数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 79-87

高ランクな半単純リー群における Kunze-Stein 現象の端点評価について

慶応大学 河添　健
Takeshi Kawazoe
Keio University

1　背景

実ランク 1 の非コンパクト半単純リー群上の Kunze-Stein 現象の端点評価

$$\|f*g\|_{L^{2,\infty}(G)} \leq c\|f\|_{L^{2,1}(G)}\|g\|_{L^{2,1}(G)} \tag{1}$$

は A. Ionescu ([4]) によって得られた。ここで f, g は Lorentz 空間 $L^{p,q}(G)$ に属し、$\|\cdot\|_{L^{p,q}(G)}$ はそのノルムである。この評価は J. Liu によりヤコビ hyper 群上でも成立することが示され ([7])、さらに河添により Abel 変換を用いた別証明が得られた ([5])。本稿ではその手法を用いて、高ランクな場合の端点評価について考える。とくに複素単純リー群の場合に次のような修正した形の不等式を紹介する。

$$\|f*M_m g\|_{L^{2,\infty}(\Delta)} \leq c\|f\|_{L^{2,1}(\Delta)}\|g\|_{L^{2,1}(\Delta)}. \tag{2}$$

ここで $L^{p,q}(\Delta)$ は $L^{p,q}(G)$ の K 両側関数全体からなる部分空間であり、M_m は A のリー環の双対空間 $\mathfrak{a}^*$ 上の関数 m に対応するフーリエ multiplier である。m が良い性質（3.1）を満たすとき、この不等式が成立し対応するフーリエ multiplier を $(\sqrt{\Delta},\infty)$ 型と呼ぶこととする。以下では M_m が $(\sqrt{\Delta},\infty)$ 型となる十分条件を導き、その例を $G=Sp(4,\mathbf{C})$ と $SL(3,\mathbf{C})$ の場合に具体的に与える。これらの成果は J. Liu 氏との共同研究（[6]）である。また修正端点評価は $SU(n,m)$ でも例が得られている。

2 準備

Gを複素半単純リー群とし、$G = KAN$および$G = KAK$をそれぞれ、Gの岩沢分解およびカルタン分解とする。部分群K, A, NはそれぞれGの極大コンパクト、ベクトル、べき例部分群である。Gのリー環を$\mathfrak{g}$、Aのリー環を$\mathfrak{a}$とする。$A = \exp \mathfrak{a}$である。$\mathfrak{a}^*$を$\mathfrak{a}$の双対空間とし、Σ_+を$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$の正ルートの全体とする。$\rho(H) = \sum_{\alpha \in \Sigma_+} \alpha(H)$ とする。Wを(G, A)のワイル群とし、$\mathfrak{a}_+$を$\mathfrak{a}$の正ワイル chamber とし、$A_+ = \exp \mathfrak{a}_+$とする。$dg, da, dk, dn, dH$をそれぞれ、$G, A, K, N, \mathfrak{a}$上の不変測度とし, [9], §1 のように正規化する。このとき$d(\exp H) = dH$および$dg = e^{2\rho(\log a)} dkdadn$となる。$A$上の関数$D$を

$$D(\exp H) = \sum_{w \in W} \det w \cdot e^{w\rho(H)} = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} (e^{\alpha(H)} - e^{-\alpha(H)})$$

と定義し、$\Delta = D^2$する。このとき$\Delta(\exp H) = O(e^{2\rho(H)})$である。また$\mathfrak{a}^*$上の関数$\pi$を

$$\pi(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} \lambda(H_\alpha)$$

と定義する。ここでH_αはαのルート空間に属する要素で$\alpha(H) = \langle H, H_\alpha \rangle$を満たすものである。このとき$G$上の$K$両側不変関数$f$に対して

$$\int_G f(g)dg = C_0 \int_{\mathfrak{a}} f(\exp H)\Delta(\exp H)dH$$

となる。A上の正値関数wに対して$L^p(w)$, $1 \le p \le \infty$をG上のK両側不変関数fで

$$\int_{\mathfrak{a}} |f(\exp H)|^p w(\exp H)dH < \infty$$

を満たすもの全体とする。同様に$L^{p,q}(w)$をG上のK両側不変関数fで、$f \circ \exp$が$w \circ \exp$を重みとする$\mathfrak{a}$上のローレンツ空間$L^{p,q}(w \circ \exp)$ (cf. [3]) に属するもの全体とする。

ここでG上の球変換およびAbel変換を復習する。詳しくは[2], §14, [8], §4 and [9] を参照されたい。$\lambda \in \mathfrak{a}^*$に対して$G$上の球関数$\phi_\lambda$は

$$D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H) = \frac{\pi(\rho)}{\pi(i\lambda)} \sum_{w \in W} \det w \cdot e^{iw\lambda(H)} \tag{3}$$

と定義される。G 上の K 両側不変関数 f に対して球変換 $\widehat{f}$ および Abel 変換 $\mathcal{A}f$ は以下のように定義される。$\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_G f(x)\phi_\lambda(g^{-1})dg,$$
$$\mathcal{A}f(\exp H) = e^{\rho(H)} \int_N f(\exp H \cdot n)dn.$$

このとき

$$\widehat{f}(\lambda) = (\mathcal{A}f \circ \exp)\tilde{}(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} \mathcal{A}f(\exp H)e^{-i\lambda(H)}dH \tag{4}$$

となる。ここで $\tilde{}$ は $\mathfrak{a}$ 上のフーリエ変換を表す。このことから

$$\mathcal{A}(f * g) = \mathcal{A}f \otimes \mathcal{A}g \tag{5}$$

である。ただし $*$ は G 上の結合積であり $\otimes$ は A 上の結合積である。

$\pi(\partial_H)$ を次の式で定義される $\mathfrak{a}$ 上の定数係数の微分作用素とする。

$$\pi(\partial_H)\phi(H) = \prod_{\alpha \in \sum_+} \langle \alpha, \phi'(H) \rangle.$$

すると $\pi(-i\lambda)\widehat{f}(\lambda) = C_0\pi(\rho)|W|(D \cdot f \circ \exp)\tilde{}(\lambda)$ ([9], (25)) となる。$\pi(-i\lambda)\widehat{f}(\lambda) = (\pi(-\partial_H)\mathcal{A}f \circ \exp)\tilde{}$ に注意すれば、Abel 変換の反転公式

$$f(\exp H) = \frac{C}{D(\exp H)} \pi(-\partial_H)\mathcal{A}f(\exp H) \tag{6}$$

が得られる。$C^{-1} = C_0\pi(\rho)|W|$ である (cf. [9], Theorem 6)。とくに (5) に注意すれば

$$f * g(\exp H) = \frac{C}{D(\exp H)} \pi(-\partial_H)\mathcal{A}f \otimes \mathcal{A}g(\exp H) \tag{7}$$

となる。

3 修正端点評価

修正端点評価 (2) を得るためのフーリエ multiplier を導入する。$\mathfrak{a}$ 上の有界 W 不変関数 m に対して対応するフーリエ multiplier M_m を、$f \in L^2(\Delta)$ に対して $\widehat{M_m f}(\lambda) = m(\lambda)\widehat{f}(\lambda)$ と定義する。同様に M_m は $L^2(\mathfrak{a})$ 上の通常のフーリエ multiplier でもあることに注意する。 ここで

Definition 3.1. *M_m is of type $(\sqrt{\Delta}, \infty)$ if M_m satisfies*

$$\|M_m(\mathcal{A}f \circ \exp)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} \leq c\|f\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \tag{8}$$

for all $f \in L^1(\sqrt{\Delta})$.

と定義する。次の2つの補題は修正端点評価 (2) の証明に有効である。

Lemma 3.2. *Let f be a smooth K-bi-invariant function on G and $f \in L^1(\sqrt{\Delta})$. Then there exists a positive constant c such that*

$$\|\pi(-\partial_H)\mathcal{A}f \circ \exp\|_{L^1(\mathfrak{a})} \leq c\|f\|_{L^1(\sqrt{\Delta})}. \tag{9}$$

Proof. $\sqrt{\Delta} = D$ より、(6) から明らかである。 □

Lemma 3.3. *Let $E(\exp H) = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} e^{\alpha(H)} = e^{\rho(H)}$. For all functions $f \in L^1(E)$,*

$$\|f\|_{L^1(E)} \leq c\|f\|_{L^{2,1}(E^2)}.$$

Proof. 正単純ルートの全体を $\Sigma_+^0 = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n = \dim \mathfrak{a}\}$ とすれば $\mathfrak{a}$ と $\mathbf{R}^n$ は $H \in \mathfrak{a}$ に $(\alpha_i(H))_{1\leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$ を対応させることにより同一視できる。よって $\mathfrak{a}_+$ に対応する領域を $\mathbf{R}_{++}^n$ とし、$\delta = E \circ \exp$ とすれば $\mathbf{R}_{++}^n$ 上の関数 F に対して $\|F\|_{L^1(\delta)} \leq c\|F\|_{L^{2,1}(\delta^2)}$ を示せばよい。ここで $d_i > 0$, $1 \leq i \leq n$ が存在して、$\delta(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} e^{\alpha(H)} = \prod_{i=1}^n e^{d_i \alpha_i(H)}$ と書けることに注意する。また F は $\mathbf{R}_{++}^n$ 内の直方体 S 上の特性関数 χ_S として一般性を失わない。S を $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ とすれば $\{x \mid |\chi_S(x)| > \lambda\}$ の δ^2 に関する体積は $0 \leq \lambda \leq 1$ のとき $V(S) = \int_S \delta^2(x)dx$ であり、その他では 0 である。よって再配置関数 $\chi_S^*(t)$ は $0 \leq t \leq V(S)$ のとき 1 であり、その他では 0 である。よって

$$\|\chi_S\|_{L^{2,1}(\delta^2)} = c\int_0^\infty |\chi_S^*(t)| t^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = cV(S)^{\frac{1}{2}}$$

となる。一方で

$$\begin{aligned}\|\chi_S\|_{L^1(\delta)} &= \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} e^{d_i \alpha_i(H)} dH \leq c \prod_{i=1}^n (e^{2d_i b_i} - e^{2d_i a_i})^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} e^{2d_i \alpha_i(H)} dH\Big)^{\frac{1}{2}} = cV(S)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

である。よって求める結果を得る。 □

主定理は以下である。

Theorem 3.4. *Let G be a connected complex semisimple Lie groups. Let M_m be a Fourier multiplier of type $(\sqrt{\Delta}, \infty)$. Then (2) holds for all $f, g \in L^{2.1}(\Delta)$.*

Proof. [7] で (1) を示したときと同様に、(2) を示すにはローレンツ空間の双対性を用いて、$h \in L^{2,1}(\Delta)$ に対して

$$\Big|\int f * M_m g(\exp H) h(\exp H)\Delta(\exp H)dH\Big| \\ \leq c\|f\|_{L^{2,1}(\Delta)}\|g\|_{L^{2,1}(\Delta)}\|h\|_{L^{2,1}(\Delta)} \qquad (10)$$

を示せはよい。ここで R を $\mathfrak{a}$ のコンパクト集合で原点を含まないものとする。 今、f, g, h のいずれかが $\exp R$ に台を持つとする。f とすれば

$$\begin{aligned}|M_m(f*g*h)(e)| &\leq \|f*g\|_{L^2(\Delta)}\|M_m h\|_{L^2(\Delta)} \leq \|f\|_{L^1(\Delta)}\|g\|_{L^2(\Delta)}\|h\|_{L^2(\Delta)} \\ &\leq \Big(\int_R \Delta(\exp H)dH\Big)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\Delta)}\|g\|_{L^2(\Delta)}\|h\|_{L^2(\Delta)}\end{aligned}$$

である。$L^{2,1}(\Delta) \subset L^2(\Delta)$ より求める評価が得られる。$\exp R$ に台を持つ関数を g, h としても同様である。よって, f, g, h は $\exp R$ の外 $(\exp R)^c$ に台を持つと仮定してよい。このとき (7), (8), Lmma 3.2 より

$$\begin{aligned}&\Big|\int f * M_m g(\exp H) h(\exp H)\Delta(\exp H)dH\Big| \\ \leq& c\|\pi(-\partial_H)\mathcal{A}f \otimes M_m\mathcal{A}g(\exp H)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})}\|h\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \\ \leq& c\|\pi(-\partial_H)\mathcal{A}f \circ \exp\|_{L^1(\mathfrak{a})}\|M_m\mathcal{A}g \circ \exp\|_{L^\infty(\mathfrak{a})}\|h\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \\ \leq& c\|f\|_{L^1(\sqrt{\Delta})}\|g\|_{L^1(\sqrt{\Delta})}\|h\|_{L^1(\sqrt{\Delta})}.\end{aligned}$$

ところで関数 a が $(\exp R)^c$ に台を持つとき補題 3.3 より

$$\|a\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \leq c\|a\|_{L^1(E)} \leq c\|a\|_{L^{2,1}(E^2)} \leq c\|a\|_{L^{2,1}(\Delta)}$$

である。よって (10) が得られた。 □

ここで M_m が $(\sqrt{\Delta}, \infty)$ 型となる十分条件を求める。球関数 $\phi_\lambda(\exp H)$ が λ の関数として、$\mathfrak{a}$ 上のコンパクトな台を持つ L^1 関数 $A_H(S) = A(S, H)$ のフーリエ変換として得られること、すなわち

$$D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H) = \int_{\mathfrak{a}} A(S, H)e^{i\lambda(S)}dS$$

となることに注意する ([1])。よって (4) より $f \in L^1(\Delta)$ に対して

$$\mathcal{A}f(\exp S) = \int_{\mathfrak{a}} f(\exp H) D(\exp H) A(S,H) dH$$

である。$A(S,H)$ の第 1 変数に M_m を作用させたものを $M_{m,1}A(S,H)$ と書く。もし $M_{m,1}A(S,H)$ が S の関数として $L^1(\mathfrak{a})$ に属するならば

$$m(\lambda) D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = \int_{\mathfrak{a}} M_{m,1} A(S,H) e^{i\lambda(S)} dS$$

となり

$$M_m(\mathcal{A}f \circ \exp)(S) = \int_{\mathfrak{a}} f(\exp H) D(\exp H) M_{m,1} A(S,H) dH$$

である。よってある定数 $c > 0$ が存在して、すべての $H \in \mathfrak{a}$ に対して $\|M_{m,1}A(\cdot, H)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} < c$ となるならば (8) が得られる。以上のことから次の系が得られた。

Corollary 3.5. *Let us suppose that*

$$m(\lambda) D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = \int_{\mathfrak{a}} B(S,H) e^{i\lambda(S)} dS, \tag{11}$$

where $B(S,H) \in L^1(\mathfrak{a})$ as a function of S and $B \in L^\infty(\mathfrak{a}^2)$. Then M_m is of type $(\sqrt{\Delta}, \infty)$ and thus, (2) holds for $f, g \in L^{2,1}(\Delta)$.

4　例

系 3.5 の条件 $B_H(S) \in L^1(\mathfrak{a})$, $B(S,H) \in L^\infty(\mathfrak{a}^2)$、すなわち、ある定数 $c > 0$ が存在して、すべての $H \in \mathfrak{a}$ に対して $\|M_{m,1}A(\cdot, H)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} < c$ となる m を求める。

(I) 実ランク 1 の場合: $\dim A = 1$ のとき

$$D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = c \frac{\sin \lambda(H)}{\lambda} = c \int_{-H}^{H} e^{i\lambda(S)} dS$$

である。よって $m(\lambda) = 1$ とすれば $B(S,H)$ は $[-H, H]$ の特性関数である。したがって修正の必要は無く Kunze-Stein 現象 (1) が成立する。

(II) $Sp(4, \mathbf{C})$ の場合: $\mathfrak{a} = \{H(a_1, a_2) = \mathrm{diag}\ (a_1, a_2, -a_1, -a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbf{C}\}$ である。$e_i \in \mathfrak{a}^*$, $i = 1, 2$ を $e_i(H(a_1, a_2)) = a_i$ で定義すれば $\Sigma_+ =$

$\{2e_1, 2e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$ である。$\alpha = e_1 - e_2$ および $\beta = 2e_2$ とする。s_γ を $\gamma \in \Sigma_+$ に関する $\mathfrak{a}^*$ の鏡映とする。このときワイル群 W は $W = \{I, s_\alpha, s_\beta, s_\alpha s_\beta, s_\beta s_\alpha, s_\alpha s_\beta s_\alpha,\ s_\beta s_\alpha s_\beta, (s_\alpha s_\beta)^2\}$ となる。$\mathfrak{a}^*$ の要素 λ を $\lambda = \lambda_1(2\alpha + \beta) + \lambda_2\beta = 2\lambda_1 e_1 + 2\lambda_2 e_2$ と表示する。$w \in W$ の λ への作用を計算して (3) を用いると

$$
\begin{aligned}
D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H) = \frac{1}{16}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}& \\
\times\Big(-&\frac{\sin(\lambda_1+\lambda_2)(a_1+a_2)}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\sin(\lambda_1-\lambda_2)(a_1-a_2)}{\lambda_1-\lambda_2} \\
+&\frac{\sin(\lambda_1-\lambda_2)(a_1+a_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{\sin(\lambda_1+\lambda_2)(a_1-a_2)}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)
\end{aligned}
$$

となる。ここで

$$m(\lambda) = \sin^2\lambda_1 \sin^2\lambda_2$$

とすれば m は W 不変であり

$$
\begin{aligned}
m(\lambda)D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H) = c\frac{\sin^2\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\sin^2\lambda_2}{\lambda_2}& \\
\times\Big(-&\frac{\sin(\lambda_1+\lambda_2)(a_1+a_2)}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\sin(\lambda_1-\lambda_2)(a_1-a_2)}{\lambda_1-\lambda_2} \\
+&\frac{\sin(\lambda_1-\lambda_2)(a_1+a_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{\sin(\lambda_1+\lambda_2)(a_1-a_2)}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)
\end{aligned}
$$

となる。ところで

$$\frac{\sin^2\lambda_1}{\lambda_1}\frac{\sin^2\lambda_2}{\lambda_2}$$

は $u(x, y) = -\frac{1}{4}\mathrm{sgn}\ x \cdot \mathrm{sgn}\ y$ と $\{(x, y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ の特性関数の積のフーリエ変換であり

$$\frac{\sin(\lambda_1+\lambda_2)(a_1+a_2)}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\sin(\lambda_1-\lambda_2)(a_1-a_2)}{\lambda_1-\lambda_2}$$

は $v(x, y) = \frac{1}{2}$ と $\{(x, y) \mid |x + y| \le |a_1 + a_2|, |x - y| \le |a_1 - a_2|\}$ の特性関数の積のフーリエ変換である。よって $B(S, H)$ は

$$u \otimes v(S) + u \otimes s_\beta v(S)$$

の定数倍である。以上のことから $B(S, H)$ は系 3.5 の条件を満たす。

(III) $SL(3, \mathbf{C})$ の場合: $\mathfrak{a} = \{H(a_1, a_2) = \mathrm{diag}\,(a_1, a_2, -(a_1+a_2)) \mid a_1, a_2 \in \mathbf{C}\}$ である。$e_i \in \mathfrak{a}^*$, $i = 1, 2$ を $e_i(H(a_1, a_2)) = a_i$, $e_3(H(a_1, a_2)) = -(a_1 + a_2)$ と定義すれば $\Sigma_+ = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3\}$ である。$\alpha = e_1 - e_2$, $\beta = e_2 - e_3$ とする。$W = \{I, s_\alpha, s_\beta, s_\alpha s_\beta, s_\beta s_\alpha, s_\alpha s_\beta s_\alpha\}$ である。$\lambda \in \mathfrak{a}^*$ を $\lambda = \lambda_1 \frac{4}{3}(2\alpha + \beta) + \lambda_2 \frac{4}{3}(-\alpha + \beta) = 4\lambda_1 e_1 + 4\lambda_2 e_2$ と表示する。W の $\mathfrak{a}^*$ への作用を計算して (3) を用いると、$D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H)$ は

$$\begin{aligned}
&4(2i \sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2) e^{2i(\lambda_1+\lambda_2)(a_1+a_2)} \sin \lambda_1(a_1 - a_2) \sin \lambda_2(a_1 - a_2) \\
&-e^{-i(\lambda_1+\lambda_2)(a_1+a_2)} \sin 2\lambda_1(a_1 - a_2) \sin 3(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 + a_2) \\
&+2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2) e^{-i(\lambda_1-2\lambda_2)(a_1+a_2)} \sin 3\lambda_1(a_1 + a_2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times \cos(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 - a_2))
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$m(\lambda) = \sin^2 \lambda_1 \sin^2 \lambda_2 \sin^2(\lambda_1 - \lambda_2)$$

とすれば、m は W 不変であり、$m(\lambda)D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H)$ は

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{16} \sin^2 \lambda_1 \frac{\sin^2 \lambda_2}{\lambda_2} \sin^2(\lambda_1 - \lambda_2) \\
&\times\Big(2i \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{2i(\lambda_1+\lambda_2)(a_1+a_2)} \frac{\sin \lambda_1(a_1 + a_2)}{\lambda_1} \sin \lambda_2(a_1 - a_2) \\
&\quad -e^{-i(\lambda_1+\lambda_2)(a_1+a_2)} \frac{\sin 2\lambda_1(a_1 - a_2)}{\lambda_1} \frac{\sin 3(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
&\quad +2 \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-i(\lambda_1-2\lambda_2)(a_1+a_2)} \frac{\sin 3\lambda_1(a_1 + a_2)}{\lambda_1} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times \cos(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 - a_2)\Big)
\end{aligned}$$

となる。ここで $\dfrac{\sin^2 \lambda_2}{\lambda_2}$ は $-i\mathrm{sgn}\; y$ と $\{y \mid |y| \le \frac{1}{2}\}$ の特性関数の積の 1 次元フーリエ変換の $4\lambda_2$ での値であり

$$\frac{\sin c(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 \mp a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\sin d\lambda_1(a_1 \pm a_2)}{\lambda_1}$$

は $\{(x, y) \mid |y| \le |\frac{c}{4}(a_1 \mp a_2)|, |x + y| \le |\frac{d}{4}(a_1 \pm a_2)|\}$ の特性関数のフーリエ変換の 4 倍である。他の項はフーリエ multipliers としては、これらの特性関数の平行移動である。よって $B(S, H)$ は系 3.5 の条件を満たす。

References

[1] M. Flensted-Jensen and D. L. Ragozin, *Spherical functions are Fourier transforms of L1-functions*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 6 (1973), pp.457-458.

[2] Harish-Chandra, *Spherical functions on a semisimple Lie group, I*, Amer. J. Math. 80 (1958), pp. 241-310.

[3] R. A. Hunt, *On $L(p,q)$ Spaces*, L' Enseignement Math. 12 (1966), pp.249-276.

[4] A. D. Ionescu, *An endpoint estimate for the Kunze-Stein phenomenon and the related maximal operators*, Ann. of Math. 152 (2000), pp.259-275.

[5] T. Kawazoe, *Applications of an inverse Abel transform for Jacobi analysis: weak-L^1 estimates and the Kunze-Stein phenomenon*, to appear in Tokyo J. Math.

[6] T. Kawazoe and J. Liu, *A modified endpoint estimates of the Kunze-Stein phenomenon associated with complex semisimple Lie groups*, Scientiae Mathematicae Japonicae, online, 2018-3,pp. 1-10.

[7] J. Liu, *The Kunze-Stein phenomenon associated with Jacobi transforms*, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), pp.1817-1821.

[8] C. Meaney, *Spherical functions and spectral synthesis*, Compositio Mathematica 54 (1985), pp.311-329.

[9] F. Rouvière, *Sur la transformation d'Abel des groupes de Lie semisimples de rang un* Ann. Scuola. Norm. Sup. 10 (1983), pp.263-290.