数理解析研究所講究録 第2092巻 2018年 92-96

Construction of T-numbers in positive characteristic

筑波大学数理物質系　大音 智弘 *
Tomohiro Ooto
Faculty of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

1　導入および先行研究

ディオファントス近似の基本的な問題として，与えられた実数を有理数でどのくらい良く近似できるかというものがある．例えばRoth [11] は，実代数的数の近似について次の結果を残している．

定理 1.1. 代数的数 $\xi \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon > 0$ に対して，

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{|q|^{2+\varepsilon}} \tag{1}$$

となる有理数 p/q は有限個しか存在しない．

定理 1.1 から，不等式 (1) を満たす有理数が無数に存在するときは実数 ξ は超越数であることが分かる．このように，近似の度合いを調べることで実数の超越数性を判定できる．Mahler [7] は，ディオファントス近似の考えを用いて実数を 4 つに分類した．整数係数多項式 $P(X) = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ に対して，$H(P) := \max_{0 \leq n \leq d} |a_n|$ を多項式 P の高さとよぶ．実数 ξ と整数 $n \geq 1$ に対して，次を満たす実数 w の上限を $w_n(\xi)$ とおく:次数 n 以下の無数の多項式 $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ に対して，

$$0 < |P(\xi)| \leq H(P)^{-w}.$$

定理 1.1 より，代数的数 $\xi \in \mathbb{R}$ に対して $w_1(\xi) \leq 1$ となる．また，実数 ξ に対して，次で $w(\xi)$ を定める．

$$w(\xi) := \limsup_{n \to \infty} \frac{w_n(\xi)}{n}.$$

実数 $\xi \in \mathbb{R}$ は，

A-number ($w(\xi) = 0$ のとき),
S-number ($0 < w(\xi) < \infty$ のとき),
T-number ($w(\xi) = \infty$ かつ任意の整数 $n \geq 1$ に対して,$w_n(\xi) < \infty$ のとき),
U-number ($w(\xi) = \infty$ かつある整数 $n \geq 1$ に対して,$w_n(\xi) = \infty$ のとき)

とよばれる．この実数の分類は，Mahler の分類とよばれる．

*e-mail: ooto@math.tsukuba.ac.jp

Mahler の分類の性質を紹介する．A-number は代数的数と同値であることが知られている ([4, Theorem 3.1])．そのため，超越数は S, T, U-number の 3 つに分けられる．超越数 $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ に対して，ξ と η が代数的従属ならば ξ と η は同じクラスとなる ([7])．例えば，e は S-number，$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!}$ は U-number であることが知られているので，e と $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!}$ は代数的独立となる．Mahler [7] は，ルベーグ測度の意味でほとんどすべての数は S-number であることを示した．T-number の存在性は，Schmidt [12] によって示され，証明には Roth の定理の一般化 (Wirsing によるもの [14] を参照) が用いられている．Wirsing の定理は ineffective なので，Schmidt が構成した T-number は具体的なものではないことを注意しておく．Baker [3] は Schmidt の構成法を利用して，w_n の値をコントロールできるような次の結果を得た．

定理 1.2. $(w_n)_{n\geq 1}$ を任意の $n \geq 1$ に対して，$w_n \in (n^3 + 2n^2 + 4n + 3, +\infty]$ を満たす単調増加な実数列とする．このとき，任意の $n \geq 1$ に対して，$w_n(\xi) = w_n$ を満たす超越数 $\xi \in \mathbb{R}$ が存在する．特に，*T-number* は存在する．

2 主結果

p を素数とし，$q := p^s$ とおく．ただし，s は正の整数．位数 q の有限体を $\mathbb{F}_q$，$\mathbb{F}_q$ 係数の多項式環を $\mathbb{F}_q[T]$，$\mathbb{F}_q$ 係数の有理関数体を $\mathbb{F}_q(T)$，$\mathbb{F}_q$ 係数のローラン級数体を $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ で表す．任意の $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1})) \setminus \{0\}$ は次の形で書ける:

$$\xi = \sum_{n=N}^{\infty} a_n T^{-n}.$$

ただし，$a_n \in \mathbb{F}_q, N \in \mathbb{Z}, a_N \neq 0$. このとき，$|\xi| := q^{-N}, |0| := 0$ で $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ 上に絶対値を定める．この絶対値は，$\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{F}_q((T^{-1}))}$ に一意的に延長できることが知られており，それもまた $|\cdot|$ とかく．

前節では実数の分類について考えた．この節では，Mahler の分類の有限体上のローラン級数への類似を考える．多項式 $P(X) = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n \in (\mathbb{F}_q[T])[X]$ に対して，$H(P) := \max_{0\leq n\leq d} |a_n|$ を多項式 P の高さとよぶ．$\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ と整数 $n \geq 1$ に対して，以下を満たす実数 w の上限を $w_n(\xi)$ とおく:X に関する次数が n 以下の無数の多項式 $P(X) \in (\mathbb{F}_q[T])[X]$ に対して，

$$0 < |P(\xi)| \leq H(P)^{-w}.$$

また，$\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ に対して，次で $w(\xi)$ を定める．

$$w(\xi) := \limsup_{n\to\infty} \frac{w_n(\xi)}{n}.$$

Bundschuh [5] は，次のように $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ を 4 つに分類した．$\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ は，

A-number ($w(\xi) = 0$ のとき),
S-number ($0 < w(\xi) < \infty$ のとき),
T-number ($w(\xi) = \infty$ かつ任意の整数 $n \geq 1$ に対して,$w_n(\xi) < \infty$ のとき),
U-number ($w(\xi) = \infty$ かつある整数 $n \geq 1$ に対して,$w_n(\xi) = \infty$ のとき)

とよばれ，この分類は Bundschuh の分類とよばれる．

Bundschuh の分類の性質を紹介する．A-number は $\mathbb{F}_q(T)$ 上代数的なローラン級数と同値になる ([10])．$\mathbb{F}_q(T)$ 上超越的な $\xi, \eta \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ に対して，ξ と η が $\mathbb{F}_q(T)$ 上代数的従属ならば ξ と η は同じクラスとなる ([10])．Sprindžuk [13] は，ハール測度の意味でほとんどすべての数は S-number であることを示した．また，$\sum_{n=1}^{\infty} T^{-n!}$ は $w_1(\sum_{n=1}^{\infty} T^{-n!}) = +\infty$, つまり U-number であることが比較的簡単にわかる．

ここまでは，実数とローラン級数で似た性質を持つものを紹介した．しかしながら，Mahler [8] は定理 1.1 の類似が成り立たないことを示した．つまり，$w_1(\alpha) > 1$ となる代数的数 $\alpha \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ が存在する．t を正の整数，$r := p^t, \alpha := \sum_{n=1}^{\infty} T^{-r^n} \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ とおく．このとき，α は r 次の代数的数で $w_1(\alpha) = r - 1$ となる．そのため，実数の T-number の構成法の直接的な類似ではローラン級数における T-number の存在性を示すことはできない．そこで定理 1.1 の類似の反例を用いて，次のローラン級数を構成する．$\mathbf{m} = (m_j)_{j \geq 0}$ を $m_0 = 1$，任意の $j \geq 1$ に対して，$m_j \geq 2$ を満たす整数列とする．整数 $j \geq 0$ に対して，$r_j := r^{m_0 m_1 \cdots m_j}, \alpha_j(r, \mathbf{m}) := \sum_{n=1}^{\infty} T^{-r_j^n}$ とおく．ローラン級数 $\xi(r, \mathbf{m}) \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ を次で定める．

$$\xi(r, \mathbf{m}) := \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(r, \mathbf{m}).$$

本稿の主結果は以下の定理である．

定理 2.1 ([10])**.** ローラン級数 $\xi(r, \mathbf{m})$ は T-*number* である．

パラメーター $\mathbf{m}$ を動かすことで，次の系が得られる．

系 2.2 ([10])**.** 有限体上のローラン級数体 $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ 上に，T-*number* は非加算無限個存在する．

3 関連した問題

この節では，主結果に関連する問題を 2 つ挙げる．一つは，$\xi(r, \mathbf{m})$ の係数の性質についてで，もう一つは $\xi(r, \mathbf{m})$ の実数での類似物に関することである．まずは，$\xi(r, \mathbf{m})$ の例を一つ挙げ，その例を通して 2 つの問題を考えていく．$p = r = 2$，任意の $j \geq 1$ に対して，$m_j = 2$ とおく．このとき，$\xi(r, \mathbf{m}) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n T^{-n}$ とおくと，

$$s_n = \begin{cases} 1 & (\text{ある整数 } k \geq 0 \text{ と奇数 } \ell \geq 1 \text{ に対して}, n = 2^{4^k \ell} \text{のとき}), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

また，$\mathbf{s} := (s_n)_{n \geq 0}$ とおく．

整数 $k \geq 2$ に対して，$\Sigma_k := \{0, 1, \ldots, k-1\}$ とおく．k-*automatonA* を以下の 6 つ組で定める:

$$A = (Q, \Sigma_k, \delta, q_0, \Delta, \tau),$$

ただし，Q は状態集合とよばれる有限集合，$\delta : Q \times \Sigma_k \to Q$ は遷移関数とよばれる写像，$q_0 \in Q$ は開始状態とよばれ，Δ は出力集合とよばれる有限集合，$\tau : Q \to \Delta$ は出力関数とよばれる写像．$q \in Q$ と Σ_k 上の有限ワード $W = w_1 w_2 \cdots w_n$ に対して，$\delta(q, W) = \delta(\delta(q, w_1 w_2 \cdots w_{n-1}), w_n)$ を用いて帰納的に $\delta(q, W)$ を定める．整数 $n \geq 0$ に対して，n の k 進数展開を $\sum_{i=0}^{r} w_i k^i$ とかく．そして，$W_n := w_0 w_1 w_2 \cdots w_r$ とおく．整数 $k \geq 2$ と k-automaton A が存在して，任意の整数 $n \geq 0$ に対して $a_n = \tau(\delta(q_0, W_n))$ となるとき，数列 $(a_n)_{n \geq 0}$ を k-automatic という．Christol, Kamae, Mendes France, Rauzy [6] は，automaton を用いて代数的なローラン級数を特徴づけた．

定理 3.1. $\mathbb{F}_q$ 上の数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ に対して，ローラン級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^{-n}$ が代数的であることと数列 $(a_n)_{n\geq 0}$ が *p-automatic* であることは同値である．

整数 $n \geq 1$ と数列 $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ に対して，数列の複雑さを測る $p(\mathbf{a}, n)$ という関数があり，

$$p(\mathbf{a}, n) = \mathrm{Card}\{(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+n-1}) \mid 0 \leq j \leq n-1\}$$

で定める．この関数の性質として次のことが知られている．

命題 3.2. $n \geq 1$ を整数とし $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geq 0}$ を数列とする．

(1) $\mathbf{a}$ が非周期的のとき，$\mathbf{a}$ のみに依存する定数 $C_1 > 0$ が存在し，任意の整数 $n \geq 1$ に対して，

$$p(\mathbf{a}, n) \geq C_1 n.$$

(2) 整数 $k \geq 2$ に対して，$\mathbf{a}$ が *k-automatic* のとき，$\mathbf{a}$ のみに依存する定数 $C_2 > 0$ が存在し，任意の整数 $n \geq 1$ に対して，

$$p(\mathbf{a}, n) \leq C_2 n.$$

Proof. [2, Theorem 10.2.6, Corollary 10.3.2] を見よ． □

$\sum_{n=0}^{\infty} s_n T^{-n}$ は T-number，つまり超越数なので，定理 3.1 より $\mathbf{s}$ は 2-automatic ではない．一方で，簡単な計算より $p(\mathbf{s}, n) = O(n)$ であることがわかる．従って，$\mathbf{s}$ は 2-automatic ではないが，automatic 数列と同等な複雑さを持つ．ここで，次の問題を考えることは自然なことであろう．

問題 3.3. 数列 $\mathbf{s}$ が k-automatic となる整数 $k \geq 2$ は存在するか．そうでないならば，$\mathbf{s}$ はどのような性質を持つか．

次に，ローラン級数 $\sum_{n=0}^{\infty} s_n T^{-n}$ の実数の類似 $\xi_1 := \sum_{n=0}^{\infty} s_n 2^{-n} \in \mathbb{R}$ について考える．有理近似から，実数の Mahler の分類を判定する以下の定理がある ([1])．

定理 3.4. ξ を実数，$\varepsilon > 0, S$ を異なる素数の有限集合とする．有理数の数列 $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ で $2 \leq q_1 < q_2 < \ldots$ を満たし，任意の整数 $n \geq 1$ に対して，$\gcd(p_n, q_n) = 1$ かつ

$$0 < \left(\prod_{p\in S} |p_n|_p \cdot |q_n|_p\right) \cdot \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}}$$

となるものが存在すると仮定する．ただし，$|\cdot|$ は通常の実数の絶対値，$|\cdot|_p$ は p 進絶対値で $|p|_p = p^{-1}$ を満たすとする．このとき，実数 ξ は S もしくは *T-number* となる．

定理 3.4 を用いると，ξ_1 は S もしくは T-number となることがわかる．S か T かを判定するためには，$w(\xi_1)$ の評価が必要になる．定理 2.1 の場合は，$\sum_{n=1}^{\infty} T^{-r^n}$ が代数的数という事実を用いて "良い" 近似を構成することで $w(\xi(r, \mathbf{m}))$ を下から評価した．しかし，実数の場合は $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-r^n}$ は超越数であることが知られている ([9, Theorem 1.1.2])．そのため，ξ_1 の "良い" 近似となる高次の代数的数がわからない．まとめると次のような問題になる．

問題 3.5. 実数 ξ_1 が S か T-number のどちらになるか判定せよ．

参考文献

[1] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *Mesures de transcendance et aspects quantitatifs de la méthode de Thue-Siegel-Roth-Schmidt*, (French) Proc. Lond. Math. Soc. (3) **101** (2010), no. 1, 1–26.

[2] J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).

[3] R. C. Baker, *On approximation with algebraic numbers of bounded degree*, Mathematika **23** (1976), no. 1, 18–31.

[4] Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, **160** Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[5] P. Bundschuh, *Transzendenzmasse in Körpern formaler Laurentreihen*, (German) J. Reine Angew. Math. **299/300** (1978), 411–432.

[6] G. Christol, T. Kamae, M. Mendes France, G. Rauzy, *Suites algébriques, automates et substitutions*, (French) Bull. Soc. Math. France **108** (1980), no. 4, 401–419.

[7] K. Mahler, *Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus, I, II*, (German) J. Reine Angew. Math., **166** (1932), 118–150.

[8] K. Mahler, *On a theorem of Liouville in fields of positive characteristic*, Canadian J. Math. **1**, (1949), 397–400.

[9] Ku. Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Math., 1631, Springer-Verlag, Berlin.

[10] T. Ooto, *The existence of* T*-numbers in positive characteristic*, Preprint arXiv:1706.05887.

[11] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1955), 1–20.

[12] W. M. Schmidt, T*-numbers do exist*, 1970 Symposia Mathematica, Vol. IV (INDAM, Rome, 1968/69), 3–26 Academic Press, London.

[13] V. G. Sprindžuk, *Mahler's problem in metric number theory*, Izdat. " Nauka iTehnika ", Minsk, (Russian). English translation by B. Volkmann, *Translations of Mathematical Monographs*, 25, American Mathematical Society, Providence, RI, 1969.

[14] E. Wirsing, *On approximations of algebraic numbers by algebraic numbers of bounded degree*, 1969 Number Theory Institute (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XX, State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1969), pp. 213–247. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.