷の x 座標を x_i , 山の x 座標を y_j とする. 谷と山は交互に並んで谷の方が山よりも 1 つ多い. さらに, 箱の頂点が格子点であることを思い出すと, 山谷座標によってヤング図形が

$$\lambda = (x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{r-1} < y_{r-1} < x_r), \quad x_i, y_j \in \mathbb{Z} \quad (1.5)$$

と表される. 谷を極に山を零点にもつ有理関数を部分分数に分解して

$$\frac{(z - y_1) \cdots (z - y_{r-1})}{(z - x_1) \cdots (z - x_r)} = \frac{\mu_1}{z - x_1} + \dots + \frac{\mu_r}{z - x_r} \quad (1.6)$$

と書くと, $\mu_i > 0$, $\mu_1 + \dots + \mu_r = 1$ となることがわかり,

$$m_\lambda = \sum_{i=1}^r \mu_i \delta_{x_i}$$

が \mathbb{R} 上の確率測度になる. この m_λ を λ の (ケロフの) 推移測度と呼ぶ. \mathbb{R} 上の確率測度 μ の n 次モーメントを

$$M_n(\mu) = \int_{\mathbb{R}} x^n \mu(dx) = \langle x^n, \mu \rangle$$

*2 このあたりについても, [11] に自己充足説明あり.

で表す. (1.6) の右辺は m_λ のスティルチェス変換 $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} m_\lambda(dx)$ にほかならない. (1.6) は適当な極限操作によって連続ヤング図形

$$\mathbb{D} = \{\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ は } 1\text{-リプシッツ連続, 十分大きい } |x| \text{ で } \omega(x) = |x|\}$$

まで拡張することができ, $\omega \in \mathbb{D}$ に対して上半平面 \mathbb{C}^+ 上の正則関数として

$$\frac{1}{z} \exp\left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} \left(\frac{\omega(x) - |x|}{2} \right)' dx \right\} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} m_\omega(dx) \quad (1.7)$$

を得る. 連続図形 $\omega \in \mathbb{D}$ とその推移測度 $m_\omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ との対応はしばしばマルコフ変換と呼ばれる. ちなみに, (1.1) の極限形状 Ω の推移測度は標準半円分布である:

$$m_\Omega(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} 1_{[-2,2]}(x) dx. \quad (1.8)$$

ヴェルシック・ケロフとローガン・シェップの結果により, われわれは, プランシェレル測度 $\mathbb{M}_{\mathbb{P}1}$ に関して a.s. に (然るべき位相で) $m_{\lambda\sqrt{n}} - m_\Omega \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ が成り立つことを知っている. この収束の過程のゆらぎを記述するため,

$$\sqrt{n}(m_{\lambda\sqrt{n}} - m_\Omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} ? \quad (1.9)$$

の挙動を調べたイワノフ・オルシヤンスキーの結果 [15] を紹介しよう. プランシェレル測度のもとで $\lambda\sqrt{n}$ の中程と端っこではゆらぎのスケールが異なることが知られているので (たとえば [3] 参照), (1.9) は超関数値の確率変数の枠組で捉えることになる. ただし, どのような超関数のクラスの中で収束を論じるかは, 工夫の余地がある ([13]).

対称群の既約指標の係数を調整して, $\rho, \lambda \in \mathbb{Y}$ に対して

$$\Sigma_\rho(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|(|\lambda| - 1) \cdots (|\lambda| - |\rho| + 1) \tilde{\chi}_{(|\rho|, 1^{|\lambda|-|\rho|})}^\lambda & \text{if } |\rho| \leq |\lambda| \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.10)$$

とおく. $\rho = (k)$ のときは, $\Sigma_k(\lambda)$ と略記する. (1.10) において, ρ をとめて (パラメータとみて) λ の関数だとみなすのが, ケロフ・オルシヤンスキーが [18] で提起した観点である. この何気ない見方 (双対的アプローチ) は, 対称群の表現の漸近理論に新風を吹き込んだと言ってよい. \mathbb{Y} 上の関数 Σ_k は, ヤング図形の (1.5) の山谷座標やフロベニウス座標およびシフト行座標の多項式で表される. Σ_k たちが生成する (\mathbb{R} または \mathbb{C} 上の) 代数を \mathbb{A} で表す. $\{\Sigma_\rho\}_{\rho \in \mathbb{Y}}$ は \mathbb{A} の (線型空間としての) 基底をなす. (1.6) から, 推移測度のモーメント $M_n(m_\lambda)$ も \mathbb{A} に属する多項式関数であるが, さらに \mathbb{A} の生成系をなすことも示される. こうして, 1 を含む代数として

$$\mathbb{A} = \langle \Sigma_k(\lambda) \rangle_{k \in \mathbb{N}} = \langle R_n(m_\lambda) \rangle_{n \in \{2, 3, \dots\}} = \langle M_n(m_\lambda) \rangle_{n \in \{2, 3, \dots\}}. \quad (1.11)$$

ただし, R_n は \mathbb{R} 上の確率測度の n 次自由キウムラントである. (1.11) の第 2 の等式の生成系間の関係式を与えるのがケロフ多項式であり, 第 3 の等式は一般的な自由キウムラント・

モーメント公式による ([11] の 6.3 節と 4.3 節). 筆者は \mathbb{A} をケロフ・オルシャンスキー代数と呼ぶのがよいと思っている. \mathbb{A} には問題に応じて適切な次数づけを入れるのがよい. ヤング図形のプロファイルの極限形状やゆらぎを論じるには, 重み次数 (wt) が適している. たとえば,

$$\text{wt } \Sigma_k(\lambda) = \text{wt } R_{k+1}(\mathbf{m}_\lambda) = \text{wt } M_{k+1}(\mathbf{m}_\lambda) = k + 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

[15] によれば, (1.9) の次のような評価を得る: $\forall p \in \mathbb{N}$ に対し, \mathbb{Y}_n 上の関数とみて

$$\begin{aligned} \langle x^{2p}, \sqrt{n}(\mathbf{m}_{\lambda_{\sqrt{n}}} - \mathbf{m}_\Omega) \rangle &= \sum_{j=1}^{p-1} \binom{2p}{p-j-1} n^{-\frac{2j+1}{2}} \Sigma_{2j+1}(\lambda) + (\text{剰余項}), \\ \langle x^{2p-1}, \sqrt{n}(\mathbf{m}_{\lambda_{\sqrt{n}}} - \mathbf{m}_\Omega) \rangle &= \sum_{j=1}^{p-1} \binom{2p-1}{p-j-1} n^{-j} \Sigma_{2j}(\lambda) + (\text{剰余項}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

が成り立つ. (1.11) の構造を利用して自由キュムラント・モーメント公式とケロフ多項式を考慮すると見やすい. ただし, 剰余項はプランシエル測度 $M_{\text{Pl}}^{(n)}$ による平均操作を行えば $n \rightarrow \infty$ で無視できる量である. ケロフの中心極限定理を考慮すれば, (1.12) の右辺の主要項に現れている $n^{-k/2} \Sigma_k(\lambda)$ がちょうど $n \rightarrow \infty$ で有限の量として取り出せることに注意しよう. 右辺の係数は一見複雑そうだが, 上三角行列に並べて逆に解くと, (第 1 種の) チェビシェフ多項式が得られる. すなわち, (1.12) を書き直すと, \mathbb{Y}_n 上で

$$\langle (k \text{ 次チェビシェフ多項式}), \sqrt{n}(\mathbf{m}_{\lambda_{\sqrt{n}}} - \mathbf{m}_\Omega) \rangle = n^{-\frac{k-1}{2}} \Sigma_{k-1}(\lambda) + (\text{剰余項}). \quad (1.13)$$

(1.13) に現れるチェビシェフ多項式は, $\cos k\theta = T_k(\cos \theta)$ から決まる k 次多項式 T_k を用いて $T_k(x/2)$ と表されるものであり, $L^2\left((-2, 2), \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}} dx\right)$ の正規直交基底をなす. (1.13) の左辺をその中の $\sqrt{n}(\mathbf{m}_{\lambda_{\sqrt{n}}} - \mathbf{m}_\Omega)\pi\sqrt{4-x^2}$ のフーリエ係数とみなせば, ケロフの中心極限定理によって $n^{-\frac{k-1}{2}} \Sigma_{k-1}(\lambda)$ が $\sqrt{k-1} Z_{k-1}$ に $n \rightarrow \infty$ で収束するので*3,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\mathbf{m}_{\lambda_{\sqrt{n}}} - \mathbf{m}_\Omega) = \sum_{k=3}^{\infty} \sqrt{k-1} Z_{k-1} T_k\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}} 1_{(-2,2)}(x) \quad (1.14)$$

を得る. もちろん, (1.14) のランダムフーリエ級数の収束は良くないので, これはナイーブな導出にすぎない. (1.14) の右辺はコンパクトな台をもつシュワルツ超関数値の確率変数だとみなせるが, (1.14) をどのような超関数のクラスに値をもつ確率変数の中での収束だと捉えるかは別の問題になる. 少なくとも, (1.13) の系の $n \rightarrow \infty$ でのガウス系への有限次元分布の収束は厳密な命題である.

*3 $\{Z_2, Z_3, \dots\}$ は独立同分布で, $Z_i \sim N(0, 1)$.

2 動的モデル

冒頭に述べたヤング図形の箱の移動 (山 \rightarrow 谷) の推移を考える. マヤ図形の変遷と違ってよい. ヤング図形のプロファイル上にある箱の辺の中点の x 座標の位置に, その辺の傾き $-1, +1$ に応じて黒丸, 白丸を置く (図 4). 十分左はずっと黒で, 十分右はずっと白である. この黒・白の配置はマヤ図形と呼ばれ, ヤング図形と 1 対 1 に対応する. ヤング図形の箱を 1 つ取り除く操作は「白黒」という隣り合う並びを「黒白」にフリップすることに, 箱を 1 つ積む操作はその逆のフリップにあたる.

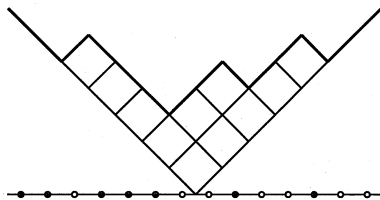


図 4 ヤング図形 ($1^3 3^1 5^1$) とマヤ図形

推移確率を具体的に与えよう. 対称群の既約表現の制限と誘導の既約分解

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \lambda \cong \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Y}_{n-1}: \nu \nearrow \lambda} \nu, \quad \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \nu \cong \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Y}_n: \nu \nearrow \mu} \mu$$

を考え, 次元をとることによって

$$P_{\lambda, \nu}^{\downarrow} = \begin{cases} \frac{\dim \nu}{\dim \lambda} & \text{if } \nu \nearrow \lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad P_{\nu, \mu}^{\uparrow} = \begin{cases} \frac{\dim \mu}{(|\nu|+1) \dim \nu} & \text{if } \nu \nearrow \mu \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.1)$$

とおく. P^{\uparrow} は (0.2) のプランシェレル成長過程の推移行列と同じである. $|\mathbb{Y}_n|$ 次正方形列 $P^{(n)} = P^{\downarrow} P^{\uparrow}$ は \mathbb{Y}_n 上の $\mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)}$ に関して対称なマルコフ連鎖を引き起こす. したがって, $\mathbb{M}_{\text{Pl}}^{(n)}$ を不変に保つ. $P^{(n)}$ から \mathbb{Y}_n 上の連続時刻のマルコフ連鎖 $(X_s^{(n)})_{s \geq 0}$ をつくる. 初期分布 ($|\mathbb{Y}_n|$ 次横ベクトル) を $\mathbb{M}_0^{(n)}$ とすると, $X_s^{(n)}$ の分布は $\mathbb{M}_0^{(n)} e^{s(P^{(n)} - I)}$ で与えられる.

巨視的時刻 t に対して微視的時刻 $s = tn$ をとり, 空間の方は $1/\sqrt{n}$ のスケーリングをとる. すなわち, 時空に関して拡散的なスケーリング極限 ($n \rightarrow \infty$) を考える. 議論したいことを図式にまとめると次のようになる:

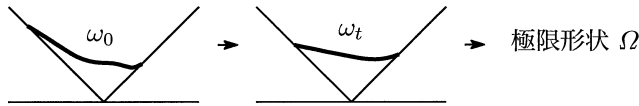
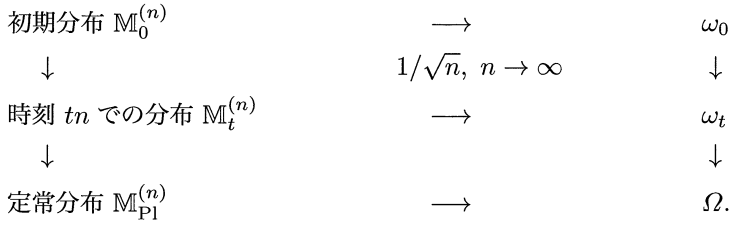


図5 巨視的な形状の推移

初期プロファイル ω_0 を実現する集団が $(Y_n, M_0^{(n)})$ であるとき、微視的時刻 tn における集団が時刻 t でのプロファイル ω_t を示すということである。そして ω_t の t -依存性をなるべく明示的に記述したい。

定理 1 *4 初期集団 $\{(Y_n, M_0^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ が近似的乗法性をもつと仮定する*5。このとき、任意の $t > 0$ に対し、連続時刻マルコフ連鎖 $X_{tn}^{(n)}$ の分布を $M_t^{(n)}$ とおくと、時刻 t の集団 $\{(Y_n, M_t^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ も近似的乗法性をもつ。したがって、大数の弱法則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_t^{(n)} \left(\left\{ \lambda \in Y_n \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |\lambda^{\sqrt{n}}(x) - \omega_t(x)| \geq \epsilon \right\} \right) = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

をみたま連続図形 $\omega_t \in \mathbb{D}$ が存在するが、この時刻 t の巨視的形狀 ω_t は、推移測度を用いて

$$m_{\omega_t} = (m_{\omega_0})_{e^{-t}} \boxplus (m_{\Omega})_{1-e^{-t}} \tag{2.2}$$

によって特徴づけられる。ただし、 \boxplus は \mathbb{R} 上の確率測度の自由合成積、 $(\cdot)_c$ はトレース $c \in (0, 1)$ の射影による自由圧縮を表す。—

確率測度の自由合成積、自由圧縮の定義は省略するが、自由キュムラントを使うと、(2.2) は

$$\begin{aligned} R_1(m_{\omega_t}) &= 0, & R_2(m_{\omega_t}) &= 1, \\ R_k(m_{\omega_t}) &= R_k(m_{\omega_0})e^{-(k-1)t}, & k &\in \{3, 4, \dots\} \end{aligned}$$

*4 ここでは、技術的に細かい設定を少し略してある。[9]を参照。単行本の[10]の方が詳述。

*5 (1.3) とその周辺参照。

と言い直せる. 定理 1 の証明の鍵になるのは, 平凡ながら, 推移行列 $P^{(n)}$ の対角化である:

$$P^{(n)}[\tilde{\chi}_{(\rho, 1^n - |\rho|)}^\lambda]_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} = \left(1 - \frac{|\rho| - m_1(\rho)}{n}\right) [\tilde{\chi}_{(\rho, 1^n - |\rho|)}^\lambda]_{\lambda \in \mathbb{Y}_n}.$$

\mathbb{Y}_n に全順序をつけて $[\cdot]_{\lambda \in \mathbb{Y}_n}$ を縦ベクトルとみなしている. $m_1(\rho)$ は ρ の中の長さ 1 の行数を表す. 特に, $\rho = (k)$ ならば ($k \in \{2, \dots, n\}$), 固有値が $1 - (k/n)$ になる. $n \rightarrow \infty$ のとき, スペクトルギャップの逆数が微視的時刻と同じオーダーである.

自由確率論では, しばしば確率測度の族 $\{\mu_t\}_{t>0}$ の時間発展がそのスティルチェス変換

$$G_{\mu_t}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} \mu_t(dx), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

のみたす方程式によって記述される. よく知られたプランシェレル成長過程の連続時刻版を例にとってみよう. (0.2) の推移行列 P から $e^{s(P-I)}$ ($s > 0$) を考えると, その行列の第 1 行が \emptyset から出発する連続時刻プランシェレル成長過程の時刻 s での分布を表す. $s = tn$ におけるその \mathbb{Y} 上の分布を $Q_t^{(n)}$ と書く. 空間方向には $1/\sqrt{n}$ のスケーリング施して $\lambda\sqrt{n}$ を考える. $Q_t^{(n)}$ のもとで $n \rightarrow \infty$ とすると $\lambda\sqrt{n}$ はある $\Omega_t \in \mathbb{D}$ に集中するが, 第 1 節の静的モデルの議論から察するに, この Ω_t は極限形状 Ω を伸縮したものにほかならない. すなわち, 推移測度で言えば, m_{Ω_t} は平均 0, 分散 t の半円分布になる. そのスティルチェス変換は

$$G_{\Omega_t}(z) = \int_{-2\sqrt{t}}^{2\sqrt{t}} \frac{1}{z-x} \frac{\sqrt{4t-x^2}}{2\pi t} dx = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4t}}{2t}, \quad z \in \mathbb{C}^+$$

であり, $G(t, z) = G_{\Omega_t}(z)$ が次の複素バーガーズ方程式をみたす:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -G \frac{\partial G}{\partial z}.$$

われわれの場合は, プロファイル $y = \omega_t(x)$ と $y = |x|$ で囲まれる部分の面積が一定値 2 (\iff 推移測度 m_{ω_t} の分散が 1) なので, 当然これとは違う時間発展を示す.

定理 2 ([9], [10]) (2.2) のスティルチェス変換

$$G(t, z) = G_{m_{\omega_t}}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} m_{\omega_t}(dx), \quad z \in \mathbb{C}^+$$

は偏微分方程式

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -G \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial z} + G$$

をみたす. —

$\omega = \omega_t(x)$ がみたす方程式は得られていない. 当然 $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_t(x) = \Omega(x)$ は成り立つ. また, Ω が常微分方程式

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\Omega - x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^{-1} = 0$$

をみたくことはすぐに確かめられるが…。 $\omega_t(x)$ の時間発展を与える偏微分方程式は手元がないものの、(2.2)で定まる m_{ω_t} と $\omega_t(x)$ とは(1.7)のマルコフ変換で結ばれているので、ある程度具体的に計算可能である。つまり、 m_{ω_t} についての(2.2)の情報から ω_t に至るには、

自由合成積, 自由圧縮 \rightarrow 自由キウムラント \rightarrow ヴォイクレスクの R 変換
 \rightarrow 逆関数 = スティルチェス変換 \rightarrow 対数をとる
 \rightarrow スティルチェス変換 $\left\{ \begin{array}{l} \text{実部} \rightarrow \text{ヒルベルト変換} \\ \text{虚部} \rightarrow \text{密度関数} \end{array} \right.$

というコースをたどればよい*6。

ヤング図形の箱の生成・消滅のモデルの流体力学極限に関する舟木・佐々田の結果 [7] がある。 \mathbb{Y} 上の確率測度

$$\mu^\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{Z} \varepsilon^{|\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{Y} \quad (2.3)$$

を考える。 Z は正規化のための定数である。パラメータ $N > 0$ に対し、箱数の平均 $\mathbb{E}[|\lambda|]$ が N^2 になるように $0 < \varepsilon < 1$ をとる。このとき、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon = 1$ となる。1ステップの推移では、 $\lambda \in \mathbb{Y}$ からランダムに(等重に)山を1つ削って $\mu \in \mathbb{Y}_{|\lambda|-1}$ を得るか、ランダムに谷に1つつけて $\mu \in \mathbb{Y}_{|\lambda|+1}$ を得るかのどちらかにし、そのうえで μ^ε を不変に保つような推移確率、さらには連続時刻のマルコフ連鎖を \mathbb{Y} 上に考える。巨視的時刻 $t > 0$ に対し、微視的時刻は $s = tN^2$ で、空間方向に $1/N$ のスケールリングを施す: $\lambda^N(x) = \frac{1}{N} \lambda(Nx)$ 。このとき、初期集団 ($t = 0$) において $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda^N = \psi_0$ (大数の弱法則) が成り立つならば、時刻 t の集団においても大数の弱法則が成り立って、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda^N = \psi_t$ なる極限形状が得られる。 $\psi = \psi_t(x)$ のみたく偏微分方程式は次のとおりである。ヤング図形を図2の中(フランス式)のように xy -平面に置けば、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{1 - \frac{\partial \psi}{\partial x}} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{1 - \frac{\partial \psi}{\partial x}}, \quad (2.4)$$

図2の右の置き方に変換すると、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \left(1 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (2.5)$$

である。 $t \rightarrow \infty$ とすれば静的モデルの極限形状を得る訳であるが、(2.4)からは

$$e^{-(\pi/\sqrt{6})x} + e^{-(\pi/\sqrt{6})\psi(x)} = 1, \quad (2.6)$$

(2.5) からだと

$$\psi(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \log \left(e^{(\pi/2\sqrt{3})x} + e^{-(\pi/2\sqrt{3})x} \right) \quad (2.7)$$

*6 マルコフ変換に通曉している長谷部高広さんが Mathematica を使って計算し、 m_{ω_t} の密度や ω_t のグラフをいくつか書いてみせてくれた ([8])。そういう具体的な姿を眺めていると、新たな問題が見えてくるようにも思う。

を得る. (2.6), (2.7) はしばしばヴェルシック曲線と呼ばれる. この段で紹介した舟木・佐々田の結果については, [7], [6] を見られたい.

(1.7) で定めた推移測度はコンパクトな台をもつが, 推移測度およびマルコフ変換の概念はある程度の裾の条件を課したコンパクトな台をもたない場合にも拡張される. [17] を参照. そうすると, (2.7) に対応する推移測度 m_ψ が定まる. 舟木・佐々田の結果を推移測度を經由した自由確率論と対称群の既約指標の計算によって再現してみるのもおもしろいであろう.

定理 1 のわれわれのモデルは箱数の保存されるマルコフ連鎖に基づいているが, 大集団すなわち箱数の変化を許した \mathbb{Y} 上のマルコフ連鎖による定式化も考えてみよう. 舟木・佐々田では (2.3) のように箱数について幾何分布になっている. ここでは, \mathbb{Y}_n 上のプランシェレル測度を箱数に関してポアソン分布で重ね合せてできる \mathbb{Y} 上のポアソン化されたプランシェレル測度

$$M_{PP}^{(\xi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\xi} \xi^n}{n!} M_{PI}^{(n)}, \quad \xi > 0$$

をとる. 非負整数上のポアソン分布は平均 ξ で標準偏差が $\sqrt{\xi}$ なので, $\xi \rightarrow \infty$ では $(\mathbb{Y}, M_{PP}^{(\xi)})$ は $n \rightarrow \infty$ の $(\mathbb{Y}_n, M_{PI}^{(n)})$ と類似の挙動を示しそうである (静的モデルではそうだが, 動的モデルでは?). \mathbb{Y} 上のマルコフ連鎖として, 1 ステップでは箱 1 個の増または減で, かつ $M_{PP}^{(\xi)}$ を不変に保つものをつくりたい. (2.1) の推移確率の n -依存を明記するため, 起点 λ, ν が \mathbb{Y}_n に属するときを $P^{\downarrow(n)}, P^{\uparrow(n)}$ と書くことにする.

定理 3 ([9]) $\xi > 0$ に対し, 次で定まる推移確率 $P^{(\xi)}$ は \mathbb{Y} 上の $M_{PP}^{(\xi)}$ に関して対称なマルコフ連鎖を引き起こす:

$$\begin{aligned} P_{\lambda, \mu}^{(\xi)} &= \alpha_\xi(n) P_{\lambda, \mu}^{\uparrow(n)} + (1 - \alpha_\xi(n)) P_{\lambda, \mu}^{\downarrow(n)}, & \lambda \in \mathbb{Y}_n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ P_{\emptyset, \square}^{(\xi)} &= \alpha_\xi(0), & P_{\emptyset, \emptyset}^{(\xi)} &= 1 - \alpha_\xi(0). \end{aligned}$$

ただし, 箱の増減の比率 $\alpha_\xi(n)$ は

$$\alpha_\xi(n) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \xi^{l+1}}{(n+1) \cdots (n+l+1)} = \int_0^1 \xi e^{-\xi x} (1-x)^n dx, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

と定める. —

$P^{(\xi)}$ から \mathbb{Y} 上の連続時刻のマルコフ連鎖 $(X_s^{(\xi)})_{s \geq 0}$ を定義する. 巨視的時刻 $t > 0$ に対して微視的時刻 $s = t\xi$ での集団において空間方向は $\lambda^{\sqrt{\xi}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \lambda(\sqrt{\xi}x)$ のスケールリングを施し, $\xi \rightarrow \infty$ の極限を計算したい… が, これはなかなか難しい.

本節の動的モデルでゆらぎの時間発展を考えてみよう. 第 1 節でプランシェレル集団, すなわち $t \rightarrow \infty$ での定常状態におけるゆらぎを取り扱った. プランシェレル以外の一般的な集団でゆらぎを論じるには, (1.3) の近似的乗法性をより強めた概念が有効である. [20] にし

たがってそれを漸近的指標分解性と呼ぼう。確率空間 $(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}^{(n)})$ に対し, k 変数のキムラント汎関数を \mathcal{C} で表す。すなわち, k 変数のモーメント汎関数を

$$\mathcal{M}[X_1, \dots, X_k] = \mathbb{E}_{\mathbb{M}^{(n)}}[X_1 \cdots X_k], \quad X_i \text{ は } \mathbb{Y}_n \text{ 上の実確率変数}$$

で定め, キムラント・モーメント公式によって \mathcal{M} から \mathcal{C} を定義する ([11] の 4.2 節). (1.10) で定まる Σ_j たちに対して

$$\mathcal{C}[\Sigma_{j_1}, \dots, \Sigma_{j_k}] = O(n^{\frac{j_1 + \dots + j_k - k + 2}{2}}), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

が成り立つとき, $(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}^{(n)})$ が漸近的指標分解性をもつということにする. (1.3) の近似的乗法性と同じように, (1.2) によって $\mathbb{M}^{(n)}$ に対応する正定値関数 $f^{(n)}$ の言葉で定義することもできる. (2.8) のもとでは

$$\mathcal{C}[n^{-\frac{j_1}{2}} \Sigma_{j_1}, \dots, n^{-\frac{j_k}{2}} \Sigma_{j_k}] = O(n^{-\frac{k}{2} + 1}), \quad n \rightarrow \infty$$

が成り立ち, $k \geq 3$ ならば $n^{-\frac{k}{2}} \Sigma_j$ たちの結合キムラントは $n \rightarrow \infty$ で消えるので, ガウスゆらぎがつかまると予想できる. 実際, (2.8) がみたされれば,

$$\left\{ \sqrt{n}(n^{-\frac{j+1}{2}} \Sigma_j - \mathbb{E}_{\mathbb{M}^{(n)}}[n^{-\frac{j+1}{2}} \Sigma_j]) \right\}_{j \in \{2, 3, \dots\}} \quad (2.9)$$

が $n \rightarrow \infty$ で平均 0 のガウス系に (有限次元分布の意味で) 収束する ([20]). (2.8) から (2.9) がしたがうことは見やすく感じられるかもしれないが, スニャディーの論文 [20] の価値はむしろ, 漸近的指標分解性として (2.8) の他に \mathfrak{S}_n の共役類やユツイス・マーフィー元の言葉を用いたいくつかの同値な特徴づけを位相的な議論 (種数展開など) によって与えたところにある.

われわれの動的モデルについて, (まだ満足できる形ではないが) 定理 1 のゆらぎ版として次のことが成り立つ ([13]).

▶ 初期集団 $\{(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}_0^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ の漸近的指標分解性は任意の巨視的時刻 $t > 0$ に伝播する. したがって, 定理 1 の極限形状 ω_t に対し, $(\mathbb{Y}_n, \mathbb{M}_t^{(n)})$ 上の確率変数の系

$$\left\{ (x^j, \sqrt{n}(m_{\lambda \sqrt{n}} - m_{\omega_t})) \right\}_{j \in \{2, 3, \dots\}}$$

は平均 0 の t に依存したガウス系 $\{X_j(t)\}_{j \in \{2, 3, \dots\}}$ に有限次元分布が収束する. $X_j(t)$ たちは一般に独立でないので t を含む共分散が残るが, その記述の仕方には工夫の余地がある. $t \rightarrow \infty$ でその表式が 0 に収束することは確かめられる.

謝辞

講演中や祝賀会のスピーチでも話させていただきましたが、学生時代から今日に至るまで、尾畑伸明さんから受けた学恩は計り知れません。ここにあらためて感謝の気持ちをしたためますとともに、2周めの人生をこれまで以上に快活に楽しまれることをお祈りいたします。今回このような機会を与えてくださった研究代表者の廣島文生さんに御礼を申し上げます。

参考文献

- [1] P. Biane, Quantum random walk on the dual of $SU(n)$, *Probab. Theory Relat. Fields* **89** (1991), 117–129.
- [2] P. Biane, Approximate factorization and concentration for characters of symmetric groups, *IMRN 2001* (2001), 179–192.
- [3] A. Borodin, A. Okounkov, G. Olshanski, Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), 481–515.
- [4] M. Bouhaik, L. Gallardo, Une loi des grands nombres et un théorème limite central pour les chaines de Markov sur N^2 associées aux polynômes discaux, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **310** (1990), 739–744.
- [5] P. Diaconis, The cutoff phenomenon in finite Markov chains, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **93** (1996), 1659–1664.
- [6] T. Funaki, *Lectures on Random Interfaces*, SpringerBriefs in Probability and Mathematical Statistics, Springer, 2016.
- [7] T. Funaki, M. Sasada, Hydrodynamic limit for an evolutionary model of two-dimensional Young diagrams, *Commun. Math. Phys.* **299** (2010), 335–363.
- [8] 長谷部高広, personal communication.
- [9] A. Hora, A diffusive limit for the profiles of random Young diagrams by way of free probability, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **51** (2015), 691–708.
- [10] A. Hora, *The Limit Shape Problem for Ensembles of Young Diagrams*, SpringerBriefs in Mathematical Physics **17**, Springer, 2016.
- [11] 洞彰人, 対称群の表現とヤング図形集団の解析学 — 漸近的表現論への序説, 数学の杜 4, 数学書房, 2017.
- [12] 洞彰人, www.math.sci.hokudai.ac.jp/~hora/rims26jun2017bind.pdf
- [13] A. Hora, in preparation.
- [14] A. Hora, N. Obata, *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs*, Theo-

retical and Mathematical Physics, Springer, 2007.

- [15] V. Ivanov, G. Olshanski, Kerov's central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams, In: *Symmetric Functions 2001: Surveys of Developments and Perspectives*, NATO Sci. Ser. II, Math. Phys. Chem. **74**, ed by S. Fomin, Kluwer Academic Publishers, 2002, pp 93–151.
- [16] S. Kerov, Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **316** (1993), 303–308.
- [17] S. Kerov, Interlacing measures, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **181** (1998), 35–83.
- [18] S. Kerov, G. Olshanski, Polynomial functions on the set of Young diagrams, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1994), 121–126.
- [19] B.F. Logan, L.A. Shepp, A variational problem for random Young tableaux, Adv. Math. **26** (1977), 206–222.
- [20] P. Śniady, Gaussian fluctuations of characters of symmetric groups and of Young diagrams, Probab. Theory Relat. Fields **136** (2006), 263–297.
- [21] A.M. Vershik, S.V. Kerov, Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tables, Soviet Math. Dokl. **18** (1977), 527–531.