数理解析研究所講究録 第2098巻 2018年 21-27

トーラス上のベクトル束の間の Pin(2) 同変写像と KO 写像度

東京大学・数理科学研究科　大橋　耕
Ko Ohashi
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1　はじめに

本稿の目的は古田幹雄氏（東大数理）と亀谷幸生氏（慶應理工）との共同研究の内容の予報をすることである。G をコンパクトリー群、B をコンパクトハウスドルフ G 空間、V と W を B 上の G ベクトル束とする。

問. V から W へのファイバーを保つ、固有な G 同変写像 $\phi : V \to W$ が存在するか。ここで ϕ が固有であるとは、W の任意のコンパクト集合の ϕ による逆像が V のコンパクト集合となることをいう。

例えば Borsuk-Ulam の定理は群 G が位数 2 の巡回群 C_2、底空間 B が 1 点からなる空間 pt であり、V, W がそれぞれ $\tilde{\mathbb{R}}^m, \tilde{\mathbb{R}}^n$ である場合に、C_2 同変写像 $\phi : V \to W$ の存在の必要十分条件を与えた定理とみなせる。ここで $\tilde{\mathbb{R}}$ は C_2 の非自明な 1 次元既約表現であり、C_2 の生成元による $\tilde{\mathbb{R}}$ への作用は (-1) 倍で定義されている。

本稿では、群 G が Pin(2)、底空間 B が n 次元トーラス $\tilde{T}^n$ である場合を考える。ここで Pin(2) は大きさ 1 の四元数全体がなす乗法群の部分群 $S^1 \cup jS^1$ として定義される（S^1 は大きさ 1 の複素数全体がなす集合を表す）。トーラス $\tilde{T}^n$ には次で Pin(2) 作用を定めている。すなわち、S^1 の要素 z は自明に作用させ、j は $j \cdot x = -x$ $(x \in \tilde{T}^n)$ で作用させる。主結果では、いくつかの仮定のもとで $\tilde{T}^n$ 上の Pin(2) ベクトル束 V から Pin(2) ベクトル束 W へのファイバーを保つ固有な Pin(2) 同変写像が存在する必要条件を、V と W の「差」が定める不変量の間の不等式として与える。

主結果の背景は 4 次元トポロジーにある。X を 4 次元連結閉スピン C^∞ 多様体とし、その交叉形式は不定値であるとする（X の 1 次ベッチ数 $b_1(X)$ は 0 とは限らない）。X から得られるモノポール写像を有限次元近似することで、トーラス $H^1(X;\mathbb{R})/H^1(X;\mathbb{Z})$ 上の有限次元 Pin(2) ベクトル束の間のファイバーを保つ固有な Pin(2) 同変写像 $\phi : V \to W$ が得られることが知られている。この状況が主結果のモデルとなっている。そして主結果の応用として、スピン多様体 X の不変量の間の不等式が得られる。

主結果の証明では同変写像の存在から導かれる同変 KO 理論におけるオイラー類と写像度の関係式（KO オイラー類の整除関係）を用いる。トーラスの同変 KO 群におけるその関係式を具体的に書き下すことで主結果は示される。

本稿の構成は次の通りである。2 章では同変 KO 理論のオイラー類と写像度の定義を述べたあと、それらの間の関係式（命題 2.6）を述べる。3 章において主結果（定理 3.3）および 4 次元トポロジーへの応用を述べる。4 章では主結果の証明の概要を述べる。

2　準備

2.1　同変 KO 理論におけるオイラー類と写像度

この節では，次章以降で用いる同変 KO 理論の道具を準備する。はじめにトム同型定理を述べたあと、同変 KO 理論のオイラー類（KO オイラー類）と写像度（KO 写像度）の定義を述べ、KO オイラー類と KO 写像度の関係式を与える。本節の議論は、特異コホモロジー理論の場合と並行したものであるが、KO オイラー類と KO 写像度は主結果の証明において重要な役割を果たすため、以下にまとめた。本節では B をコンパクトハウスドルフ G 空間とし、B 上のベクトル束 V に対して、V の 1 点コンパクト化 V^+ の簡約同変 KO 群 $\widetilde{\mathrm{KO}}_G^*(V^+)$ を単に $\mathrm{KO}_G^*(V)$ とかく。

定理 2.1 (Atiyah)**.** B 上のスピン G ベクトル束 $\pi: V \to B$ に対して、$\mathrm{KO}_G^{\dim_{\mathbb{R}} V}(V)$ の要素 $\mathrm{t}_{\mathrm{KO}}(V)$ が定まり、写像

$$\mathrm{KO}_G^*(B) \to \mathrm{KO}_G^{*+\dim_{\mathbb{R}} V}(V), \quad x \mapsto \pi^*(x)\tau$$

が全単射となる。本稿では $\mathrm{t}_{\mathrm{KO}}(V)$ を KO トム類とよぶ。

定義 2.2. B 上のスピン G ベクトル束 V に対して、その KO トム類 $\mathrm{t}_{\mathrm{KO}}(V)$ の G 切断 $s: B \to V$ による引き戻し $s^* \mathrm{t}_{\mathrm{KO}}(V) \in \mathrm{KO}_G^{\dim_{\mathbb{R}} V}(B)$ を V の KO オイラー類とよび、$\mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(V)$ とかく。

注意 2.3. 任意の G 切断はホモトピックであることから、KO オイラー類は G 切断 s の取り方によらずに定まっている。

定義 2.4. V, W を B 上のスピン G ベクトル束とする。固有な G 同変写像 $\phi: V \to W$ に対し、次の等式を満たす $\mathrm{KO}_G^{\dim_{\mathbb{R}} W - \dim_{\mathbb{R}} V}(B)$ の要素 ξ がただ一つ存在する。

$$\pi^*(\xi)\, \mathrm{t}_{\mathrm{KO}}(V) = \phi^*\, \mathrm{t}_{\mathrm{KO}}(W) \tag{1}$$

この要素 ξ を $\phi: V \to W$ の KO 写像度とよび、$\deg_{\mathrm{KO}}(\phi)$ とかく。

注意 2.5. 写像 ϕ が固有であることから、ϕ は $\mathrm{KO}_G^*(W)$ から $\mathrm{KO}_G^*(V)$ への準同型を誘導することに注意する。また ξ の存在とその一意性は定理 2.1 から従う。

次の命題は主結果の証明の鍵となる。

命題 2.6. V_0, V_1, W_0, W_1 を B 上のスピン G ベクトル束とする。スピン G ベクトル束の間のファイバーを保つ固有な G 同変写像

$$\phi: V_0 \oplus V_1 \to W_0 \oplus W_1$$

が $\phi(V_0) \subset W_0$ を満たすとする。このとき、次の等式が成り立つ。

$$\deg_{\mathrm{KO}}(\phi)\, \mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(V_1) = \mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(W_1) \deg_{\mathrm{KO}}(\phi_0) \tag{2}$$

ただし、ϕ_0 は ϕ の V_0 への制限 $\phi|_{V_0}: V_0 \to W_0$ を表す。

2.2　sp 束と Ksp 群

この節では sp 束と Ksp 群の定義を思い出したあと、$\tilde{\mathbb{R}}^n$ と $\tilde{T}^n$ の Ksp 群の計算結果を述べる。本節の内容は主結果の仮定の中で用いられる。位数 2 の巡回群を C_2 とかく。

定義 2.7 (Dupont)**.** B を C_2 空間とし、$j_B : B \to B$ によって C_2 の生成元による作用を表すとする。B 上の複素ベクトル束 V とその上の antilinear map $J : V \to V$ の組 (V, J) であって、次の 2 つの性質を満たすものを B 上の sp 束とよぶ。

1. $J : V \to V$ は $j_B : B \to B$ の射影 $\pi : V \to B$ に関する持ち上げとなっている。つまり、$\pi \circ J = j_B \circ \pi$ が成り立つ。
2. $J \circ J$ は $-\mathrm{id}_V$ に等しい。

しばしば antilinear map J を省略して、sp 束 (V, J) を V とかく。

定義 2.8.

1. B をコンパクトハウスドルフ C_2 空間とする。このとき、B 上の sp 束の同型類が直和に関してなす可換モノイドのグロタンディーク群を Ksp 群とよび、$\mathrm{Ksp}(B)$ とかく。KO 理論と同様にして、Ksp 群もコンパクトハウスドルフ C_2 空間がなす圏からアーベル群がなす圏への反変関手を定める。B 上の sp 束 V が定める $\mathrm{Ksp}(B)$ の要素を $[V]$ とかく。
2. 局所コンパクトハウスドルフ C_2 空間 U に対して、compact supported Ksp 群 $\mathrm{Ksp}_c(U)$ を
$$\mathrm{Ksp}_c(U) = \mathrm{Ker}\left[\mathrm{Ksp}(U^+) \to \mathrm{Ksp}(\{\infty\})\right]$$
で定める。ここで $U^+ = U \cup \{\infty\}$ は U の 1 点コンパクト化を表す。

注意 2.9.

1. sp 束は 1969 年に Dupont [1] によって定義された。文献によっては symplectic (vector) bundle とよぶこともあるが、symplectic geometry の用語との混同を避けるために本稿では sp 束に統一した。
2. 一般には sp 束と $\mathbb{H}$ ベクトル束は異なる概念であり、Ksp 群と KSp 群は（表記は似ているが）同型とは限らない（KSp 群は $\mathbb{H}$ ベクトル束のグロタンディーク群を表す）。ただし底空間 B への C_2 作用が自明ならば、sp 束と $\mathbb{H}$ ベクトル束の間には自然な 1 対 1 対応が存在し、$\mathrm{Ksp}(B)$ と $\mathrm{KSp}(B)$ は同型となる。

例 2.10. C_2 空間 B 上の sp 束 $B \times \mathbb{H}_{\mathrm{sp}}$ を次で定める。複素ベクトル束としては $B \times \mathbb{H}$ であり、その上の antilinear map J を $J(b, q) = (j_B(b), jq), (b, q) \in B \times \mathbb{H}$ で定める。

底空間 B が 1 点からなる空間 pt であるとき、pt 上の任意の sp 束 V は $\mathbb{H}_{\mathrm{sp}}^m,\ m = (1/2)\dim_{\mathbb{C}} V$ と同型である。したがって $\mathrm{Ksp}(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}[\mathbb{H}_{\mathrm{sp}}]$ が成り立つ。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ とトーラス T^n 上にそれぞれ involution を (-1) 倍によって定義することで C_2 空間とみて、$\tilde{\mathbb{R}}^n,\ \tilde{T}^n$ とかく。

命題 2.11. $\tilde{\mathbb{R}}^n$ の Ksp 群は
$$\mathrm{Ksp}_c(\tilde{\mathbb{R}}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n \equiv 0, 4 \mod 8 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n \equiv 2, 3 \mod 8 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
で与えられる。

命題 2.12. $\tilde{T}^n$ の Ksp 群は
$$\mathrm{Ksp}(\tilde{T}^n) \cong \bigoplus_{S \subset [n]} \mathrm{Ksp}_c(\tilde{\mathbb{R}}^S)$$
で与えられる。ただし、$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ であり、$\tilde{\mathbb{R}}^S$ は S から $\tilde{\mathbb{R}}$ への写像全体がなす C_2 空間を表すとする。

命題 2.13. B 上の sp 束 (V, J) は、sp 束の構造を忘れて実ベクトル束とみたときに、自然に $\mathrm{Pin}(2)$ ベクトル束の構造を持つ。まず底空間 B には準同型 $\mathrm{Pin}(2) \to \mathrm{Pin}(2)/S^1 = C_2$ から誘導される $\mathrm{Pin}(2)$ 作用を定める。そして実ベクトル束 V への $\mathrm{Pin}(2)$ の作用を

$$z \cdot v = zv, \quad j \cdot v = J(v) \quad (z \in S^1, v \in V)$$

によって定める。ただし、1 つ目の式の右辺は複素ベクトル束としてのスカラー倍を表す。

例 2.14. 1 点からなる空間 pt 上の sp 束 $\mathbb{H}_{\mathrm{sp}}$ に対して、命題 2.13 により $\mathrm{Pin}(2)$ 表現とみたものを $\mathbb{H}_1$ とかく。これは $\mathrm{Pin}(2)$ の $\mathbb{H}$ への掛け算による表現に等しい。

3 主結果とその応用

3.1 主結果

はじめに主結果で用いる記号を述べる。

1. l を正の整数とし、n を 0 以上の整数とする。
2. 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を $[n]$ とかく。$n = 0$ に対しては $[0] = \{\emptyset\}$ とおく。
3. 四元数体 $\mathbb{H}$ の部分集合 $S^1 \cup jS^1$ に、$\mathbb{H}$ の乗法によって演算を定めた群を $\mathrm{Pin}(2)$ とかく。
4. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に次で $\mathrm{Pin}(2)$ 作用を定めたものを $\tilde{\mathbb{R}}^n$ とかく。
$$z \cdot x = x, \quad j \cdot x = -x \quad (z \in S^1, x \in \mathbb{R}^n)$$
5. n 次元トーラス $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ に $\tilde{\mathbb{R}}^n$ から誘導される $\mathrm{Pin}(2)$ 作用を定めたものを $\tilde{T}^n$ とかく。
6. V_0 と W_0 を $\tilde{T}^n$ 上の $\mathrm{Pin}(2)$ 同変ベクトル束
$$V_0 = \tilde{T}^n \times \tilde{\mathbb{R}}^x, \quad W_0 = \tilde{T}^n \times (\tilde{\mathbb{R}}^l \oplus \tilde{\mathbb{R}}^x)$$
として定義する。
7. V_1 と W_1 を $\tilde{T}^n$ 上の sp 束とする。また、V_1 と W_1 から定まる $\mathbb{R}$ 上の $\mathrm{Pin}(2)$ ベクトル束も V_1, W_1 とかく（命題 2.13 参照）。
8. 整数 k を
$$k = \frac{1}{2}(\mathrm{rank}_{\mathbb{C}} V_1 - \mathrm{rank}_{\mathbb{C}} W_1)$$
で定める。
9. W_1 と V_1 の差として Ksp 不変量 $[W_1] - [V_1] \in \mathrm{Ksp}(\tilde{T}^n)$ が定まる。命題 2.12 を用いると、
$$[W_1] - [V_1] = \sum_{S \subset [n]} a_S \in \mathrm{Ksp}(\tilde{T}^n) \cong \bigoplus_{S \subset [n]} \mathrm{Ksp}_c(\tilde{\mathbb{R}}^S)$$
と分解できる。命題 2.11 から不変量 a_S は
$$a_S \in \begin{cases} \mathbb{Z} & |S| \equiv 0, 4 \bmod 8 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & |S| \equiv 2, 3 \bmod 8 \\ \{0\} & \text{otherwise} \end{cases}$$
とみなせる。

注意 3.1. k が整数であることは次のようにしてわかる。底空間 $\tilde{T}^n$ は固定点をもつ。固定点上のファイバーには sp 束の構造から $\mathbb{H}$ 上のベクトル空間の構造が定まるので、特に V_1, W_1 の次元 $\dim_{\mathbb{C}} V_1, \dim_{\mathbb{C}} W_1$ は偶数である。従って、k は整数である。

定義 3.2. S を $[n]$ の部分集合とする。

1. 非負整数 m に対し $N_m(S)$ を、次の条件を満たす $[n]$ の部分集合の族 $\{S_1, \ldots, S_m\}$ の数として定める。
$$S_i \neq S_j \ (i \neq j),\ |S_i| \in \{2,3,4\},\ S = S_1 \cup \cdots \cup S_m,\ a_{S_i} \neq 0 \in \mathrm{Ksp}(\tilde{\mathbb{R}}^S) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
2. 整数 $N(S)$ を次式で定める。
$$N(S) = \sum_{m=0}^{\infty} (-2)^m N_m(S) \tag{3}$$

次の定理が本稿の主結果である。

定理 3.3. ファイバーを保つ固有な Pin(2) 同変写像 $\phi : V_0 \oplus V_1 \to W_0 \oplus W_1$ が与えられ、次の仮定 $1, 2$ が成り立つとする。

仮定 1　任意の部分集合 $S \subset [n]$ に対して、$|S| > 4$ ならば $a_S = 0$ が成り立つ。
仮定 2　写像 $\phi : V_0 \oplus V_1 \to W_0 \oplus W_1$ は $\phi(V_0) \subset W_0$ をみたす。さらに $\phi|_{V_0} : V_0 \to W_0$ は各ファイバー上、包含写像 $\tilde{\mathbb{R}}^x \hookrightarrow \tilde{\mathbb{R}}^{x+l}$ で与えられる。

このとき、$[n]$ の部分集合 S に対して、不等式
$$l \geq 2k + |S| - 2\nu_2(N(S)) + \varepsilon(k + \nu_2(N(S)), l, |S|) \tag{4}$$
が成り立つ。ここで $\nu_2(N(S))$ は 2^ν が $N(S)$ を割り切る最大の自然数 ν を表す。自然数 $\varepsilon(\tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{s})$ $(\tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{s} \in \mathbb{Z})$ は $\tilde{s}$ が偶数のとき
$$\varepsilon(\tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{s}) = \begin{cases} 1 & \tilde{k} \equiv 0 \bmod 4 \text{ and } (\tilde{l}, \tilde{s}) = (2,0) \\ 3 & \tilde{k} \equiv 0 \bmod 4 \text{ and } (\tilde{l}, \tilde{s}) \neq (2,0) \\ 1 & \tilde{k} \equiv 1 \bmod 4 \\ 2 & \tilde{k} \equiv 2 \bmod 4 \\ 3 & \tilde{k} \equiv 3 \bmod 4 \end{cases} \quad \text{for } \tilde{s} \text{ even}$$
によって定義され、$\tilde{s}$ が奇数のとき
$$\varepsilon(\tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{s}) = \begin{cases} 2 & \tilde{k} \equiv 0 \bmod 4 \\ 1 & \tilde{k} \equiv 1 \bmod 4 \\ 2 & \tilde{k} \equiv 2 \bmod 4 \\ 2 & \tilde{k} \equiv 3 \bmod 4 \end{cases} \quad \text{for } \tilde{s} \text{ odd}$$
によって定義される。

3.2　応用

1 章で述べた通り、主結果の目的の 1 つは 4 次元トポロジーへの応用である。X を 4 次元連結閉スピン C^∞ 多様体とし、その交叉形式は不定値であるとする。$l = b_2^+(X), k = -\mathrm{sign}(X)/16$ とおく。必要ならば向きを変えることで $l > 0,\ k \geq 0$ としてよい。X のモノポール写像の有限次元近似の 1 つを $\phi_X : V \to W$ とおき、V と W から定まる Ksp 不変量を $\{a_S(X)\}_S$ とかく。不変量 $a_S(X)$ には幾何的な計算方法がある。

定義 3.4. 基点 $x_0 \in X$ を取り、Albanese map $\rho : X \to \mathrm{Hom}(H^1(X;\mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ を
$$\rho(x) : [\omega] \mapsto \int_{x_0}^{x} \omega \bmod \mathbb{Z}$$
によって定義する。

$H^1(X;\mathbb{Z})$ の基底 $\{x_1,\dots,x_n\}$ を 1 つ固定する。$\{x_s\}_{s\in[n]\setminus S}$ が生成する $H^1(X;\mathbb{Z})$ の部分群を L_S とおき、$T_S=\mathrm{Hom}(L_S,\mathbb{R}/\mathbb{Z})\subset \mathrm{Hom}(H^1(X;\mathbb{Z}),\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ とおく。必要ならば写像 ρ を、L_S と横断的である ρ とホモトピックな写像と取り換えることで、$\Sigma_S=\rho^{-1}(L_S)$ は X の $(4-|S|)$ 次元部分多様体としてよい。X のスピン構造から Σ_S のスピン構造が定まる。

定理 3.5. このとき、同型 $\mathrm{Ksp}(\tilde{\mathbb{R}}^S)\cong \mathrm{KO}^{|S|-4}(\mathrm{pt})$ のもとで不変量 $a_S(X)$ は

$$a_S(X)=\alpha([\Sigma_S])$$

で与えられる。ただし、α は α-invariant $\alpha:\Omega_*^{\mathrm{spin}}\to \mathrm{KO}^{-*}(\mathrm{pt})$ を表す。特に $|S|>4$ ならば $a_S(X)$ は 0 に等しい。

注意 3.6. 構成方法から V,W はそれぞれ、微分形式がなす空間の近似である実ベクトル束とスピノール束の切断がなす空間の近似である sp 束に分解されることがわかる。仮定 1 が満たされていることは定理 3.5 からわかる。仮定 2 が満たされていることはモノポール写像の性質からわかる。したがって、定理 3.3 を $\phi_X:V\to W$ に対して適用できる。

系 3.7. X を 4 次元連結閉スピン C^∞ 多様体で、交叉形式が不定値で、$b_2^+(X)>0$ を満たすものとする。このとき、次の不等式が成り立つ。

$$b_2^+(X)\geq -\frac{\mathrm{sign}(X)}{8}+|S|-2\nu_2(N(S))+\varepsilon(k+\nu_2(N(S)),l,|S|) \tag{5}$$

特に $S=\emptyset$ の場合として

$$b_2^+(X)\geq -\frac{\mathrm{sign}(X)}{8}+\varepsilon(k,l,0) \tag{6}$$

を得る。

注意 3.8. 不等式 (6) は M. Furuta [2] の不等式の精密化となっている。$k\equiv 2,3 \bmod 8$ の場合は、N. Minami [4], B. Schmidt [5] によって（独立に）初めて証明された。$k\equiv 0 \bmod 8$ の場合は、J. Lin [3] によって同変 KO 群と Adams 作用素を用いた証明が与えられている。不等式 (5) は不等式 (6) の $b_1(X)>0$ の場合の精密化を与えている。

4　証明の概要

本章では次の命題の証明のスケッチを述べる。

命題 4.1. $l\equiv x\equiv 0 \bmod 4$ かつ $n=0$ のとき、不等式

$$l\geq 2k+\begin{cases}2 & l-4k\equiv 0 \mod 8\\ 4 & l-4k\equiv 4 \mod 8\end{cases} \tag{7}$$

が成り立つ。

注意 4.2. この命題は主結果よりも弱い主張ではあるが、証明の流れは同じである（主結果の証明には技術的な議論と複雑な計算が含まれており、議論の見通しをよくするために、命題 4.1 の証明をスケッチすることにした）。

まず $n=0$ から底空間 $\tilde{T}^n$ は 1 点からなる空間 pt に等しく、l が 4 の倍数であることから $\tilde{\mathbb{R}}^l=\mathbb{H}\otimes\tilde{\mathbb{R}}^{l/4}$ には $\mathbb{H}$ ベクトル空間の構造から誘導されるスピン $\mathrm{Pin}(2)$ 構造が定まることに注意する。証明は 3 つのステップに分けられる。

ステップ 1　まず、V_1 と W_1 の同型類を不変量 $\{a_S\}_{S\subset[n]}$ を用いて表す。いま、$n=0$ を仮定したので非自明な不変量は $a_\emptyset=-k$ のみであり、例 2.10 から同型

$$V_1\cong\mathbb{H}_{\mathrm{sp}}^{y+k},\quad W_1\cong\mathbb{H}_{\mathrm{sp}}^{y},\quad y=\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}}W_1 \tag{8}$$

がわかる。この表示を用いて、Pin(2) ベクトル束 V_1 と W_1 に $\mathbb{H}$ ベクトル空間の構造から誘導されるスピン構造を定める。

ステップ 2　KO 写像度と KO オイラー類の関係式を導出する。まず命題 2.6 を、与えられた Pin(2) 同変写像 $\phi: V_0\oplus V_1\to W_0\oplus W_1$ に適用することで

$$\deg_{\mathrm{KO}}(\phi)\,\mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(V_1)=\mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(W_1)\deg_{\mathrm{KO}}(\phi_0)\in\mathrm{KO}_{\mathrm{Pin}(2)}^{l+4y}(\mathrm{pt}) \tag{9}$$

を得る。仮定 2 から $\phi_0: V_0\to W_0$ の写像度は

$$\deg_{\mathrm{KO}}(\phi_0)=\mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(\tilde{\mathbb{R}}^l)$$

に等しい。表示 (8) と例 2.14 から、

$$\mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(V_1)=\mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(\mathbb{H}_1)^{y+k},\quad \mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(W_1)=\mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(\mathbb{H}_1)^{y}$$

となる。これらを合わせれば、関係式 (9) は

$$\deg_{\mathrm{KO}}(\phi)\,\mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(\mathbb{H}_1)^{y+k}=\mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(\mathbb{H}_1)^{y}\,\mathrm{e}_{\mathrm{KO}}(\tilde{\mathbb{R}}^l) \tag{10}$$

となる。

ステップ 3　式 (10) から $\deg_{\mathrm{KO}}(\phi)$ を具体的に決定する。$l+4y$ が 4 の倍数であることから、複素化

$$\mathrm{KO}_{\mathrm{Pin}(2)}^{l+4y}(\mathrm{pt})\to\mathrm{K}_{\mathrm{Pin}(2)}^{l+4y}(\mathrm{pt})\cong\mathrm{R}(\mathrm{Pin}(2))$$

は単射となる。そこで式 (10) を複素化し、表現の指標の議論に帰着することで次の表示を得る。

$$\deg_{\mathrm{KO}}(\phi)=\begin{cases}\pm2^{l/2-k-1}([\mathbb{R}]-[\tilde{\mathbb{R}}])\mathrm{b}_{\mathbb{R},l-4k} & l-4k\equiv0 \bmod 8\\ \pm2^{l/2-k-2}([\mathbb{R}]-[\tilde{\mathbb{R}}])\mathrm{b}_{\mathbb{R},l-4k} & l-4k\equiv4 \bmod 8\end{cases}$$

ここで $([\mathbb{R}]-[\tilde{\mathbb{R}}])\mathrm{b}_{\mathbb{R},l-4k}$ は実表現環 RO(Pin(2)) の要素 $[\mathbb{R}]-[\tilde{\mathbb{R}}]$ と $\mathrm{KO}^{l-4k}(\mathrm{pt})\cong\mathbb{Z}$ の生成元 $\mathrm{b}_{\mathbb{R},l-4k}$ の積が定める $\mathrm{KO}_{\mathrm{Pin}(2)}^{l-4k}(\mathrm{pt})$ の要素を表している。特に基底の係数が整数となることから、不等式 (7) がしたがう。 □

参考文献

[1] J. L. Dupont. Symplectic bundles and KR-theory. *Math. Scand.*, 24:27–30, 1969.

[2] M. Furuta. Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture. *Math. Res. Lett.*, 8(3):279–291, 2001.

[3] J. Lin. Pin(2)-equivariant KO-theory and intersection forms of spin 4-manifolds. *Algebr. Geom. Topol.*, 15(2):863–902, 2015.

[4] N. Minami. The G-join theorem: an unbased G-freudenthal theorem. *preprint.*

[5] B. Schmidt. Spin 4-manifolds and Pin(2)-equivariant homotopy theory. *Ph.D. thesis, Univ. Bielefeld*, 2003.