数理解析研究所講究録 第2092巻 2018年 9-14

リーマンゼータ関数とディリクレ L 関数の導関数の零点の分布

ADE IRMA SURIAJAYA

理化学研究所 分野横断型数理科学連携研究チーム

ABSTRACT. 本稿では，著者が得たリーマンゼータ関数とディリクレ L 関数の導関数の零点の分布に関する研究結果と知られている発展を紹介する．

1. 導入：リーマンゼータ関数の導関数の零点の分布

A. Speiser [7] はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の一階導関数 $\zeta'(s)$ が $\mathrm{Re}(s) < 1/2$ で実数でない零点を持たないことがリーマン予想と同値であることを示した．この結果は $\zeta(s)$ の零点の分布がその導関数の零点の分布と関係していることを意味し，その後，$\zeta(s)$ の k 階導関数 $\zeta^{(k)}(s)$ の零点はたくさん調べられてきた．B. C. Berndt [3, Theorem] は正の整数 k に対し，$\zeta^{(k)}(s)$ の実数でない零点の個数を調べ，N. Levinson と H. L. Montgomery [5, Theorem 10] は零点の実部の分布を調べた．H. Akatsuka [1, Theorems 1 and 3] と著者 [8, Theorems 1 and 3] はリーマン予想を仮定し，Berndt [3, Theorem] 及び Levinson と Montgomery [5, Theorem 10] が示した評価を改良した．著者 [8] は次を示した．

定理 1. (cf. [1, Theorem 1] ($k=1$), [8, Theorem 1]) リーマン予想が成り立つとき，

$$\sum_{\substack{\rho \\ 0<\mathrm{Im}(\rho)\le T, \\ \zeta^{(k)}(\rho)=0, \\ \text{重複度込み}}} \left(\mathrm{Re}(\rho) - \frac{1}{2}\right) = \frac{kT}{2\pi}\log\log\frac{T}{2\pi} + \frac{T}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\log 2 - k\log\log 2\right) - k\,\mathrm{Li}\left(\frac{T}{2\pi}\right) + O_k\left((\log\log T)^2\right)$$

が成り立つ．ここで，

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

である．

定理 2. (cf. [1, Theorem 3] ($k=1$), [8, Theorem 3]) $N_k(T)$ を $0 < \mathrm{Im}(s) \le T$ における $\zeta^{(k)}(s)$ の零点の重複度込みの個数とする．リーマン予想が成り立つとき，

$$N_1(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{4\pi} - \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{\log T}{(\log\log T)^{1/2}}\right)$$

が成り立つ．

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11M06.

Key words and phrases. リーマンゼータ関数，ディリクレ L 関数，導関数，零点.

本研究は部分的に似鳥国際奨学財団，岩谷直治記念財団と科研費 (課題番号:15J02325) の助成を受けたものである．

F. Ge [4, Theorem 1] は，以上の定理 2 における誤差項を $k=1$ に対して，

$$O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

に改良した．Ge [4] は $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 付近の極小な範囲内における $\zeta(s)$ と $\zeta'(s)$ の零点の個数の関係を詳しく調べ，以上の改良に成功したが，$k>1$ に対して，この方法はうまく適用できず，高階導関数への拡張は未だ困難である．

2. ディリクレ L 関数の導関数の零点の分布

第 1 節で述べた研究は $q>1$ を法とする主指標でない原始的指標 χ に付随するディリクレ L 関数 $L(s,\chi)$ の k 階導関数 $L^{(k)}(s,\chi)$ に対して，C. Y. Yıldırım [10]，著者 [9] と Akatsuka と著書 [2] によって調べられた．Yıldırım [10, Theorems 2 and 3] は $L^{(k)}(s,\chi)$ の零点について，非零領域を調べ，それに基づいて $L^{(k)}(s,\chi)$ の零点を次のように分類した：

- $\{\sigma+it:\sigma\leq -q^K, |t|\leq\varepsilon\}$ にある自明な零点,
- $\{s=\sigma+it:|s|\leq q^K, \sigma\leq -\varepsilon\}$ にある "放浪" 零点と
- $\{\sigma+it:\sigma>-\varepsilon\}$ にある非自明な零点.

ここで，$\varepsilon>0$ は任意であり，$K>0$ は k と ε に依存する大きな定数である．Akatsuka と著者 [2, Theorems 1, 2, and 4] は，Yıldırım が示した非零領域を $k=1$ の場合に対して改良し，"放浪" 零点が存在しないことを示した．詳しくは，次のようである．以下，

$$\kappa := \begin{cases} 0, & \chi(-1)=1, \\ 1, & \chi(-1)=-1 \end{cases}$$

と $m:=\min\{n\in\mathbb{Z}_{\geq 2}:\chi(n)\neq 0\}$ とおく．

定理 3. (cf. [2, Theorems 1–4])

(1) $\Theta(\chi):=\sup\{\mathrm{Re}(\rho):\rho\in\mathbb{C}, L(\rho,\chi)=0\}$ と

$$\mathcal{D}_1(\chi):=\left\{\sigma+it:\sigma\leq 1-\Theta(\chi),\ |t|\geq\frac{6}{\log q}\right\}\setminus\{\rho\in\mathbb{C}:L(\rho,\chi)=0\},$$

$$\mathcal{D}_2(\chi):=\left\{\sigma+it:\sigma\leq -q^2,\ |t|\geq\frac{12}{\log|\sigma|}\right\}$$

としたとき，$s\in\mathcal{D}_1(\chi)\cup\mathcal{D}_2(\chi)$ に対して，$L'(s,\chi)\neq 0$ である．

(2) $j\in\mathbb{N}$ に対して，次が成り立つ．

- $L'(s,\chi)$ は $-2j-\kappa-1<\mathrm{Re}(s)<-2j-\kappa+1$ に唯一な零点

$$-2j-\kappa+O\left(\frac{1}{\log(jq)}\right)$$

を持つ．
- $\mathrm{Re}(s)=-2j-\kappa+1$ 上，$L'(s,\chi)\neq 0$ である．

(3) $-\kappa-1<\mathrm{Re}(s)<0$ に対して，次が成り立つ．

- $\kappa=0$ と $q\geq 7$ のとき，$-1\leq\mathrm{Re}(s)\leq 0$ に $L'(s,\chi)\neq 0$ である．
- $\kappa=1$ と $q\geq 23$ のとき，$-2\leq\mathrm{Re}(s)\leq 0$ に $L'(s,\chi)$ は唯一な零点を持つ．

この新しい非零領域 (定理 3) により，$\mathrm{Re}(s) \leq 0$ における $L'(s,\chi)$ の零点は，高々有限個を除いて $L(s,\chi)$ の自明な零点に一対一対応していることがわかる．また，それらの $L'(s,\chi)$ の零点は $L(s,\chi)$ の自明な零点の近くに存在する．よって，$L'(s,\chi)$ の $\mathrm{Re}(s) \leq 0$ における零点を自明な零点とし，$\mathrm{Re}(s) > 0$ における零点を非自明な零点と分類すればよい．その分類は $L(s,\chi)$ 自身の場合に一致することに注目．

注. (cf. [10, Theorem 2]) $k \geq 1$ に対して，

$$\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{m}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k^2}{m\log m}}\right)$$

において，$L^{(k)}(s,\chi) \neq 0$ である．

定理 3 を示すために，鍵となる式は，$L(s,\chi)$ のアダマールの因数分解無限積表示の対数微分

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = B(\chi) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\kappa}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} + \sum_{\substack{\rho \\ \mathrm{Re}(\rho)>0, \\ L(\rho,\chi)=0}} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \tag{1}$$

(cf. [6, Corollary 10.18]) と $L(s,\chi)$ の関数等式の対数微分

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = -\frac{L'}{L}(1-s,\overline{\chi}) - \log\frac{q}{2\pi} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) + \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi(s+\kappa)}{2}\right)$$

(cf. [6, p. 352]) である．

Akatsuka と著者 [2, Theorem 5] は以上の非零領域 (定理 3) を用いて，Yıldırım [10, Theorem 4] が示した，$\mathrm{Re}(s) > 0, |\mathrm{Im}(s)| \leq T$ における $L^{(k)}(s,\chi)$ の零点の重複度込みの個数 $N_k(T,\chi)$ の評価式の誤差項 $O(q^K \log T)$ を $k=1$ の場合に対して改良できた．

定理 4. (cf. [2, Theorem 5])

$$N_1(T,\chi) = \frac{T}{\pi}\log\frac{qT}{2\pi m} - \frac{T}{\pi} + O\left(m^{1/2}\log qT\right).$$

$m = O(\log q)$ により，定理 4 における誤差項は Yıldırım [10, Theorem 4] が示した $O(q^K \log T)$ を大幅に改良した．Akatsuka と著者 [2, Theorem 6] は定理 1 の $L'(s,\chi)$ への拡張も示した．

定理 5. (cf. [2, Theorem 6])

$$\sum_{\substack{\rho \\ \mathrm{Re}(\rho)>0, |\mathrm{Im}(\rho)|\leq T, \\ L'(\rho,\chi)=0, \\ \text{重複度込み}}} \left(\mathrm{Re}(\rho) - \frac{1}{2}\right) = \frac{T}{\pi}\log\log\frac{qT}{2\pi} + \frac{T}{\pi}\left(\frac{1}{2}\log m - \log\log m\right) - \frac{2}{q}\mathrm{Li}\left(\frac{qT}{2\pi}\right)$$
$$+ O\left(m^{1/2}\log qT\right).$$

これは，第 1 節で述べた Levinson と Montgomery の $k=1$ の場合に対する $L(s,\chi)$ への拡張である．一般リーマン予想を仮定すれば，定理 4 と 5 における誤差項を次のように改良できる．

定理 6. (cf. [9, Theorems 1.1 and 1.2]) 一般リーマン予想が成り立つとするとき，

$$\sum_{\substack{\rho \\ \mathrm{Re}(\rho)>0, |\mathrm{Im}(\rho)|\le T, \\ L'(\rho,\chi)=0, \\ \text{重複度込み}}} \left(\mathrm{Re}(\rho)-\frac{1}{2}\right) = \frac{T}{\pi}\log\log\frac{qT}{2\pi} + \frac{T}{\pi}\left(\frac{1}{2}\log m - \log\log m\right) - \frac{2}{q}\mathrm{Li}\left(\frac{qT}{2\pi}\right)$$

$$+ O\left(m^{1/2}(\log\log qT)^2 + m\log\log qT + m^{1/2}\log q\right)$$

と

$$N_1(T,\chi) = \frac{T}{\pi}\log\frac{qT}{2\pi m} - \frac{T}{\pi} + O\left(A(q,T)\frac{m^{1/2}\log qT}{\log\log qT} + \log q\right)$$

が成り立つ．ここで，

$$A(q,T) := \min\left\{(\log\log qT)^{1/2}, 1+\frac{m^{1/2}}{\log\log qT}\right\}$$

である．

以上の定理 6 の $N_1(T,\chi)$ の近似公式の誤差項における $A(q,T)$ は基本的に後者となり，1 くらいの大きさになるが，m が T を上回り非常に大きいとき，前者のほうが小さくなる．$A(q,T)$ における前者の誤差項は，Ge [4] の方法を使わない証明方法で得られたものである．

注. Ge は投稿中の論文に，以上の定理 6 の $N_1(T,\chi)$ における誤差項を

$$O\left(\frac{\log qT}{\log\log qT} + \sqrt{m\log 2m\log qT}\right)$$

に改良した．

3. 一般リーマン予想と $L'(s,\chi)$ の零点の関係

第 1 節で述べた Speiser [7] の結果は $L'(s,\chi)$ に対して拡張できる．Levinson と Montgomery [5, Theorem 1] は $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ における $\zeta(s)$ と $\zeta'(s)$ の零点の個数がほぼ等しいことを示し，Speiser の結果 [7] を再証明した．Akatsuka と著者 [2, Theorem 7] はこの Levinson と Montgomery [5, Theorem 1] の結果を，$L'(s,\chi)$ に対して次のように拡張し，Speiser の結果 [7] の $L(s,\chi)$ 類似を示した．

定理 7. (cf. [2, Theorem 5]) $N^-(T,\chi)$ と $N_1^-(T,\chi)$ をそれぞれ，$0<\mathrm{Re}(s)<1/2, |\mathrm{Im}(s)|\le T$ における $L(s,\chi)$ と $L'(s,\chi)$ の重複度込みの個数とする．このとき，

$$N^-(T,\chi) = N_1^-(T,\chi) + O\left(m^{1/2}\log qT\right)$$

が成り立つ．

これを用いて，Speiser の結果 [7] の $L(s,\chi)$ への拡張を示した．$\zeta'(s)$ の非零領域を用いれば，Speiser [7] の結果は

$\zeta'(s)\ne 0$ が $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ に成り立つ $\iff$ $\zeta'(s)\ne 0$ が $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ に成り立つ

と書き換えられ，この $L(s,\chi)$ への拡張は次のようである．

定理 8. (cf. [2, Theorems 8 and 9])

- $\kappa = 0$ と $q \geq 216$ であるとき，次の (i) と (ii) は同値である．
  - (i) $0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ において $L(s,\chi) \neq 0$ である．
  - (ii) $0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ において $L'(s,\chi)$ は唯一な零点を持つ．
- $\kappa = 1$ と $q \geq 23$ であるとき，次の (i) と (ii) は同値である．
  - (i) $0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ において $L(s,\chi) \neq 0$ である．
  - (ii) $0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ において $L'(s,\chi) \neq 0$ である．

注. 一般リーマン予想の必要条件 (i)⇒(ii) は既に Yıldırım [10, Theorem 1] により示された．

$\kappa = 0$ の場合に対して，$0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ に現れる $L'(s,\chi)$ の唯一な零点は，Akatsuka と著者 [2] の分類により非自明な零点であるが，$s = 0$ における $L(s,\chi)$ の自明な零点に対応するため，$L'(s,\chi)$ の自明な零点と見なしてもよい．定理 8 が意味するのは，$L'(s,\chi)$ が $0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ にそれ以外の零点を持たないことは一般リーマン予想の同値条件である．

定理 8 に付く q に関する条件は，$L(s,\chi)$ のアダマールの因数分解無限積表示の対数微分 (1) により得られたものである．より詳しくは，非自明な零点の対称性を用いれば，$L(1/2+it,\chi) \neq 0$ を満たす t に対して，

$$\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right) = -\frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}+\frac{\kappa}{2}+\frac{it}{2}\right) \leq -\frac{1}{2}\log\frac{q}{\pi} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}+\frac{\kappa}{2}\right)$$

が成り立つ (cf. [2, (4.3)])．そこで，

$$\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right) < 0 \tag{2}$$

が成り立つように，

$$q > \pi \exp\left(-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}+\frac{\kappa}{2}\right)\right)$$

を取る．q が小さいとき，(2) が成り立たない場合があることは確かめられたが，全ての $1 < q < 216$ ($\kappa = 0$) または $1 < q < 23$ ($\kappa = 1$) に対する確認は済んでいない．定理 8 のような結果は $1 < q < 216$ ($\kappa = 0$) または $1 < q < 23$ ($\kappa = 1$) に対して成り立つかどうかを示すために，

$$\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)$$

の挙動を詳しく調べる必要がある．

参考文献

[1] H. Akatsuka, *Conditional estimates for error terms related to the distribution of zeros of $\zeta'(s)$*, J. Number Theory **132** (2012), no. 10, 2242–2257.

[2] H. Akatsuka and A. I. Suriajaya, *Zeros of the first derivative of Dirichlet L-functions*, J. Number Theory **184** (2018), 300–329.

[3] B. C. Berndt, *The number of zeros for $\zeta^{(k)}(s)$*, J. Lond. Math. Soc. (2) **2** (1970), 577–580.

[4] F. Ge, *The number of zeros of $\zeta'(s)$*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2017 (5), 1578–1588.

[5] N. Levinson and H. L. Montgomery, *Zeros of the derivatives of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **133** (1974), 49–65.

[6] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*, Cambridge University Press, 2006.

[7] A. Speiser, *Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion*, Math. Ann. **110** (1935), no. 1, 514–521.

[8] A. I. Suriajaya, *On the zeros of the k-th derivative of the Riemann zeta function under the Riemann Hypothesis*, Funct. Approx. Comment. Math. **53** (2015), no.1, 69–95.

[9] A. I. Suriajaya, *Two estimates on the distribution of zeros of the first derivative of Dirichlet L-functions under the generalized Riemann hypothesis*, J. Théor. Nombres Bordeaux **29** (2017), no. 2, 471–502.

[10] C. Y. Yıldırım, *Zeros of derivatives of Dirichlet L-functions*, Turkish J. Math. **20** (1996), 521–534.

〒 351-0198 埼玉県和光市広沢 2-1 理化学研究所 分野横断型数理科学連携研究チーム
E-mail address: `adeirmasuriajaya@riken.jp`