数理解析研究所講究録 第2096巻 2018年 44-49

Cellular automata and their eigenvalues

東洋大学　総合情報学部　　佐藤　忠一

Tadakazu Sato

Department of Information Science and Arts

Toyo University

1．まえがき

一次元セルオートマトンは数学的には記号列上の行列の固有値問題である。固有値問題の行列はふつう複素数体上の行列である。量子力学における固有値問題も無限次元ではあるが関数環上の行列でその成分は可換環である。しかし、セルオートマトンは非可換環上の行列の固有値問題である。セルオートマトンの対象は記号列で乗法は連接である。連接は最も自然な非可換演算である。複素数体上の行列を非可換環上の行列に広げるにはいろいろあるが記号列上の固有値問題は複素数体上の固有値問題の自然な拡張になっている。

セルオートマトンはその振る舞いをあらわす並列写像の性質によって単射、定数対１写像、全射、非全射の４つに大きく分類される。本論文では各クラスの固有値、固有ベクトルについて論じる。

２．諸定義

一次元セルオートマトンCAとは　$CA=<Z,Q,N,f>$の四組で与えられる。ここでZは整数の集合で各オートマトンが配置されている位置の集合表わす。Qは各オートマトンの状態を表す記号列の有限集合、NはZの有限部分集合で近傍と呼ばれる。

局所関数　f：$Q^{|N|}\to Q$　は　$Q=\{a_1,\cdots,a_m\}$, $|N|=n$のとき　m状態、スコープ幅nの局所関数という。$c:Z\to Q$なる写像cを様相といい、各オートマトンの状態の分布を表わす。この様相に局所関数fで一斉に変換すると新しい様相c'は

$$c'(i)=f(c(i),c(i+1),\cdots,c(i+|N|-1))\quad \text{for all}\ \ i\in Z$$

で与えられる。$c\to c'$なる対応を$f_\infty(c)=c'$と書く。　$C(Q)$　で様相の集合を表すと

シフト写像$\sigma:C(Q)\to C(Q)$　は$\sigma(c)(i)=c(i+1)$　で定義される。$k\in Z$　に対して、写像

$\sigma^k f_\infty:C(Q)\to C(Q)$　を並列写像という。

Qの元の連接を乗法とするとQ^*は単位元 1(null word)をもつモノイドである。$w \in Q^*$に対して$|W|$はワードの長さを表す。Cを複素数体とする。Cの元の長さは0である。
$^\forall w \in Q^*$に対してwを反転させたワードを$^t w$と表す。$^\forall r \in C, ^\forall w \in Q^*$ に対して
rw の転置を $^t(rw) = \bar{r}^t w$ と定義する。ここで$\bar{r}$ はr と共役な複素数である。
$^\forall r_1, r_2 \in C, ^\forall w_1, w_2 \in Q^*$に対して$^t(r_1w_1 + r_2w_2) = ^t(r_1w_1) + ^t(r_2w_2)$ と定義する。
$A \in M_{n,m}(Q)$ に対して $A = \{w_{i,j}\}$ の転置行列$^t A$ を$^t A = \{^t w_{j,i}\}$ と定義する。ここで、$w_{i,j} \in R(Q)$ また、2つの列ベクトルu, v に対して内積を$< u, v > = ^t uv$ と定義する。

3. 局所関数の行列表示

m状態スコープ幅nの局所関数$f : Q^n \to Q$ からド・ブルーチングラフを次のよう作る。グラフのノードの集合は Q^{n-1} とする。ノード $x_1 \cdots, x_{n-1}$ から ノード $x_2 \cdots, x_n$ のエッジに $f(x_1 \cdots, x_n)$ の値を付ける。グラフは有向グラフである。このグラフの状態遷移行列を$A(f)$ と書く。この行列のサイズは$m^{n-1} \times m^{n-1}$。モノイドに加法(or)を入れ、加法,乗法に分配の法則を用いてQ^*から記号列上の非可換環$R(Q)$が自然に定義される。$A(f)$ は$R(Q)$ 上の行列である。

例1. m状態スコープ幅2の局所関数$f(x, y)$の行列表現$A(f)$は

$$A(f) = \begin{pmatrix} f(a_1, a_1) & \cdots & f(a_1, a_m) \\ \vdots & & \vdots \\ f(a_m, a_1) & \cdots & f(a_m, a_m) \end{pmatrix}$$

4. 並列写像の性質

並列写像の単射性、全射性を判定するアルゴリズムは1次元のセルオートマトンに限り、知られている[1]。2次元以上のセルオートマトンではそのようなアルゴリズムは存在しないことが知られている[3]。

定理1. fをm状態、スコープ幅nの局所関数とする。$\lambda_m = (a_1 + \cdots + a_m)$とする。
f_∞は単射であるとき次の命題が成り立つ。
(1) $A(f)$は唯一の非零の固有値λ_m を持つ。
(2) $rankA(f)^n = 1$ となる最小の正の整数をkとすると$A(f)^k = v^t u$, ここで
vと$^t u$はそれぞれ$A(f)$の固有値λ_mの列固有ベクトルと行固有ベクトルである。
またそれらの内積は$^t uv = {\lambda_m}^k$
注意1. 上記の定理は局所関数のスコープ幅 nには無関係で状態数 mだけで決まる。

例２．単射である例を示す。

$$A(f)=\begin{pmatrix} a_4,a_4,a_2,a_2 \\ a_1,a_1,a_3,a_3 \\ a_4,a_4,a_2,a_2 \\ a_1,a_1,a_3,a_3 \end{pmatrix}$$ を状態遷移行列とする。

$A(f)$の列固有ベクトルと行固有ベクトルを求めると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} a_4,a_4,a_2,a_2 \\ a_1,a_1,a_3,a_3 \\ a_4,a_4,a_2,a_2 \\ a_1,a_1,a_3,a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2+a_4 \\ a_1+a_3 \\ a_2+a_4 \\ a_1+a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2+a_4 \\ a_1+a_3 \\ a_2+a_4 \\ a_1+a_3 \end{pmatrix}(a_1+a_2+a_3+a_4)$$

$$(a_1+a_4,a_1+a_4,a_2+a_3,a_2+a_3)\begin{pmatrix} a_4,a_4,a_2,a_2 \\ a_1,a_1,a_3,a_3 \\ a_4,a_4,a_2,a_2 \\ a_1,a_1,a_3,a_3 \end{pmatrix}$$

$$=(a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1+a_4,a_1+a_4,a_2+a_3,a_2+a_3)$$

$$\therefore A(f)^2=\begin{pmatrix} a_2+a_4 \\ a_1+a_3 \\ a_2+a_4 \\ a_1+a_3 \end{pmatrix}(a_1+a_4,a_1+a_4,a_2+a_3,a_2+a_3)$$

また、行ベクトルと列ベクトルの内積は

$$(a_1+a_4,a_1+a_4,a_2+a_3,a_2+a_3)\begin{pmatrix} a_2+a_4 \\ a_1+a_3 \\ a_2+a_4 \\ a_1+a_3 \end{pmatrix}=(a_1+a_2+a_3+a_4)^2$$

並列写像が定数対１写像とは適当な正の整数 k に対して、任意の様相の並列写像による原像の集合の個数が常に k 個になることである。f が x_j で置換的であるとは x_j 以外の変数を固定して x_j のみの 1 変数関数としたときそれが置換的(単射)になることである[2]。

命題 1. f を m 状態スコープ幅 n の局所関数とする。$f(x_1,\cdots,x_n)$ が x_1 で置換的でかつ x_n で置換的ならば f_∞ は m^{n-1} 対１写像である。

定理２．m を正の整数とする。$f(x,y)=x+(m-1)y \mod m$ の線形局所関数の並列写像は m 対１写像であり，$A(f)$ はスペクトル分解される。

$$A(f)=\begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_m & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & a_m & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & a_m \end{pmatrix},\qquad P\equiv\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ とおくと

$A(f)=a_m I+a_{m-1}P+a_{m-2}P^2+\cdots+a_1 P^{m-1}$,
ここで$P^m=I, G=\{P^k \mid k=1,\cdots,m\}$は可換群。
従って，各p^k（$k=1,\cdots,m$）は同時に対角化され、次式のようにスペクトル分解される。
$P=e^{i2\pi/m}E_1+\cdots+(e^{i2\pi/m})^j E_j+\cdots+(e^{i2\pi/m})^m E_m$ より
$P^k=(e^{i2\pi/m})^k E_1+\cdots+(e^{i2\pi/m})^{jk}E_j+\cdots+(e^{i2\pi/m})^{mk}E_m$,
ここで $I=E_1+\cdots+E_m$，$E_jE_k=E_kE_j=E_k\delta_{j,k}$
故に $A(f)=\sum_{k=0}^{m-1}a_{m-k}P^k=\sum_{k=0}^{m-1}a_{m-k}\sum_{j=1}^{m}(e^{i2\pi/m})^{jk}E_j$，ここで、$\lambda_j=\sum_{k=0}^{m-1}a_{m-k}(e^{i2\pi/m})^{jk}$ とおくと
$A(f)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m-1}a_{m-k}(e^{i2\pi/m})^{jk}E_j=\sum_{k=1}^{m}\lambda_j E_j$

5 セルオートマトンの直和

定義　$A=\{a_{i,j}\}\in M_n(Q_1), B=\{b_{k,\ell}\}\in M_m(Q_2)$に対して，$A\otimes B\in M_{nm}(Q_1\oplus Q_2)$は
$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B,\cdots,a_{1n}B \\ \vdots\ \ddots\ \ \vdots \\ a_{n1}B,\cdots,a_{nn}B\end{pmatrix}$で与えられる。ここで、$a_{ij}B=\begin{pmatrix}(a_{ij},b_{11}),\cdots,(a_{ij},b_{1m}) \\ \vdots\ \ \ddots\ \ \vdots \\ (a_{ij},b_{m1}),\cdots,(a_{ij},b_{mm})\end{pmatrix}$とする。

性質１．テンソル積は次の性質を持つ。
（１）$A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C$
（２）$(A+B)\otimes C=A\otimes C+B\otimes C$
（３）$(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD$
（４）${}^t(A\otimes B)={}^tA\otimes{}^tB$
（５）$tr(A\otimes B)=(trA,trB)$
（６）$\lambda(A\otimes B)_{i,j}=(\lambda(A)_i,\lambda(B)_j)$
ここで$\lambda(A)_i$はAのi番目の固有値である。

２つの１次元セルオートマトン$CA_1=<Z,Q_1,n_1,f_1>$と $CA_2=<Z,Q_2,n_2,f_2>$の直和は次のように与えられる。
$CA_1\oplus CA_2=<Z,Q_1\times Q_2,(n_1,n_2),f_1\oplus f_2>$
その状態遷移行列は$A(f_1\oplus f_2)=A(f_1)\otimes A(f_2)$で与えられる。ここで右辺はテンソル積である。

性質２．$(f_1)_\infty$をk_1対１写像、$(f_2)_\infty$をk_2対１写像のとき、$(f_1\oplus f_2)_\infty$は$k_1 k_2$対１写像である。

例３．$f(x,y)=x+y \bmod 2$をスコープ幅２の線形局所関数とし$(f\oplus f)$を考える。２対１写像の直和なので並列写像は４対１写像である。$0\leftrightarrow a_2$, $1\leftrightarrow a_1$で符号化する

と状態遷移行列は $A(f) = \begin{pmatrix} a_2, a_1 \\ a_1, a_2 \end{pmatrix}$,

$A(f)$ の２つの固有値 γ_1, γ_2 は $\gamma_1 = a_2 - a_1$,　$\gamma_2 = a_1 + a_2$ でこれらの固有ベクトル

v_1, v_2 は　$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,　$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,　${}^t v_i v_j = \delta_{i,j}, E_j = v_j {}^t v_j (j = 1,2)$ より、

$$A(f) = \gamma_1 v_1 {}^t v_1 + \gamma_2 v_2 {}^t v_2 = \gamma_1 E_1 + \gamma_2 E_2$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}(a_2 - a_1) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(a_2 + a_1)$$

直和の遷移行列はテンソル積で表されるので

$$A(f) \otimes A(f) = \begin{pmatrix} (a_2,a_2),(a_2,a_1),(a_1,a_2),(a_1,a_1) \\ (a_2,a_1),(a_2,a_2),(a_1,a_1),(a_1,a_2) \\ (a_1,a_2),(a_1,a_1),(a_2,a_2),(a_2,a_1) \\ (a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_1),(a_2,a_2) \end{pmatrix}$$

$A(f) \otimes A(f)$ の４つの固有値は

$$\lambda_1 = (a_2,a_2) - (a_2,a_1) - (a_1,a_2) + (a_1,a_1)$$
$$\lambda_2 = (a_2,a_2) + (a_2,a_1) - (a_1,a_2) - (a_1,a_1)$$
$$\lambda_3 = (a_2,a_2) - (a_2,a_1) + (a_1,a_2) - (a_1,a_1)$$
$$\lambda_4 = (a_2,a_2) + (a_2,a_1) + (a_1,a_2) + (a_1,a_1)$$

性質１の（４）より $\lambda_1 = (\gamma_1,\gamma_1)$, $\lambda_2 = (\gamma_1,\gamma_2)$, $\lambda_3 = (\gamma_2,\gamma_1)$, $\lambda_4 = (\gamma_2,\gamma_2)$ が成立。

一方、$A(f) \otimes A(f)$ のスペクトル分解は

$$A(f) \otimes A(f)$$
$$= (\gamma_1 E_1 + \gamma_2 E_2) \otimes (\gamma_1 E_1 + \gamma_2 E_2)$$
$$= (\gamma_1,\gamma_1)(E_1 \otimes E_1) + (\gamma_1,\gamma_2)(E_1 \otimes E_2) + (\gamma_2,\gamma_1)(E_2 \otimes E_1) + (\gamma_2,\gamma_2)(E_2 \otimes E_2)$$
$$= \frac{\lambda_1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_3}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_4}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

定理３．f を m 状態スコープ幅 n の局所関数とする。
$\lambda = (a_1 + \cdots + a_m)$ のとき次の命題は等価である。
（１）f_∞ は全射である。
（２）$A(f)$ は固有値 λ を持つ。

系１．並列写像は単射であれば全射である。

例４．定数対１写像でない全射の例

$$A(f)=\begin{pmatrix} a, a, c \\ b, b, b \\ c, c, a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a,a,c \\ b,b,b \\ c,c,a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c \\ 0 \\ a-c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}(a-c),\quad \begin{pmatrix} a,a,c \\ b,b,b \\ c,c,a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より、

固有値 $a-c$ と０の固有ベクトルはヌルワードで表現される。
次に固有値$\lambda=a+b+c$ の固有ベクトルを求める。
x は$x\lambda=\lambda x$を満たす任意のノンゼロの式。z を次式で定義すると

$$z=\sum_{k=0}^{\infty}(a-c)^k cx\lambda^{-1}\lambda^{-k}$$

$\lambda=a+b+c$の固有ベクトルは

$$v=\begin{pmatrix} (1-b\lambda^{-1})x-z \\ b\lambda^{-1}x \\ z \end{pmatrix}$$ となる。

６．参考文献

[1] S. Amoroso and Y. N. Patt, Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures. J.Comput.Systems Sci.6 (1972),448-464.

[2] G. A. Hedlund, Endomorphisms and automorphisms of shift dynamical systems. Mathematical systems Theory 3 (1969), 320-375.

[3] J. Kari, Reversibility and surjectivity problems of cellular automata, J. Comput.System Sci. 48 (1) (1994), 149-182.