数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 203-212



# 半単純可換BANACH環上のBANACH MODULESについての考察 (ON BANACH MODULES OVER SEMISIMPLE COMMUTATIVE BANACH ALGEBRAS)

高橋眞映 (SIN-EI TAKAHASI )

(山形大学, 数学・ゲーム工房)
(YAMAGATA UNIV., LAB. MATH. GAMES)

ABSTRACT. This is a prospect for the problem of classifying Banach modules over a semisimple commutative Banach algebra from the viewpoint of the BSE and BED properties.

## 始めに

本研究集会及び関連研究集会に多大の貢献をされた岡山県立大名誉教授高橋泰嗣先生が昨年5月72歳の若さで急逝されました。親しかった著者としては痛恨の極みです。本原稿の最後に「泰嗣さんの思い出」と題する文を掲載することをお許し下さい。

さてTakahasi-Hatori [10] は1990年初めて可換Banach環にBSE-関数を導入し、所謂BSE-環を研究しました。これは調和解析に現れるBochner-Schoenberg-Eberleinの定理を可換Banach環の世界に焼き直したものであります。しかしながら先駆者はいるもので、我々よりも28年前にBirtelと言う人がBSEと言う言葉は使わなかったものの、可換拡大という観点から所謂BSE-関数が半単純可換Banach環でも意味があることを示す結果の論文を書いています (cf. [1, 12])。

時は流れ、Inoue-Takahasi [4] は2007年初めて可換Banach環にBED性を導入し、所謂BED-環を研究しました (cf. [5])。これも調和解析に現れるR. Dossの定理 [2, 3] から擬位相と言う概念を経由して得られたものであります。その後このBSE-性とBED-性によって可換Banach環の分類が試みられています (cf. [6, 7])。

Takahasi [11] は 1994 年初めて有界近似単位元を持つ可換 Banach 環 $A$ 上の Banach module に BSE-性を定義し、所謂 BSE-Banach $A$-modules の研究を始めました。しかしその後開店休業を続けている間に、Robbins [8] が関連する結果を論文にしています。現在までこれらに関する主要論文はこれ以外にないようであります。また上の 2 つの論文では、「$A$ は有界近似単位元を持つ」という強い条件が課せられています。そこでこの強い条件を外したら、どこまで議論が進められるかという自然な疑問が湧きます。本講演はこれが動機となっています。

## §1 Banach module の Gelfand 変換

以下 $A$ を半単純可換 Banach 環でその Gelfand 空間を $\Phi_A$ とします。更に $A$ 上の Banach module を $X$ とします。もし「$Ax = \{0\} \Rightarrow x = 0$」を満たせば、$X$ は *without order* であると言います。各 $\varphi \in \Phi_A$ に対して $M_\varphi$ を対応する $A$ の極大正則イデアルとし、

$$X^\varphi = \overline{sp}\{M_\varphi X + (1 - e_\varphi)X\}$$

と置きましょう。ここで $e_\varphi$ は $\varphi(e_\varphi) = 1$ を満たす $A$ の元であり、 $\overline{sp}$ は線形閉包を表します。 このとき、$X^\varphi$ は $e_\varphi$ の選び方に依存しない $X$ の Banach $A$-submodule です。またそれらの全ての共通部分

$$\mathrm{rad}(X) = \bigcap_{\varphi \in \Phi_A} X^\varphi$$

は $X$ の *radical* と呼ばれます。もし $\mathrm{rad}(X) = \{0\}$ ならば、$X$ は半単純であると言います。もし $\mathrm{rad}(X) = X$ ならば、$X$ は *radical* であると言います。勿論全ての半単純 Banach $A$-module は常に without order であります。

各 $\varphi \in \Phi_A$ に対して、$X_\varphi$ を $X^\varphi$ が導く商空間 $X/X^\varphi$ とし、

$$\Pi X_\varphi = \Pi_{\varphi \in \Phi_A} X_\varphi$$

を $\sigma(\varphi) \in X_\varphi$ $(\forall \varphi \in \Phi_A)$ となるような全ての selections $\sigma = (\sigma(\varphi))_{\varphi \in \Phi_A}$ の集まりとします。$\Pi X_\varphi$ の元は $X$ に関する $\Phi_A$ 上のベクトル場と呼ばれます。また $\Phi_A$ における $\{\varphi \in \Phi_A : \sigma(\varphi) \neq 0\}$ の閉包は $\sigma \in \Pi X_\varphi$ の台と呼ばれ、$\mathrm{supp}(\sigma)$ によって表されます。空間 $\Pi X_\varphi$ は自然な和とスカラー積及び

$$(a\sigma)(\varphi) = \widehat{a}(\varphi)\sigma(\varphi) \quad (a \in A, \sigma \in \Pi X_\varphi, \varphi \in \Phi_A)$$

で定義されたmodule積のもとで$A$-moduleを作ります。ここで$\widehat{a}$は$a \in A$の Gelfand 変換を表します。

$\Phi_A$ 上の全ての複素数値関数全体の作る algebra を $\mathcal{F}(\Phi_A)$ によって表しましょう。このとき $\Pi X_\varphi$ は次の式で定義された module 積のもとで $\mathcal{F}(\Phi_A)$-module を作ります：

$$(h\sigma)(\varphi) = h(\varphi)\sigma(\varphi) \quad (h \in \mathcal{F}(\Phi_A), \sigma \in \Pi X_\varphi, \varphi \in \Phi_A).$$

次に

$$\Pi^b X_\varphi = \{\sigma \in \Pi X_\varphi : \|\sigma\|_\infty := \sup_{\varphi \in \Phi_A} \|\sigma(\varphi)\| < \infty\}.$$

と置きますと、これはnorm $\|\cdot\|_\infty$ のもとで Banach $A$-module を作ることが分かります。さて $\varphi \in \Phi_A, x \in X$ に対して、

$$\widehat{x}(\varphi) = x + X^\varphi \ (\in X_\varphi := X/X^\varphi)$$

と置きましょう。我々は $\widehat{x}$ を $x \in X$ の Gelfand 変換と呼び、そのような全ての集合を $\widehat{X}$ で表します。明らかに $\widehat{x}$ は $\|\widehat{x}\|_\infty \le \|x\|$ を満たす $\Phi_A$ 上のベクトル場であり、また $\widehat{ax} = \widehat{a}\,\widehat{x}$ $(\forall a \in A, x \in X)$ が成り立ちますので、$\widehat{X}$ は $\Pi^b X_\varphi$ の $A$-submodule となります。

$\Pi X_\varphi$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が次の性質をもつとき *completely transitive* と呼びます：任意の $n \in \mathbf{N}$, $x_1, \cdots, x_n \in X$ 及び $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \Phi_A$ with $\varphi_i \neq \varphi_j$ $(i \neq j)$ に対して、

$$\exists \sigma \in \mathcal{S} : \sigma(\varphi_1) = \widehat{x}_1(\varphi_1), \cdots, \sigma(\varphi_n) = \widehat{x}_n(\varphi_n).$$

空間 $\widehat{X}$ は completely transitive である事が分かります。

## §2 BSE-ベクトル場

可換 Banach 環 $A$ の双対空間 $A^*$ の中の $\Phi_A$ の線形包 $\mathcal{P}(A)$ の任意の元 $p_A$ は一意表現

$$p_A = \sum_{\varphi \in \Phi_A} \widetilde{p}_A(\varphi)\varphi$$

を持ちます。ここで $\widetilde{p}_A$ は有限台を持つ $\Phi_A$ 上の複素数値関数です。関数 $\sigma \in \mathcal{F}(\Phi_A)$ は次の条件が満たされるとき BSE-関数であると言います：

$$\exists \beta > 0 : \left| \sum_{\varphi \in \Phi_A} \widetilde{p}_A(\varphi)\sigma(\varphi) \right| \le \beta \|p_A\|_{A^*} \ (\forall p_A \in \mathcal{P}(A)).$$

そのような全ての $\beta > 0$ の下限を $\|\sigma\|_{BSE(A)}$ で表し、$\sigma$ の BSE-norm と言います。もし混乱がなければ $A$ を省略します。$\Phi_A$ 上の 全ての BSE-関数の作る空間を $\mathcal{F}_{BSE}(\Phi_A)$ によって表します。また $\Phi_A$ 上の全ての有界な複素数値連続関数の作る可換 C*-環を $\mathcal{F}^b(\Phi_A)$ によって表します。この場合 $\mathcal{F}_{BSE}(\Phi_A)$ は norm $\|\cdot\|_{BSE}$ のもとで半単純可換 Banach 環を作り、$\mathcal{F}_{BSE}(\Phi_A) \subseteq \mathcal{F}^b(\Phi_A)$ となっています。

Banach 環 $\mathcal{F}_{BSE}(\Phi_A)$ は次で定義される重要な閉イデアル $\mathcal{F}^0_{BSE}(\Phi_A)$ を持ちます：$\mathcal{K}(\Phi_A)$ を $\Phi_A$ の全ての compact 部分集合からなる自然な有向集合とし、各 $s \in \mathcal{F}(\Phi_A)$ 及び $K \in \mathcal{K}(\Phi_A)$ に対して

$$\|s\|_{BSE(A),K} = \sup\left\{\left|\sum_{\varphi\in\Phi_A} \widetilde{p}_A(\varphi)s(\varphi)\right| : p_A \in \mathcal{P}(A), \|p_A\|_{A^*} \leq 1, \widetilde{p}_A|K = 0\right\}$$

と置きますと、

$$\mathcal{F}^0_{BSE}(\Phi_A) := \left\{s \in \mathcal{F}_{BSE}(\Phi_A) : \lim_{K\in\mathcal{K}(\Phi_A)} \|s\|_{BSE(A),K} = 0\right\}$$

は $\mathcal{F}_{BSE}(\Phi_A)$ の閉イデアルとなります (cf. [4, Corollary 3.9])。

我々の願望は上の議論の Banach module version を考える事です。この事をなす為に、各 $x \in X$ and $\varphi \in \Phi_A$ に対して

$$\pi_\varphi(x) = \widehat{x}(\varphi)$$

と定義し、

$$\mathcal{P}(X) = \left\{\sum_{i=1}^n f_i \circ \pi_{\varphi_i} \in X^* : n \in \mathbf{N}, \varphi_i \in \Phi_A, f_i \in X^*_{\varphi_i}\ (1 \leq i \leq n)\right\}$$

と置きます。ここで $X^*$ 及び $X^*_{\varphi_i}$ はそれぞれ $X$ 及び $X_{\varphi_i}$ の双対空間を表します。この場合、$\mathcal{P}(X)$ の任意の元 $p_X$ は一意表現

$$p_X = \sum_{\varphi\in\Phi_A} \widehat{p}_X(\varphi) \circ \pi_\varphi$$

を持つことが分かります。ここで $\widehat{p}_X$ は有限台を持つ $\Pi X^*_\varphi$ の元を表しています。

ベクトル場 $\sigma \in \Pi X_\varphi$ は次の条件を満たすとき BSE-ベクトル場であると言います：

$$\exists \beta > 0 : \left| \sum_{\varphi \in \Phi_A} \langle \sigma(\varphi), \widehat{p}_X(\varphi) \rangle \right| \leq \beta \|p_X\|_{X^*} \ (\forall p_X \in \mathcal{P}(X)).$$

そのような全ての $\beta > 0$ の下限を $\|\sigma\|_{BSE(X)}$ で表し、$\sigma$ の BSE-norm と言います。もし混乱がなければ $X$ を省略します。Banach 空間 $X$ に関する $\Phi_A$ 上の全ての BSE-ベクトル場の集合を $\Pi_{BSE}X_\varphi$ によって表します。この場合 $\Pi_{BSE}X_\varphi$ は norm $\|\cdot\|_{BSE}$ のもとで Banach $A$-module を作り、$\Pi_{BSE}X_\varphi \subseteq \Pi^b X_\varphi$ を満たします。

Banach $A$-module $\Pi_{BSE}X_\varphi$ は次で定義される重要な $A$-submodule $\Pi^0_{BSE}X_\varphi$ を持ちます：$\mathcal{K}(\Phi_A)$ を $\Phi_A$ の全ての compact 部分集合からなる自然な有向集合とし、各 $\sigma \in \Pi X_\varphi$ and $K \in \mathcal{K}(\Phi_A)$ に対して

$$\|\sigma\|_{BSE(X),K} = \sup \left\{ \left| \sum_{\varphi \in \Phi_A} \langle \sigma(\varphi), \widehat{p}_X(\varphi) \rangle \right| : p_X \in \mathcal{P}(X), \|p_X\|_{X^*} \leq 1, \widehat{p}_X|K = 0 \right\}$$

と置きますと、

$$\Pi^0_{BSE}X_\varphi = \left\{ \sigma \in \Pi_{BSE}X_\varphi : \lim_{K \in \mathcal{K}(\Phi_A)} \|\sigma\|_{BSE(X),K} = 0 \right\}$$

は $\Pi_{BSE}X_\varphi$ の Banach $A$-submodule となります。

## §3 連続ベクトル場

ベクトル場 $\sigma \in \Pi X_\varphi$ の連続性を導入しましょう。その為に空間

$$\amalg X_\varphi = \bigcup_{\varphi \in \Phi_A} \{\varphi\} \times X_\varphi$$

に $\pi(\varphi, x) = (\varphi, \widehat{x}(\varphi))$ $(\varphi \in \Phi_A, x \in X)$ で定義される $\Phi_A \times X$ から $\amalg X_\varphi$ の上への自然な写像 $\pi$ によって導かれる商位相を導入します。ここで $\Phi_A \times X$ は積位相の入った $\Phi_A$ 及び $X$ の積空間を表します。

さて $\varphi_0 \in \Phi_A$ を任意に固定します。もし $\Phi_A$ から $\amalg X_\varphi$ への写像：$\varphi \to (\varphi, \sigma(\varphi))$ が点 $\varphi_0$ で連続のとき、ベクトル場 $\sigma \in \Pi X_\varphi$ は点 $\varphi_0$ で連続であると言います。更に $\Phi_A$ の任意の点で連続であるとき、($\Phi_A$ 上

で) 連続であると言います。$\Pi X_\varphi$ における全ての連続ベクトル場の集合を $\Pi^c X_\varphi$ で表し、

$$\Pi^{cb} X_\varphi = \Pi^c X_\varphi \cap \Pi^b X_\varphi, \Pi^c_{BSE} X_\varphi = \Pi_{BSE} X_\varphi \cap \Pi^c X_\varphi$$

且つ

$$\Pi^{c0}_{BSE} X_\varphi = \Pi^c X_\varphi \cap \Pi^0_{BSE} X_\varphi$$

と置きましょう。このとき BSE-ベクトル場及び BSE-連続ベクトル場を特徴づける次の定理が成り立ちます。これは [9, Theorem 4, (i)] に対応したものであります。

**Theorem 1.** *The space* $\Pi_{BSE} X_\varphi$ (resp. $\Pi^c_{BSE} X_\varphi$) *consists of all* $\sigma \in \Pi X_\varphi$ (resp. $\Pi^c X_\varphi$) *for which there is a bounded net* $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *in* $X$ *such that* $\{\widehat{x_\lambda}(\varphi)\}_{\lambda \in \Lambda}$ *converges weakly to* $\sigma(\varphi)$ *for each* $\varphi \in \Phi_A$.

## §4 乗作用素 (multipliers)

$A$ から $X$ への $A$-module 準同型写像を $X$ の乗作用素と言います。もし $X$ が without order ならば、閉グラフ定理より $X$ の乗作用素は自動的に連続となります。$X$ の全ての乗作用素の集合を $M(A, X)$ によって表しましょう。もし混乱がなければ、これは単に $M(X)$ と書かかれます。各 $x \in X$ に対して

$$L_x(a) = ax \ (a \in A)$$

で定義される $A$ から $X$ への作用素は $X$ の積作用素と呼ばれますが、これは $X$ の有界な乗作用素となります。従って $\{L_x : x \in X\} \subseteq M(X)$ が成り立ちます。また $M(X)$ は自然に $A$-module となります。更に任意の $T \in M(X)$ に対して、$\widehat{Ta} = \hat{a}\widehat{T}$ $(a \in A)$ を満たす連続ベクトル場 $\widehat{T} \in \Pi X_\varphi$ が一意に存在します。また写像 : $T \to \widehat{T}$ は $M(X)$ から $\Pi X_\varphi$ への $A$-module 準同型となり、特に $X$ が半単純ならば、これは 1 対 1 です。我々は $\widehat{T}$ を $T$ の Gelfand 変換と呼びましょう。そのような変換全体の集合を $\widehat{M}(X)$ で表しますと、

$$\widehat{X} = \{\widehat{L_x} : x \in X\} \subseteq \widehat{M}(X)$$

が成り立ちます。また常に $\widehat{M}(X) \subseteq \Pi^c X_\varphi$ も成り立ちますが、$X$ に条件を付けると、$\widehat{M}(X) \subseteq \Pi^b X_\varphi$ も成り立ちます。

ところで、$A$ の net $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が次の条件を満たすとき、それを $\Phi$-弱近似単位元と呼びます：

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}\varphi(u_\lambda)=1\ (\forall\varphi\in\Phi_A).$$

このとき次の命題が成り立ちます。

**Proposition 1.** *If $A$ has a bounded $\Phi$-weak approximate identity, then $\widehat{T}\in\Pi^c_{BSE}X_\varphi$ holds for all bounded multipliers $T$ of $X$.*

## §5 BSE-Banach modules 及び BED-Banach modules

可換 Banach 環の世界では BSE-環及び BED-環が定義されましたが、Banach modules の世界にも同様の定義が出来ます。$A$ を半単純可換 Banach 環、$X$ を Banach $A$-module としましょう。もし $\Pi^c_{BSE}X_\varphi=\widehat{M}(X)$ が成り立つならば、$X$ を BSE-Banach module と呼びます。また $\Pi^{c0}_{BSE}X_\varphi=\widehat{X}$ が成り立つならば、$X$ を BED-Banach module と呼びましょう。勿論これは可換 Banach 環の場合と平行に定義されたものです。

上で述べられた様に一応 BSE-Banach $A$-modules 及び BED-Banach $A$-modules は定義されますが、$A$ に有界近似単位元の存在を仮定しないので、今後の進展は困難が予想されます。その意味ではまだその緒についたばかりと言えます。従って BSE-性及び BED-性による Banach modules の分類はまだまだ先の事になりそうです。

謝辞。This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

## References

[1] F. T. Birtel, On a commutative extension of a Banach algebra, Proc. Amer. Math. Soc., **13**(1962), 815-822.

[2] R. Doss, On the Fourier-Stieltjes transforms of singular or absolutely continuous measures, Math. Z., **97**(1967), 77-84.

[3] R. Doss, On the transform of a singular or absolutely continuous measures, Proc. Amer. Math. Soc., **19**(1968), 361-363,

[4] J. Inoue and S.-E. Takahasi, On characterizations of the image of the Gelfand transform of commutative Banach algebras, Math. Nachr., **280**(2007), 105-126.

[5] J. Inoue and S.-E. Takahasi, Segal algebras in commutative Banach algebras, Rocky Mountain J. Math., **44-2**(2014), 539-589.

[6] J. Inoue and S.-E. Takahasi, A construction of a BSE-algebra of type I which is isomorphic to no C*-algebras, Rocky Mountain J. Math., 47-8(2017), 2693-2697.
[7] J. Inoue, T. Miura, H. Takagi and S.-E. Takahasi, Classification of semisimple commutative Banach algebras of type I, preprint.
[8] D. A. Robbins, BSE Banach modules and bundles of Banach spaces, Houston J. Math., **362-8**(2010), 4331-4356.
[9] S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein type-theorem, Proc. Amer. Math. Soc., **24-3**(1998), 489-505.
[10] S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein type-theorem, Proc. Amer. Math. Soc., **110-1**(1990), 149-158.
[11] Sin-Ei Takahasi, BSE–Banach modules and multipliers, *J. Funct. Analysis*, **125-1** (1994), 67-89.
[12] Sin-Ei Takahasi, On classification of commutative Banach algebras and Banach modules, *Josai Math. Monographs*, **11** (2018) pp. 1-5.

Sin-Ei Takahasi, Yamagata University (Zyonan 4-3-16, Yonezawa 992-8510, Japan)
and
Laboratory of Mathematics and Games (Katsushika 2-371, Funabashi 273-0032, Japan)
sin_ei1@yahoo.co.jp

## 泰嗣さんの思い出

高橋眞映 (山形大学, 数学・ゲーム工房)

「やすじさん」こと高橋泰嗣先生は昨年 5 月 72 歳で急逝されました。三谷健一んさんから電話で知らせて頂いたのですが、奥様のみどりさんが外出先から戻られると、ご自宅のソファーで亡くなられていたそうです。致死性不整脈が原因だったとか。3 月の春の学会で夜一緒に楽しく飲んだばかりだったので、にわかには信じられませんでした。親しい間柄だった僕としては、大変残念で悲しい出来事でした。何時だったか、お宅にお邪魔したおり奥様の手料理をご馳走になりましたが、今となっては懐かしい思い出となりました。

泰嗣さんとの初めての出会いは山口大で学会があったとき、柳研二郎さんの案内で泰嗣さんの研究室に伺ったときと記憶しています。泰嗣さん

は無限次元空間の測度に関する研究などで当時既に著名な数学者だったので、緊張したことを覚えています。

その後 1994 年神戸大で学会があったとき、宿泊していた JR のホテルに誰かが僕に電話してきたそうです。しかしホテルの人が間違って泰嗣さんに取り次、それで彼は同じホテルに僕が泊まっていることを知ったそうです (もしかしたら少し記憶違いがあるかも知れません)。翌日学会で柳さんと泰嗣さんに会ったおり、3 人で六甲に登ろうと言うことになりました。六甲をケーブルで登り、少し歩いたあたりで、僕が囲碁をやることを知った彼は「直ぐ引き返して宿で碁をやろう」と言い出しました。ホテルに戻った僕たちは宿に碁の備えがないことを知り、「JR も教養がないなー」と苦笑したものです。しかし泰嗣さんは直ぐ様碁を買いに行こうと言い出し、二人で梅田駅の中の大丸デパートで碁盤と碁石を買い揃えました。これは自分の大学の研究室に置くから、そのうちまたやろうという事で、彼が全額出しました。確かにその後泰嗣さんの研究室で何回か打ったのですが、あの碁盤と碁石はどうなったのでしょうね。

泰嗣さんとはそれ以来のおつき合いとなりました。殆どの学会や研究集会で宿を共にし、夜はいつも碁を打ったものです。また井上純治先生が参加されたときは 3 人で良く打ちました。碁を打ち終えて布団に入ったとき、良く泰嗣さんからいろいろな数学を教えて頂きました。あるとき寝物語で彼からこの世に Hlawka 不等式なるものが存在することを教えられました。これは平行六面体の 3 面の対角線の和は 3 辺及び対角線の和より小さい事を謳った不等式でした。その後和田州平さんの協力を得て、3 人で Hlawka 不等式に関する面白い論文を書きました (cf. [1, 3])。

また寝物語で泰嗣さんから Djokovic の不等式と言うものを教えて頂きました。これは Hlawka 不等式を拡張したものです。そこで泰嗣さんと本田あおいさんの協力を得て、この不等式に新解釈を与えました。それはこの不等式がある種の閉凸集合の唯一の端点に対応していると言うもので、この不等式に一つの正当性を与えました (cf. [2])。

その後宮島静雄さん、泰嗣さん、高木啓行さんの協力を得て上の新解釈を抽象化する論文をものにしました (cf. [4])。他にも泰嗣さんの示唆で幾つかの共著論文がありますが、これも今となっては懐かしい思い出となりました。

最近藤井正俊さんから、「本当の贅沢はたったひとつしかない。それは人間関係に恵まれることだ。」という事を教わりました。これは星の王子さまで知られた異色の作家サンテックスの名言だそうです。実は昨年 11 月親友だった高木啓行さんが 54 歳で急逝されました。これも悲しい出来

事でしたが、神様は僕の贅沢を一つずつ奪っていくようで残念でなりません。

ところで、スピードスケートの小平奈緒選手が 1000 m で世界記録を出したとき、五輪の抱負で「明日死ぬかのように生きよ。永遠に生きるかのように学べ。」とガンジーの言葉を引いたそうですが、いま思い返しますと、泰嗣さんはそのように生きた数学者だったと思います。

ここに改めて高橋泰嗣先生、高木啓行先生のご冥福をお祈り申し上げます。

## References

[1] Sin-Ei Takahasi,Yasuji Takahashi and Shuhei Wada, An extension of Hlawka's inequality, *Math. Inequal. Appl.*, **3-1** (2000), 63–67.

[2] Sin-Ei Takahasi,Yasuji Takahashi and Aoi Honda, A new interpretation of Djokovic's inequality, *J. Nonlinear and Convex Analysis*, **1-3** (2000), 343–350.

[3] Yasuji Takahashi, Sin-Ei Takahasi and Shuhei Wada, Some convexity constants related to Hlawka type inequalities in Banach spaces, *J. Inequal. Appl.*, **7-1** (2002), 125-141.

[4] Sin-Ei Takahasi, Yasuji Takahashi, Shizuo Miyajima and Hiroyuki Takagi, Convex sets and inequalities, *J. Inequal. Appl.*, **2005-2** (2005), 107–117.