数理解析研究所講究録 第2092巻 2018年 42-54

Schur 多重ゼータ関数について

愛媛大学大学院理工学研究科　山崎 義徳 *
Yoshinori Yamasaki
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

1 はじめに

Euler-Zagier 型多重ゼータ関数とは, 以下の無限級数で定義される多変数関数である.

$$\zeta(\boldsymbol{s})=\sum_{1\le m_1<\cdots<m_n}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_n^{s_n}},\quad \zeta^{\star}(\boldsymbol{s})=\sum_{1\le m_1\le\cdots\le m_n}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_n^{s_n}}.$$

ここで $\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{C}^n$ であり, これらの無限級数は $\mathrm{Re}(s_1),\ldots,\mathrm{Re}(s_{n-1})\ge 1$, $\mathrm{Re}(s_n)>1$ のときに絶対収束する. 以下ではこれら 2 つを区別するため, 前者を等号なし多重ゼータ関数 (または単に多重ゼータ関数), 後者を等号付き多重ゼータ関数 (または多重ゼータスター関数) と呼ぶ. 簡単にわかるように, これら 2 つの多重ゼータ関数は, お互いがお互いの線形結合で書ける:

$$\begin{aligned}
\zeta^{\star}(s_1,s_2)&=\zeta(s_1,s_2)+\zeta(s_1+s_2),\\
\zeta(s_1,s_2)&=\zeta^{\star}(s_1,s_2)-\zeta^{\star}(s_1+s_2),\\
\zeta^{\star}(s_1,s_2,s_3)&=\zeta(s_1,s_2,s_3)+\zeta(s_1+s_2,s_3)+\zeta(s_1,s_2+s_3)+\zeta(s_1+s_2+s_3),\\
\zeta(s_1,s_2,s_3)&=\zeta^{\star}(s_1,s_2,s_3)-\zeta^{\star}(s_1+s_2,s_3)-\zeta^{\star}(s_1,s_2+s_3)+\zeta^{\star}(s_1+s_2+s_3).
\end{aligned}$$

ここで $\zeta(s)=\zeta^{\star}(s)$ は Riemann ゼータ関数である. これらの関数は (特に正の整数点における特殊値が) $n=2$ の場合にオイラー [E] によって, n が一般の場合に Hoffman [H], Zagier [Z] によって研究され, 数学の様々な分野や数理物理との関連から現在非常に活発に研究されている.

この報告集では, これら 2 つの多重ゼータ関数を, 対称関数の視点から組合せ論的に補間する "Schur 多重ゼータ関数" というものを導入し, その組合せ論的・数論的性質について紹介する. このゼータ関数は, 対称関数の親玉的な存在である Schur 関数の類似物として構成される.

今回の結果は上智大学の中筋麻貴氏, Chulalongkorn 大学の Ouamporn Phuksuwan 氏との共同研究, および, 名古屋大学の Henrik Bachmann 氏との共同研究に基づくものである. 詳しい証明等については, 参考文献 [NPY, BY] をご覧いただきたい.

2 Schur 多重ゼータ関数

2.1 用語・記号

まずは分割についての用語・記号を準備する.

自然数 n に対して, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{N}^p$ が n の分割であるとは, $\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_p$ かつ $n=|\lambda|=\lambda_1+\cdots+\lambda_p$ を満たすときを言う. このとき $\lambda\vdash n$ と書く. 形式的に 0 の (唯一

*Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 15K04785.

つの) 分割も考え, これを $\emptyset$ (空分割) と書く. $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_q)$ を別の分割とする. $q\le p$ かつ $\mu_i\le\lambda_i$ $(1\le i\le q)$ を満たすとき $\mu\subset\lambda$ と書き, これらの関係を満たす組 (λ,μ) を以下 λ/μ と書く. なお $\mu=\emptyset$ のときは $\lambda/\mu=\lambda/\emptyset$ を単に λ と書く. λ/μ はしばしば対応する Young 図形 $D(\lambda/\mu)=\left\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \,\middle|\, \mu_i<j\le\lambda_i\ (1\le i\le p)\right\}$ と同一視される. ここで $i>q$ のとき $\mu_i=0$ とする. $|\lambda/\mu|=|\lambda|-|\mu|$ とおく. $(i,j)\in D(\lambda/\mu)$ が λ/μ の角であるとは $(i,j+1)\notin D(\lambda/\mu)$ かつ $(i+1,j)\notin D(\lambda/\mu)$ を満たすときを言う. λ/μ の角全体のなす集合を $\mathrm{Cor}(\lambda/\mu)$ と書く.

対応する Young 図形が $D(\lambda/\mu)$ の転置 (主対角線に関する折り返し) であるような分割を λ/μ の転置といい, λ'/μ', $\lambda'=(\lambda'_1,\ldots,\lambda'_{p'})$, $\mu'=(\mu'_1,\ldots,\mu'_{q'})$ と書く. $p'=\lambda_1$, $q'=\mu_1$ に注意する.

Young 図形 $D(\lambda/\mu)$ の各 (i,j) 成分に文字 $t_{i,j}$ を書きこんだもの $(t_{i,j})_{(i,j)\in D(\lambda/\mu)}$ を, 型が λ/μ の Young 盤という. 型が文脈から明らかな場合, $(t_{i,j})_{(i,j)\in D(\lambda/\mu)}$ は単に $(t_{i,j})$ とも書かれる. 型が λ/μ でかつ $t_{i,j}\in X$ $((i,j)\in D(\lambda/\mu))$ であるような Young 盤全体のなす集合を $T(\lambda/\mu,X)$ と書く. 自然数を成分とする Young 盤 $(m_{i,j})\in T(\lambda/\mu,\mathbb{N})$ が, $m_{i,j}<m_{i+1,j}$, $m_{i,j}\le m_{i,j+1}$ $((i,j)\in D(\lambda/\mu))$ を満たすとき, $(m_{i,j})$ を型が λ/μ の半標準 Young 盤という. 型が λ/μ の半標準 Young 盤全体のなす集合を $\mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)$ と書く. $\mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)$ は可算無限集合であり, 今回導入する Schur 多重ゼータ関数は半標準 Young 盤に渡る和として定義される.

2.2 定義

$\boldsymbol{s}=(s_{i,j})\in T(\lambda/\mu,\mathbb{C})$ に対して, 型が λ/μ の Schur 多重ゼータ関数を次で定義する.

$$\zeta(\boldsymbol{s})=\zeta_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{s})=\sum_{(m_{i,j})\in\mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)}\prod_{(i,j)\in D(\lambda/\mu)}\frac{1}{m_{i,j}^{s_{i,j}}}.$$

この級数は, $\boldsymbol{s}\in W_{\lambda/\mu}$ のとき絶対収束することが示される ([NPY, Lemma 2.1]). ここで

$$W_{\lambda/\mu}=\left\{\boldsymbol{s}=(s_{i,j})\in T(\lambda/\mu,\mathbb{C})\,\middle|\,\begin{array}{l}\mathrm{Re}(s_{i,j})\ge 1\ ((i,j)\notin C(\lambda/\mu))\\ \mathrm{Re}(s_{i,j})>1\ ((i,j)\in C(\lambda/\mu))\end{array}\right\}$$

である. $\lambda=\emptyset$ のときは, 形式的に $\zeta_\emptyset=1$ と定義する. この Schur 多重ゼータ関数は, 等号なし, 等号付き多重ゼータ関数を次の意味で補間する:

$$\zeta(s_1,\ldots,s_n)=\zeta\left(\begin{array}{|c|}\hline s_1\\\hline \vdots\\\hline s_n\\\hline\end{array}\right),\quad \zeta^\star(s_1,\ldots,s_n)=\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline s_1&\cdots&s_n\\\hline\end{array}\right). \tag{2.1}$$

Schur 多重ゼータ関数における「型」は多重ゼータ関数における「深さ」に対応する.

注意 2.1. 簡単にわかるように, この Schur 多重ゼータ関数は等号なし, 等号付き多重ゼータ関数の線形結合でそれぞれ書ける. 例えば $\lambda=(2,1)$ のときは以下の通り.

$$\begin{aligned}\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline s_{1,1}&s_{1,2}\\\hline s_{2,1}&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\right)&=\sum_{\substack{m_{1,1}\le m_{1,2}\\ \wedge\\ m_{2,1}}}\frac{1}{m_{1,1}^{s_{1,1}}m_{1,2}^{s_{1,2}}m_{2,1}^{s_{2,1}}}\\&=\zeta(s_{1,1},s_{1,2},s_{2,1})+\zeta(s_{1,1},s_{2,1},s_{1,2})+\zeta(s_{1,1},s_{1,2}+s_{2,1})+\zeta(s_{1,1}+s_{1,2},s_{2,1})\\&=\zeta^\star(s_{1,1},s_{1,2},s_{2,1})+\zeta^\star(s_{1,1},s_{2,1},s_{1,2})-\zeta^\star(s_{1,1},s_{1,2}+s_{2,1})-\zeta^\star(s_{1,1}+s_{2,1},s_{1,2}).\end{aligned}$$

2.3 対称関数の類似として

ここで Schur 多重ゼータ関数と対称関数の関係について説明する．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ を変数とする．次数有限の形式的べき級数 $f = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{Q}[\![x_1, x_2, \ldots]\!]$ で変数の置換で不変であるものを対称関数と言う．例えば，$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$e_n = e_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_n} x_{m_1} \cdots x_{m_n}, \quad h_n = h_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_n} x_{m_1} \cdots x_{m_n}$$

で定義される基本対称関数，完全対称関数は (n 次の) 対称関数である．また，分割 λ/μ に対して次で定義される Schur 関数[1] も ($|\lambda/\mu|$ 次の) 対称関数である．

$$s_{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x}) = \sum_{(m_{i,j}) \in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda/\mu)} x_{m_{i,j}}.$$

これは上記の基本対称関数，完全対称関数の共通の一般化である．実際，$s_{(1^n)} = e_n$，$s_{(n)} = h_n$ が成り立つ．定義から明らかに，Schur 多重ゼータ関数は Schur 関数の類似物である．また，(2.1) の意味で，等号なし，等号付き多重ゼータ関数はそれぞれ基本対称関数，完全対称関数の類似物であるといえる．さらに，

$$p_n = p_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n$$

で定義される冪和対称関数も (n 次の) 対称関数であるが，これは (変数を n 倍した) Riemann ゼータ関数の類似物であるといえる．

2.4 特別な場合

$s \in \mathbb{C}$ に対して，(i,j) 成分がすべて s である Young 盤を $\{s\}^{\lambda/\mu} \in T(\lambda/\mu, \mathbb{C})$ と書く．$\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき，$\zeta(\{s\}^{\lambda/\mu})$ は Schur 関数の特殊化として実現できる．すなわち，

$$\zeta(\{s\}^{\lambda/\mu}) = s_{\lambda/\mu}(1^{-s}, 2^{-s}, \ldots)$$

が成り立つ (一般の $\boldsymbol{s} \in W_{\lambda/\mu}$ に対しては，$\zeta(\boldsymbol{s})$ は Schur 関数の特殊化としては書けないことに注意する)．このような見方によって例えば次が分かる．

命題 2.2. $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して，$\zeta(\{s\}^{\lambda/\mu})$ は $\zeta(s), \zeta(2s), \zeta(3s), \ldots$ の有理数係数の多項式で書ける．より詳しく，その多項式に出てくる単項式を $\prod_{i=1}^{r} c_i \zeta(\nu_i s)$，$c_i \in \mathbb{Q}$，$\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_r$ と書けば，$(\nu_1, \ldots, \nu_r) \vdash |\lambda/\mu|$ である．

証明. $s_{\lambda/\mu}(\boldsymbol{x})$ は $|\lambda/\mu|$ 次の対称関数なので，$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_r) \vdash |\lambda/\mu|$ なる分割 ν に対して定義される $p_\nu(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{r} p_{\nu_i}(\boldsymbol{x})$ の有理数係数の線形結合で書ける ([Ma])．よって，$\zeta(\{s\}^{\lambda/\mu}) = s_{\lambda/\mu}(1^{-s}, 2^{-s}, \ldots)$ は $p_\nu(1^{-s}, 2^{-s}, \ldots) = \prod_{i=1}^{r} p_{\nu_i}(1^{-s}, 2^{-s}, \ldots) = \prod_{i=1}^{r} \zeta(\nu_i s)$ の有理数係数の線形結合で書ける． □

系 2.3. $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\zeta(\{2k\}^{\lambda/\mu}) \in \mathbb{Q}\pi^{2k|\lambda/\mu|}$.

証明. $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} \pi^{2k} \in \mathbb{Q}\pi^{2k}$ (ただし $B_{2k} \in \mathbb{Q}$ は Bernoulli 数) なので，これは命題 2.2 から直ちに従う． □

[1]通常 $\mu = \emptyset$ のときを Schur 関数といい，$\mu \neq \emptyset$ のときは歪 Schur 関数といわれる．

例 2.4. $\lambda/\mu = (3,2)/(1)$ のとき,

$$s_{(3,2)/(1)} = -\frac{1}{4}p_4 - \frac{1}{3}p_3p_1 + \frac{1}{8}p_2^2 + \frac{1}{4}p_2p_1^2 + \frac{5}{24}p_1^4$$

なので, 特殊化 $\boldsymbol{x} = (1^{-s}, 2^{-s}, \ldots)$ によって

$$\begin{aligned}\zeta\left(\begin{array}{ccc} & \boxed{s} & \boxed{s} \\ \boxed{s} & \boxed{s} & \end{array}\right) &= s_{(3,2)/(1)}(1^{-s}, 2^{-s}, \ldots) \\ &= -\frac{1}{4}\zeta(4s) - \frac{1}{3}\zeta(3s)\zeta(s) + \frac{1}{8}\zeta(2s)^2 + \frac{1}{4}\zeta(2s)\zeta(s)^2 + \frac{5}{24}\zeta(s)^4\end{aligned}$$

が得られる. これより,

$$\zeta\left(\begin{array}{ccc} & \boxed{2} & \boxed{2} \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \end{array}\right) = \frac{61}{362880}\pi^8,$$

$$\zeta\left(\begin{array}{ccc} & \boxed{4} & \boxed{4} \\ \boxed{4} & \boxed{4} & \end{array}\right) = \frac{667}{631547280000}\pi^{16},$$

$$\zeta\left(\begin{array}{ccc} & \boxed{6} & \boxed{6} \\ \boxed{6} & \boxed{6} & \end{array}\right) = \frac{9077644}{43268479706519254687\,5}\pi^{24}.$$

$\zeta(\{2k\}^{\lambda/\mu})$ の有理数部分には, 特別な場合に以下のような組合せ論的意味がある. 型が λ/μ の標準 Young 盤の個数を $f^{\lambda/\mu}$ と書く. ここで半標準 Young 盤 $(m_{i,j}) \in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)$ が標準 Young 盤であるとは, $\{m_{i,j} \mid (i,j) \in D(\lambda/\mu)\} = \{1, 2, \ldots, |\lambda/\mu|\}$ を満たすときを言う. Stanley [S] は以下が成立することを示した: $|\lambda/\mu| = n$ とする. $\lambda_1 \leq m$ を満たす任意の整数 m に対して,

$$\zeta(\{2\}^{\lambda/\mu}) = \frac{f^{(2\lambda'+\gamma_m+\delta_{m-1})/(2\mu'+\delta_{m-1})}}{(2n+m)!}\pi^{2n},$$

$$\zeta(\{4\}^{\lambda/\mu}) = \frac{2^{m+2n}f^{(4\lambda'+2\gamma_m+3\delta_{m-1})/(4\mu'+3\delta_{m-1})}}{(4n+2m)!}\pi^{4n},$$

$$\zeta(\{6\}^{\lambda/\mu}) = \frac{6^m 2^{6n}f^{(6\lambda'+3\gamma_m+5\delta_{m-1})/(6\mu'+5\delta_{m-1})}}{(6n+3m)!}\pi^{6n}.$$

ここで $\gamma_m = (1^m)$, $\delta_m = (m, m-1, \ldots, 2, 1)$ である. 例えば, 例 2.4 で考えた $\lambda/\mu = (3,2)/(1)$ (このとき $n = 4$ である) のとき, $m = \lambda_1 = 3$ として上の公式を用いれば,

$$\zeta\left(\begin{array}{ccc} & \boxed{2} & \boxed{2} \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \end{array}\right) = \frac{f^{(7,6,3)/(4,1)}}{11!}\pi^8,$$

$$\zeta\left(\begin{array}{ccc} & \boxed{4} & \boxed{4} \\ \boxed{4} & \boxed{4} & \end{array}\right) = \frac{2^{11}f^{(16,13,6)/(10,3)}}{22!}\pi^{16},$$

$$\zeta\left(\begin{array}{ccc} & \boxed{6} & \boxed{6} \\ \boxed{6} & \boxed{6} & \end{array}\right) = \frac{6^3 2^{24}f^{(25,20,9)/(16,5)}}{33!}\pi^{24}$$

を得る. これと上の表示とを合わせれば,

$$f^{(7,6,3)/(4,1)} = 6710, \quad f^{(16,13,6)/(10,3)} = 579637674, \quad f^{(25,20,9)/(16,5)} = 50270540048960$$

が得られる.

3 Schur 多重ゼータ関数の関係式

この節では Schur 多重ゼータ関数の関係式で, Schur 関数から来るものについて紹介する. $(i,j) \in D(\lambda/\mu)$ に対して, $c(i,j) = j - i$ とする ($c(i,j)$ を λ/μ の (i,j)-内容という). また,

$$W^{\mathrm{diag}}_{\lambda/\mu} = \left\{ (s_{i,j}) \in W_{\lambda/\mu} \;\middle|\; c(i,j) = c(i',j') \text{ のとき } s_{i,j} = s_{i',j'} \right\}$$

と定義する. これは各対角線上で成分がすべて等しい Young 盤 $\boldsymbol{s} \in W_{\lambda/\mu}$ 全体のなす集合である. $\boldsymbol{s} = (s_{i,j}) \in W^{\mathrm{diag}}_{\lambda/\mu}$ のとき $s_{i,j} = s_{c(i,j)}$ とも書く. 例えば $\boldsymbol{s} = (s_{i,j}) \in W^{\mathrm{diag}}_{(4,3,2)}$ に対して,

$$\boldsymbol{s} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & s_{1,4} \\ \hline s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} s_{3,1} & s_{3,2} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline s_{-1} & s_0 & s_1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} s_{-2} & s_{-1} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} .$$

以下で Schur 多重ゼータ関数の関係式をいくつか具体的に紹介するが, これらは $W_{\lambda/\mu}$ ではなく, すべて $W^{\mathrm{diag}}_{\lambda/\mu}$ において成立する関係式であることに注意する.

3.1 Jacobi-Trudi 公式

分割 λ/μ ($\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$) の転置を λ'/μ' ($\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p'})$, $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_{q'})$) と書く. 次の公式を Schur 関数 $s_{\lambda/\mu}$ に対する Jacobi-Trudi 公式という.

$$s_{\lambda/\mu} = \det \left[h_{\lambda_i - \mu_j - i + j} \right]_{1 \le i,j \le p}, \quad s_{\lambda/\mu} = \det \left[e_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j} \right]_{1 \le i,j \le p'} .$$

ただし $h_0 = e_0 = 1$, $h_n = e_n = 0$ $(n < 0)$ とする. 例えば $\lambda/\mu = (4,3,2)/(2,1)$ のとき,

$$s_{(4,3,2)/(2,1)} = \begin{vmatrix} h_2 & h_4 & h_6 \\ 1 & h_2 & h_4 \\ 0 & 1 & h_2 \end{vmatrix}, \quad s_{(4,3,2)/(2,1)} = \begin{vmatrix} e_1 & e_3 & e_5 & e_6 \\ 1 & e_2 & e_4 & e_5 \\ 0 & 1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 & e_1 \end{vmatrix} .$$

この公式の類似として, Schur 多重ゼータ関数も Jacobi-Trudi 公式を満たすことが示される (等号付き多重ゼータ関数が完全対称関数の, 等号なし多重ゼータ関数が基本対称関数の類似物であったことに注意する). なお, 主張に出てくるいくつかの仮定は右辺の行列成分として出てくる多重ゼータ関数の収束を保証するためのものであり, 本質的ではない.

定理 3.1 ([NPY, $\mu = \emptyset$ のとき Theorem 1.1, μ が一般の場合は Theorem 4.3]). λ, μ を上の通りとする. $\boldsymbol{s} = (s_{i,j})_{(i,j) \in D(\lambda/\mu)} = (s_{c(u)})_{u \in D(\lambda/\mu)} \in W^{\mathrm{diag}}_{\lambda/\mu}$ とする.

(1) 任意の $1 \le i \le p$ に対して $\mathrm{Re}(s_{i,\lambda_i}) > 1$ を仮定する. このとき,

$$\zeta(\boldsymbol{s}) = \det \left[\zeta^{\star}(s_{\mu_j - j + 1}, s_{\mu_j - j + 2}, \dots, s_{\mu_j - j + (\lambda_i - \mu_j - i + j)}) \right]_{1 \le i,j \le p} .$$

ここで $\lambda_i - \mu_j - i + j = 0$ のとき $\zeta^{\star}(\cdots) = 1$, $\lambda_i - \mu_j - i + j < 0$ のとき $\zeta^{\star}(\cdots) = 0$ とする.

(2) 任意の $1 \le i \le p'$ に対して $\mathrm{Re}(s_{\lambda'_i, i}) > 1$ を仮定する. このとき,

$$\zeta(\boldsymbol{s}) = \det \left[\zeta(s_{-\mu'_j + j - 1}, s_{-\mu'_j + j - 2}, \dots, s_{-\mu'_j + j - (\lambda'_i - \mu'_j - i + j)}) \right]_{1 \le i,j \le p'} .$$

ここで $\lambda'_i - \mu'_j - i + j = 0$ のとき $\zeta(\cdots) = 1$, $\lambda'_i - \mu'_j - i + j < 0$ のとき $\zeta(\cdots) = 0$ とする.

$\zeta(\boldsymbol{s})$ に関するこれら2つの行列式表示をつなぐことで, 等号なし, 等号付き多重ゼータ関数の間の (線形ではない) 代数関係式が得られる.

例 3.1. $\lambda/\mu = (4,3,2)/(2,1)$ のとき,

$$\zeta\left(\begin{ytableau} \none & \none & s_2 & s_3 \\ \none & s_0 & s_1 \\ s_{-2} & s_{-1} \end{ytableau}\right) = \begin{vmatrix} \zeta^\star(s_2,s_3) & \zeta^\star(s_0,s_1,s_2,s_3) & \zeta^\star(s_{-2},s_{-1},s_0,s_1,s_2,s_3) \\ 1 & \zeta^\star(s_0,s_1) & \zeta^\star(s_{-2},s_{-1},s_0,s_1) \\ 0 & 1 & \zeta^\star(s_{-2},s_{-1}) \end{vmatrix},$$

$$\zeta\left(\begin{ytableau} \none & \none & s_2 & s_3 \\ \none & s_0 & s_1 \\ s_{-2} & s_{-1} \end{ytableau}\right) = \begin{vmatrix} \zeta(s_{-2}) & \zeta(s_0,s_{-1},s_{-2}) & \zeta(s_2,s_1,s_0,s_{-1},s_{-2}) & \zeta(s_3,s_2,s_1,s_0,s_{-1},s_{-2}) \\ 1 & \zeta(s_0,s_{-1}) & \zeta(s_2,s_1,s_0,s_{-1}) & \zeta(s_3,s_2,s_1,s_0,s_{-1}) \\ 0 & 1 & \zeta(s_2,s_1) & \zeta(s_3,s_2,s_1) \\ 0 & 0 & 1 & \zeta(s_3) \end{vmatrix}.$$

証明について少しだけコメントする (詳しくは [NPY] を参照のこと). [NPY] において, 定理 3.1 の証明は2通り与えられている. 1つ目は, いわゆる Lindström-Gessel-Viennot の補題の証明の類似として証明する: $\boldsymbol{s} \in W^{\mathrm{diag}}_{\lambda/\mu}$ のとき, $\zeta(\boldsymbol{s})$ は格子点上のある種の道の重み付きの和とみなすことができる. このような重みの和が行列式で書ける, というのが Lindström-Gessel-Viennot の補題の主張であり, その証明をまねる (ただし [NPY] では $\mu = \emptyset$ の場合にしか考察されていないが, μ が一般の場合に議論を拡張することは容易である). 2つ目は, $\zeta(\boldsymbol{s})$ を Nakagawa-Noumi-Shirakawa-Yamada [NNSY] によって研究された Macdonald による Schur 関数の第9変奏の特殊化と見なす方法である ($\boldsymbol{s} \in W^{\mathrm{diag}}_{\lambda/\mu}$ のとき, それが可能である). この第9変奏は Jacobi-Trudi 公式を満たすことが知られているので, その系として主張が得られる.

注意 3.2. $\boldsymbol{s} \notin W^{\mathrm{diag}}_{\lambda/\mu}$ の場合, $\zeta(\boldsymbol{s})$ に対する Jacobi-Trudi 公式は得られていないが, (特定の型の場合に) それらしいものを得ることは可能である. 例えば $\lambda = (2,2)$ のとき,

$$\begin{aligned} \zeta\left(\begin{ytableau} a & b \\ c & d \end{ytableau}\right) &= \begin{vmatrix} \zeta^\star(a,b) & \zeta^\star(c,d,b) \\ \zeta^\star(a) & \zeta^\star(c,d) \end{vmatrix} \\ &\quad + \zeta^\star(c,d,b,a) - \zeta^\star(c,a,b,d) + \zeta^\star(c,a,b+d) - \zeta^\star(c,d,b+a), \\ \zeta\left(\begin{ytableau} a & b \\ c & d \end{ytableau}\right) &= \begin{vmatrix} \zeta(a,c) & \zeta(b,d,c) \\ \zeta(a) & \zeta(b,d) \end{vmatrix} \\ &\quad + \zeta(b,d,c,a) - \zeta(b,a,c,d) + \zeta(b,d,c+a) - \zeta(b,a,c+d) \end{aligned}$$

が成り立つ. ”おつり” の部分である $\zeta^\star(c,d,b,a) - \zeta^\star(c,a,b,d) + \zeta^\star(c,a,b+d) - \zeta^\star(c,d,b+a)$ および $\zeta(b,d,c,a) - \zeta(b,a,c,d) + \zeta(b,d,c+a) - \zeta(b,a,c+d)$ は $\boldsymbol{s} \in W^{\mathrm{diag}}_{\lambda/\mu}$ のとき (つまり $a = d$ のとき) 消えることに注意する. 一般の型の場合に, この ”おつり” の部分を (組合せ論的な言葉で) 明示的に記述することはできないだろうか.

3.2 Giambelli 公式

Schur 関数の Giambelli 公式を紹介するため, まずは分割の Frobenius 表記について述べる. λ を分割とし, t を λ の対角成分の個数とする. $p_1,\ldots,p_t$ および $q_1,\ldots,q_t$ を $p_i = \lambda_i - i + 1$ および $q_i = \lambda'_i - i$ $(1 \le i \le t)$ で定義する. このとき, $\lambda = (p_1-1,\ldots,p_t-1\,|\,q_1,\ldots,q_t)$ を分割 λ の Frobenius 表記という. $p_1 > p_2 > \cdots > p_t > 0$ かつ $q_1 > q_2 > \cdots > q_t \ge 0$ に注意する. 次の公式を Schur 関数に対する Giambelli 公式という.

$$s_\lambda = \det\left[s_{(p_i,1^{q_j})}\right]_{1\le i,j\le t}.$$

例えば $\lambda=(4,3,3,2)=(3,1,0\,|\,3,2,0)$ のとき,

$$s_\lambda=\begin{vmatrix} s_{(4,1^3)} & s_{(4,1^2)} & s_{(4,1^0)} \\ s_{(2,1^3)} & s_{(2,1^2)} & s_{(2,1^0)} \\ s_{(1,1^3)} & s_{(1,1^2)} & s_{(1,1^0)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} s_{\ydiagram{4,1,1,1}} & s_{\ydiagram{4,1,1}} & s_{\ydiagram{4}} \\ s_{\ydiagram{2,1,1,1}} & s_{\ydiagram{2,1,1}} & s_{\ydiagram{2}} \\ s_{\ydiagram{1,1,1,1}} & s_{\ydiagram{1,1,1}} & s_{\ydiagram{1}} \end{vmatrix}.$$

この公式の類似として, Schur 多重ゼータ関数も Giambelli 公式を満たすことが示される.

定理 3.2 ([NPY, Theorem 4.5])**.** λ を上の通りとする. $\boldsymbol{s}=(s_{i,j})_{(i,j)\in D(\lambda)}=(s_{c(u)})_{u\in D(\lambda)}\in W_\lambda^{\mathrm{diag}}$ とする. 任意の $1\le i\le t$ に対して $\mathrm{Re}(s_{i,\lambda_i})=\mathrm{Re}(s_{p_i-1})>1$ および $\mathrm{Re}(s_{\lambda'_i,i})=\mathrm{Re}(s_{-q_i})>1$ を仮定する. このとき,

$$\zeta(\boldsymbol{s})=\det\left[\zeta_{(p_i,1^{q_j})}(\boldsymbol{s}_{i,j})\right]_{1\le i,j\le t}.$$

ここで,

$$\boldsymbol{s}_{i,j}=\begin{ytableau} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{p_i-1} \\ s_{-1} \\ \vdots \\ s_{-q_j} \end{ytableau}\in W_{(p_i,1^{q_j})}^{\mathrm{diag}}.$$

例 3.3. $\lambda=(4,3,3,2)=(3,1,0\,|\,3,2,0)$ のとき,

$$\zeta\left(\begin{ytableau} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_{-1} & s_0 & s_1 \\ s_{-2} & s_{-1} & s_0 \\ s_{-3} & s_{-2} \end{ytableau}\right)=\begin{vmatrix} \zeta\left(\begin{ytableau} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_{-1} \\ s_{-2} \\ s_{-3} \end{ytableau}\right) & \zeta\left(\begin{ytableau} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_{-1} \\ s_{-2} \end{ytableau}\right) & \zeta\left(\begin{ytableau} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{ytableau}\right) \\ \zeta\left(\begin{ytableau} s_0 & s_1 \\ s_{-1} \\ s_{-2} \\ s_{-3} \end{ytableau}\right) & \zeta\left(\begin{ytableau} s_0 & s_1 \\ s_{-1} \\ s_{-2} \end{ytableau}\right) & \zeta\left(\begin{ytableau} s_0 & s_1 \end{ytableau}\right) \\ \zeta\left(\begin{ytableau} s_0 \\ s_{-1} \\ s_{-2} \\ s_{-3} \end{ytableau}\right) & \zeta\left(\begin{ytableau} s_0 \\ s_{-1} \\ s_{-2} \end{ytableau}\right) & \zeta\left(\begin{ytableau} s_0 \end{ytableau}\right) \end{vmatrix}.$$

この定理の証明は, Schur 多重ゼータ関数を Macdonald による Schur 関数の第 9 変奏の特殊化と見なすことで得られる. 第 9 変奏に対する Giambelli 公式は [NNSY] を参照のこと.

3.3 双対 Cauchy 公式

$p,q\in\mathbb{N}$ とし, $r=p+q$ とおく. 分割 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\subset(q^p)$ に対して, λ の補分割 λ^* を $\lambda^*=(p-\lambda'_q,\ldots,p-\lambda'_1)\subset(p^q)$ で定義する. 例えば $p=5$, $q=7$, $\lambda=(6,4,4,3,1)$ のとき, $\lambda^*=(5,4,4,2,1,1,0)$ である.

(有限) 変数 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ および $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_q)$ に対して, 次の公式を Schur 関数 (この場合は多項式だが) に対する双対 Cauchy 公式という.

$$\sum_{\lambda\subset(q^p)} s_\lambda(\boldsymbol{x})s_{\lambda^*}(\boldsymbol{y})=\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{q}(x_i+y_j).$$

この公式の類似として, Schur 多重ゼータ関数も双対 Cauchy 公式を満たすことが示される.

定理 3.3 ([NPY, Theorem 4.8]). p,q,r を上の通りとする. $\boldsymbol{s}=(s_{i,j})_{(i,j)\in D((q^p))}=(s_{c(u)})_{u\in D((q^p))}\in W^{\mathrm{diag}}_{(q^p)}$, $\boldsymbol{t}=(t_{i,j})_{(i,j)\in D((p^q))}=(t_{c(u)})_{u\in D((p^q))}\in W^{\mathrm{diag}}_{(p^q)}$ とする. 任意の $i\in\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Re}(s_i)\geq 2$ および $\mathrm{Re}(t_i)\geq 2$ を仮定する. このとき,

$$\sum_{\lambda\subset(q^p)}(-1)^{|\lambda|}\zeta_\lambda\left(\boldsymbol{s}|_\lambda\right)\zeta_{\lambda^*}\left(\boldsymbol{t}|_{\lambda^*}\right)$$

$$=\det\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & \zeta^\star(s_{1-p}) & \zeta^\star(s_{1-p},s_{2-p}) & \cdots & \zeta^\star(s_{1-p},\ldots,s_0) & \cdots & \zeta^\star(s_{1-p},\ldots,s_{r-1-p})\\
0 & 1 & \zeta^\star(s_{2-p}) & \cdots & \zeta^\star(s_{2-p},\ldots,s_0) & \cdots & \zeta^\star(s_{2-p},\ldots,s_{r-1-p})\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 1 & \zeta^\star(s_0) & \cdots & \zeta^\star(s_0,\ldots,s_{r-1-p})\\
\hline
1 & \zeta^\star(t_{1-q}) & \zeta^\star(t_{1-q},t_{2-q}) & \cdots & \zeta^\star(t_{1-q},\ldots,t_0) & \cdots & \zeta^\star(t_{1-q},\ldots,t_{r-1-q})\\
0 & 1 & \zeta^\star(t_{2-q}) & \cdots & \zeta^\star(t_{2-q},\ldots,t_0) & \cdots & \zeta^\star(t_{2-q},\ldots,t_{r-1-q})\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 1 & \zeta^\star(t_0) & \cdots & \zeta^\star(t_0,\ldots,t_{r-1-q})
\end{array}\right].$$

ここで $\boldsymbol{s}|_\lambda\in W^{\mathrm{diag}}_\lambda$, $\boldsymbol{t}|_{\lambda^*}\in W^{\mathrm{diag}}_{\lambda^*}$ は $\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}$ をそれぞれ λ, λ^* に制限して得られる Young 盤である.

例 3.4. $p=2$, $q=3$ のとき, 双対 Cauchy 公式の左辺は次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline s_0&s_1&s_2\\\hline s_{-1}&s_0&s_1\\\hline\end{array}\right)
-\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline s_0&s_1&s_2\\\hline s_{-1}&s_0\\\cline{1-2}\end{array}\right)\zeta\left(\begin{array}{|c|}\hline t_0\\\hline\end{array}\right)
+\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline s_0&s_1&s_2\\\hline s_{-1}\\\cline{1-1}\end{array}\right)\zeta\left(\begin{array}{|c|}\hline t_0\\\hline t_{-1}\\\hline\end{array}\right)\\
&-\zeta\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline s_0&s_1&s_2\\\hline\end{array}\right)\zeta\left(\begin{array}{|c|}\hline t_0\\\hline t_{-1}\\\hline t_{-2}\\\hline\end{array}\right)
+\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline s_0&s_1\\\hline s_{-1}&s_0\\\hline\end{array}\right)\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline t_0&t_1\\\hline\end{array}\right)
-\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline s_0&s_1\\\hline s_{-1}\\\cline{1-1}\end{array}\right)\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline t_0&t_1\\\hline t_{-1}\\\cline{1-1}\end{array}\right)\\
&+\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline s_0&s_1\\\hline\end{array}\right)\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline t_0&t_1\\\hline t_{-1}\\\cline{1-1} t_{-2}\\\cline{1-1}\end{array}\right)
+\zeta\left(\begin{array}{|c|}\hline s_0\\\hline s_{-1}\\\hline\end{array}\right)\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline t_0&t_1\\\hline t_{-1}&t_0\\\hline\end{array}\right)
-\zeta\left(\begin{array}{|c|}\hline s_0\\\hline\end{array}\right)\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline t_0&t_1\\\hline t_{-1}&t_0\\\hline t_{-2}\\\cline{1-1}\end{array}\right)
+\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline t_0&t_1\\\hline t_{-1}&t_0\\\hline t_{-2}&t_{-1}\\\hline\end{array}\right).
\end{aligned}$$

一方で右辺は次のようになる.

$$\det\left[\begin{array}{ccccc}
1 & \zeta^\star(s_{-1}) & \zeta^\star(s_{-1},s_0) & \zeta^\star(s_{-1},s_0,s_1) & \zeta^\star(s_{-1},s_0,s_1,s_2)\\
0 & 1 & \zeta^\star(s_0) & \zeta^\star(s_0,s_1) & \zeta^\star(s_0,s_1,s_2)\\
\hline
1 & \zeta^\star(t_{-2}) & \zeta^\star(t_{-2},t_{-1}) & \zeta^\star(t_{-2},t_{-1},t_0) & \zeta^\star(t_{-2},t_{-1},t_0,t_1)\\
0 & 1 & \zeta^\star(t_{-1}) & \zeta^\star(t_{-1},t_0) & \zeta^\star(t_{-1},t_0,t_1)\\
0 & 0 & 1 & \zeta^\star(t_0) & \zeta^\star(t_0,t_1)
\end{array}\right].$$

この定理の証明も, Schur 多重ゼータ関数を Macdonald による Schur 関数の第 9 変奏の特殊化と見なすことで得られる. 第 9 変奏に対する双対 Cauchy 公式は [NNSY] を参照のこと. ただし [NNSY] で得られた双対 Cauchy 公式の右辺を等号付き多重ゼータ関数で書きなおすところは若干の議論が必要である.

4 Schur 多重ゼータ関数に対する 1-3 公式

Schur 多重ゼータ値 (= Schur 多重ゼータ関数の正の整数点での値) が具体的にわかるか, という問題は, 等号なし, 等号付き多重ゼータ関数の場合同様興味深い問題である. この節では, Schur 多重ゼータ関数に対するいわゆる 1-3 公式について, 結果のみ紹介する. ここで 1-3 公式といったら 1 と 3 が交互に並んだインデックスに対する多重ゼータ値の公式を意味するものとする.

例えば等号なし多重ゼータ関数の場合, 以下が知られている.

$$\zeta(\{1,3\}^n)=\frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!}=\frac{1}{4^n}\zeta(\{4\}^n), \tag{4.1}$$

$$\zeta(3,\{1,3\}^n)=\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{4}\right)^k\zeta(4k+3)\zeta(\{1,3\}^{n-k}). \tag{4.2}$$

ここで $k_1,\dots,k_r\in\mathbb{N}$ に対して $\{k_1,\dots,k_r\}^n$ は $k_1,\dots,k_r$ の n 回反復を表すものとする. (4.1) は [BBB] において, (4.2) は [BB] においてそれぞれ導かれた. また, これらの等号付き多重ゼータ関数版については [Mu] を参照せよ.

以下, 「リボン型」と「階段型」という特別な型の場合に, Schur 多重ゼータ関数の 1-3 公式を紹介する. ただし Schur 多重ゼータ関数の場合, インデックス (Young 盤) は 2 次元的なので, 1-3 公式といったら 1 と 3 が縦にも横にも交互に並んだインデックス (Young 盤) に対する Schur 多重ゼータ値の公式を意味するものとする.

4.1 リボン型の場合

分割の組 λ/μ は, 連結でかつ 2×2 ブロックを含まないときリボンと呼ばれる. まずは, 以下の原始的リボン型の場合に 1-3 公式を紹介する. 以下, 自然数 m に対して $\delta_m=(m,m-1,\dots,2,1)$ と定義する (δ_m は § 2.4 で既出である). また, $\delta_0=\delta_{-1}=\emptyset$ とする.

定理 4.1 ([BY, Theorem 3.4]). $n\in\mathbb{N}$ に対して, $\sigma_n=(n,n,n-1,\dots,2,1)/\delta_{n-1}$, $\sigma'_n=(n+1,n,\dots,3,2)/\delta_{n-1}$ とする. このとき,

$$\zeta_{\sigma_n}\left(\ytableaushort{\none\none1,\none{\iddots}3,1{\iddots},3}\right)=\frac{1}{4^n}\zeta^{\star}(\{4\}^n),\quad \zeta_{\sigma'_n}\left(\ytableaushort{\none\none13,\none{\iddots}{\iddots},13}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\zeta^{\star}(\{4\}^k)\zeta(\{4\}^{n-k}). \tag{4.3}$$

特に, (系 2.3 より) これらは $\mathbb{Q}\pi^{4n}$ に値を持つ.

定理 4.2 ([BY, Theorem 3.5]). $n\in\mathbb{N}$ に対して, $\alpha_n=(n+1,n+1,n,n-1,\dots,3,2)/\delta_n$, $\beta_n=\delta_{n+1}/\delta_{n-1}$ とする. このとき,

$$\zeta_{\alpha_n}\left(\ytableaushort{\none\none\none1,\none\none{\iddots}3,\none1{\iddots},13}\right)=\frac{2}{4^n}\zeta(4n+1),\quad \zeta_{\beta_n}\left(\ytableaushort{\none\none13,\none{\iddots}3,1{\iddots},3}\right)=\frac{1}{4^n}\zeta(4n+3). \tag{4.4}$$

これらの公式は, (多重ゼータ関数の場合同様) 対応する母関数が Gauss の超幾何関数を用いて明示的に書けるので, それから係数比較を行うことで導かれる. ちなみに (どれも同じように見えるが) この中で一番難しいと思われるのは (4.4) の 1 つ目である. また (4.4) の 2 つ目は, (4.1), (4.2) および前節で述べた Jacobi-Trudi 公式を用いて証明することもできる.

定理 4.1, 4.2 から次が従う.

定理 4.3 ([BY, Theorem 3.1]). 任意のリボン型 1-3 Schur 多重ゼータ値は $\mathbb{Q}[\pi^4, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots]$ に値を持つ.

以下の例を見れば, 一般のリボン型の場合にどうやって定理の主張が確認できるかを想像することができる.

$$
\begin{aligned}
\zeta\left(\begin{ytableau} \none & \none & 3 \\ \none & \none & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{ytableau}\right)
&= \zeta\left(\begin{ytableau} \none & \none & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{ytableau}\right)\zeta\left(\begin{ytableau} 3 \end{ytableau}\right) - \zeta\left(\begin{ytableau} \none & \none & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{ytableau}\right) \\
&= \left[\zeta\left(\begin{ytableau} 3 \end{ytableau}\right)\zeta\left(\begin{ytableau} \none & 1 \\ 1 & 3 \end{ytableau}\right) - \zeta\left(\begin{ytableau} \none & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 \end{ytableau}\right)\right]\zeta\left(\begin{ytableau} 3 \end{ytableau}\right) \\
&\quad - \left[\zeta\left(\begin{ytableau} 3 \end{ytableau}\right)\zeta\left(\begin{ytableau} \none & 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{ytableau}\right) - \zeta\left(\begin{ytableau} \none & 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 \end{ytableau}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\zeta(3)^2\zeta(5) - \frac{7\pi^8}{129600}\zeta(3) + \frac{1}{16}\zeta(11).
\end{aligned}
$$

最後の等式で定理 4.1, 4.2 を用いた. また, 1 つ目, 2 つ目の等号では Schur 多重ゼータ関数に対する調和積公式 (Schur 多重ゼータ関数の積を Schur 多重ゼータ関数の和で書く公式, 詳しくは [BY, Lemma 2.2] を参照) を用いた. このように, 任意のリボン型 1-3 Schur 多重ゼータ値は, 最終的に原始的リボン型 1-3 Schur 多重ゼータ値の多項式で書けることがわかる (そしてこれが定理 4.1, 4.2 に出てくるリボンを「原始的」といっている理由である).

4.2 階段型の場合

$\delta_m = (m, m-1, \ldots, 2, 1)$ を階段という. 階段型 1-3 Schur 多重ゼータ値は, 以下に述べるように Riemann ゼータ関数の奇数点における特殊値の Hankel 行列式で書けることが示される.

定理 4.4 ([BY, Corollary 4.6]). (1) 奇数 $N \geq 1$ に対して,

$$
\zeta_{\delta_N}\left(\begin{ytableau} 3 & 1 & \cdots & 1 & 3 \\ 1 & \ddots & 1 & 3 \\ \vdots & 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 \end{ytableau}\right) = 4^{-\frac{1}{4}(N+1)(N-1)} \det\Big[\zeta\left(4(i+j)-5\right)\Big]_{1 \leq i,j \leq \frac{N+1}{2}}.
$$

(2) 偶数 $N \geq 2$ に対して,

$$
\zeta_{\delta_N}\left(\begin{ytableau} 1 & 3 & \cdots & \cdots & 1 & 3 \\ 3 & \ddots & \ddots & 1 & 3 \\ \vdots & \ddots & 1 & 3 \\ \vdots & 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 \end{ytableau}\right) = 4^{-\frac{1}{4}N^2} \det\Big[\zeta\left(4(i+j)-1\right)\Big]_{1 \leq i,j \leq \frac{N}{2}}.
$$

例 4.1.

$$\zeta\left(\begin{ytableau} 3 \end{ytableau}\right) = \left|\zeta(3)\right|, \qquad \zeta\left(\begin{ytableau} 1 & 3 \\ 3 \end{ytableau}\right) = \frac{1}{4}\left|\zeta(7)\right|,$$

$$\zeta\left(\begin{ytableau} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 \end{ytableau}\right) = \frac{1}{4^2}\begin{vmatrix} \zeta(3) & \zeta(7) \\ \zeta(7) & \zeta(11) \end{vmatrix}, \qquad \zeta\left(\begin{ytableau} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 \end{ytableau}\right) = \frac{1}{4^4}\begin{vmatrix} \zeta(7) & \zeta(11) \\ \zeta(11) & \zeta(15) \end{vmatrix},$$

$$\zeta\left(\begin{ytableau} 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 \end{ytableau}\right) = \frac{1}{4^6}\begin{vmatrix} \zeta(3) & \zeta(7) & \zeta(11) \\ \zeta(7) & \zeta(11) & \zeta(15) \\ \zeta(11) & \zeta(15) & \zeta(19) \end{vmatrix}, \quad \zeta\left(\begin{ytableau} 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 \end{ytableau}\right) = \frac{1}{4^9}\begin{vmatrix} \zeta(7) & \zeta(11) & \zeta(15) \\ \zeta(11) & \zeta(15) & \zeta(19) \\ \zeta(15) & \zeta(19) & \zeta(23) \end{vmatrix}.$$

これらの公式も (4.1), (4.2) および Jacobi-Trudi 公式を用いて証明される．ここでは簡単のために型が δ_N の場合のみを紹介したが, もう少し一般に型が δ_N/μ の場合にも 1-3 Schur 多重ゼータ値が同様の Hankel 行列式で書けることが示される (詳しくは [BY, Corollary 4.6] を参照).

5 おわりに

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, 重さが k の多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{Z}_k$ と表す．いわゆる Zagier の次元予想とは, 数列 $\{d_k\}_{k\geq 0}$ を $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ $(k \geq 3)$ と定義すると,

$$\dim \mathcal{Z}_k = d_k$$

であろうというものである．この予想を解決するためには, 当然多重ゼータ値の間の $\mathbb{Q}$ 上の線形関係式を "すべて" 見つける必要がある．これに対して, 正規化複シャッフル関係式など, 関係式をすべて含むであろう関係式族が現在も研究されている．

$(m, 1^n)$ の形をしたリボンを hook (鉤) という．また, hook を π 回転させたものを anti-hook という．Kaneko-Yamamoto は [KY] において, anti-hook 型の Schur 多重ゼータ値 [2] に対する反復積分表示を得た．それを用いて, 次を予想した．

予想 5.1 ([KY, Conjecture 4.3]). 多重ゼータ値のすべての線形関係式は anti-hooki 型の Schur 多重ゼータ値に関する級数表示と反復積分表示 (の分解) から導かれるであろう．

例えば, 型が $\lambda/\mu = (2,2)/(1)$ の anti-hook に対して, インデックス $\boldsymbol{k} = \begin{ytableau} \none & 1 \\ 1 & 2 \end{ytableau}$ の Schur 多重ゼータ値を考える．まずは定義 (級数表示) に出てくる「等号付き不等号」を「等号」と「等号なし不等号」に分解することで,

$$\begin{aligned} \zeta\left(\begin{ytableau} \none & 1 \\ 1 & 2 \end{ytableau}\right) &= \sum_{k \leq \begin{smallmatrix} m \\ \wedge \\ n \end{smallmatrix}} \frac{1}{kmn^2} = \sum_{k<m<n} + \sum_{k=m<n} + \sum_{m<k<n} + \sum_{m<k=n} \\ &= 2\zeta(1,1,2) + \zeta(2,2) + \zeta(1,3) \end{aligned}$$

を得る．一方で, Kaneko-Yamamoto によって得られた反復積分表示は,

$$\zeta\left(\begin{ytableau} \none & 1 \\ 1 & 2 \end{ytableau}\right) = \int_{\substack{x<y<z>w \\ 0<x,y,z,w<1}} \frac{dx}{1-x}\frac{dy}{1-y}\frac{dz}{z}\frac{dw}{1-w}$$

---

[2] 彼らの記号では $\zeta(\mathbf{k} \circledast \mathbf{l}^\star)$ であり, これを Schur 多重ゼータ値とは呼んでいない

であるが, 同様の考え方でこれは

$$\zeta\left(\begin{ytableau} \none & 1 \\ 1 & 2 \end{ytableau}\right) = \int_{\substack{w<x<y<z \\ 0<x,y,z,w<1}} + \int_{\substack{x<w<y<z \\ 0<x,y,z,w<1}} + \int_{\substack{x<y<w<z \\ 0<x,y,z,w<1}}$$
$$= 3\zeta(1,1,2)$$

と分解することができる. これらの表示をつなぐことで,

$$\zeta(2,2) + \zeta(1,3) = \zeta(1,1,2)$$

という多重ゼータ値の間の線形関係式が得られる, という寸法である.

思いがけず Schur 多重ゼータ値が出てきたが, もちろん型は anti-hook 以外にもたくさんあるので, 例えば型 (の族) を固定したときに, 対応する Schur 多重ゼータ値が多重ゼータ値の (線形) 関係式をどれほど知っているのか, という問題は興味深い問題ではないかと思われる.

最後に, [NPY, Theorem 6.2] において, Kaneko-Yamamoto によって得られた anti-hook 型 Schur 多重ゼータ値の反復積分表示は一般のリボン型 Schur 多重ゼータ値に拡張されることをコメントしておく. 例えば,

$$\zeta\left(\begin{ytableau} \none & \none & 1 \\ \none & 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{ytableau}\right) = \int_{\substack{t_1<t_2<t_3>t_4<t_5<t_6>t_7<t_8 \\ 0<t_1,\ldots,t_8<1}} \frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}\frac{dt_3}{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\frac{dt_5}{1-t_5}\frac{dt_6}{t_6}\frac{dt_7}{1-t_7}\frac{dt_8}{t_8}$$

といった感じである (一般の場合を明示的に書くことも可能だが, 煩雑になるためここでは避ける). また, この積分において変数変換 $s_i = 1 - t_{9-i}$ $(1 \le i \le 8)$ を実行すると, 右辺は

$$\int_{\substack{s_1<s_2>s_3<s_4<s_5>s_6<s_7<s_8 \\ 0<s_1,\ldots,s_8<1}} \frac{ds_1}{1-s_1}\frac{ds_2}{s_2}\frac{ds_3}{1-s_3}\frac{ds_4}{s_4}\frac{ds_5}{s_5}\frac{ds_6}{1-s_6}\frac{ds_7}{s_7}\frac{ds_8}{s_8} = \zeta\left(\begin{ytableau} 3 & 3 & 2 \end{ytableau}\right) = \zeta^{\star}(3,3,2)$$

と変形でき, 最終的に

$$\zeta\left(\begin{ytableau} \none & \none & 1 \\ \none & 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{ytableau}\right) = \zeta^{\star}(3,3,2).$$

という等号付き多重ゼータ値に関する "双対公式" を得ることができる. 等号付き多重ゼータ値の双対公式が何か, という問いは昔からあったが, まだはっきりとした結論はでていないと思われる. しかし, 反復積分表示における上記の変数変換を "双対" ということにすれば, 等号付き多重ゼータ値の双対は, リボン型の Schur 多重ゼータ値として実現することができる. ただし, 一般にはリボン型 Schur 多重ゼータ値の双対がリボン型 Schur 多重ゼータ値にはならない場合もあり, そのような場合として full height (= インデックスの成分がすべて 2 以上) ではない等号付き多重ゼータ値を含む. もちろんこの双対性は, 等号付き多重ゼータ値の場合に限らず, 一般のリボン型の Schur 多重ゼータ値の場合でも確認することができる. 例えば, 以下が成り立つ.

$$\zeta\left(\begin{ytableau} \none & \none & 2 \\ \none & 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{ytableau}\right) = \zeta\left(\begin{ytableau} 2 & 3 & 2 \\ 2 \end{ytableau}\right), \quad \zeta\left(\begin{ytableau} \none & \none & \none & 3 & 2 \\ \none & \none & \none & 1 \\ \none & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 \end{ytableau}\right) = \zeta\left(\begin{ytableau} \none & 3 & 2 & 3 & 3 \\ \none & 1 \\ 2 & 2 \end{ytableau}\right).$$

参考文献

[BB] D. Bowman and D. Bradley, Resolution of some open problems concerning multiple zeta evaluations of arbitrary depth, *Compositio Math.*, **139** (2003), no. 1, 85–100.

[BBB] J. Borwein, D. Bradley and D. Broadhurst, Combinatorial aspects of multiple zeta value, *Electron. J. Combin.*, **5** (1998).

[BY] H. Bachmann and Y. Yamasaki, Checkerboard style Schur multiple zeta values and odd single zeta values, to appear in *Math. Z.*, 2018.

[E] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol.*, **20** (1775) 140–186; Reprinted in: Opera Omnia, Ser. I, vol. 15, B.G. Teubner, Berlin, 1927, pp. 217–267.

[H] M. E. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.*, **152** (1992), no. 2, 275–290.

[KY] M. Kaneko and S. Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, preprint, 2016. arXiv:1605.03117.

[Ma] I. G. Macdonald, Schur functions: theme and variations, Sńinaire Lotharingien de Combinatoire (Saint-Nabor, 1992), pp. 5–39, Publ. Inst. Rech. Math. Av., 498, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1992.

[Mu] S. Muneta, On some explicit evaluations of multiple zeta-star values, *J. Number Theory*, **128** (2008), no. 9, 2538–2548.

[NNSY] J. Nakagawa, M. Noumi, M. Shirakawa and Y. Yamada, Tableau representation for Macdonald's ninth variation of Schur functions, *(English summary) Physics and combinatorics* (Nagoya, 2000), pp. 180-195, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.

[NPY] M. Nakasuji, O. Phuksuwan and Y. Yamasaki, On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, preprint, 2017. arXiv:1704.08511.

[S] R. Stanley, Two remarks on skew tableaux, *Electron. J. Combin.*, **18** (2011), no. 2, Paper 16, 8 pp.

[Z] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications. First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, *Progr. Math.*, **120**, Birkhauser, Basel, 1994.