

制御トポロジーへの A. Ranicki 氏の寄与について On contributions of A. Ranicki to controlled topology

岡山理科大学・理学部・基礎理学科 山崎 正之¹

Masayuki Yamasaki

Department of Applied Science

Okayama University of Science

1. 序

A. Ranicki さんは 2018 年 2 月 20 日の夜、急性骨髄性白血病で逝去されました。Algebraic surgery の専門家でした。

ご両親は第二次大戦中、ワルシャワのゲットーから逃亡し、農家に匿ってもらい生き延びることができましたが、祖父母 4 人は収容所で亡くなられたそうです [8]。大戦終了後、父親 (Marcel Reich-Ranicki) はポーランドの外交官として英国に赴任され、1948 年 12 月 30 日、ロンドンで Andrew Alexander Ranicki が誕生しました。両親はのちにドイツに亡命し、ドイツ国籍を取得。このため、ラニツキ氏は英国・ドイツの国籍を持っており、英国とドイツで初等・中等教育を受けています。大学はケンブリッジ。1969 年に B.A.、1973 年に Ph.D. を取得されました。

正式な指導教員は Frank Adams ですが、実際の指導は Andrew Casson です。[6] の序文に当時のエピソードが書かれていますので紹介します: 1970 年 10 月のある朝、彼は Adams からホモトピー論分野の研究テーマを 3 つ推薦されますが、あまり興味をおぼえませんでした。その日の午後のお茶の時間に、Adams から 9 月に開催された ICM で聴いた Novikov の仕事 (surgery 関連～Mischchenko が代理で講演) のことを教えられ、それに興味を持ち、Novikov の論文を読もうということになりました。ただ、Adams は高次元手術理論の専門家ではありませんでしたので、Andrew Casson に助言を求められるように言われました。Casson に頼んだところ「質問には答えてあげよう……でも今は高次元手術理論の勉強を始めるのにはあまりいい時期じゃない、ほとんど完成してしまって、残っているのは難しい問題だけだよ」という返事でした。それに発奮して、ずっとこの道を進むことになったのだそうです。

ラニツキ氏は精力的に仕事をされました。MathSciNet のデータでは、total publications は 85, total related publications が 16, total citations は 1014 となっています (2018 年 8 月 23 日の時点)。彼の論文や本は分厚いですのでかなりの量です。個人的な話になってしまいますが、彼が最初に書いた (まるで辞書のように分厚い!) 手術の本 [5] がなければ、私は博士論文を書くことができなかったでしょう。また、1980 年代の中

¹Email: yamasaki@surgery.matrix.jp, Web page: <http://surgery.matrix.jp/>

頃、ノートルダム大学での研究集会で、一般の(必ずしも Poincaré とは限らない)幾何学的 2 次複体 (§2) に対して squeezing が可能であるという間違った発表をしたときに、個人的にその誤りを指摘してくださり、チャンスがあればエジンバラにおいて、とおっしゃってくださった、その言葉に甘えて 1990 年 9 月から 1 年間エジンバラ大学に滞在したおり、毎日、ランチやお茶の時間をご一緒して、共同研究できたことは本当に幸せなことでした。感謝しています。2000 年代になって、E. Pedersen と共同で Poincaré 条件をみたく幾何学的 2 次複体に関しては squeezing が可能であることを証明できたこと [2] は、ある意味、ご恩返しになったのではないかと考えています。

彼の多くの仕事の中から、私との共同研究に関連するごく一部の内容について紹介することで、彼のことを偲びたいと思います。なお、以下で多様体と言えは高次元 (5 次元以上) のものを意味するものとします。

2. RANICKI の代数的手術理論

M, X を n 次元 ($n \geq 5$) 多様体, $f: M \rightarrow X$: a degree 1 “normal” map とする. 手術理論は, f に「手術」を施してホモトピー同値にすることができるための障害類

$$\sigma(f) \in L_n(\mathbb{Z}\pi), \quad \pi = \pi_1(X)$$

を Wall の L 群の中に与える. ここで, 2 つの問題点がある:

- $\sigma(f)$ を定義するには, まず “中間次元より下の手術” を実行しなければならない.
- L 群や $\sigma(f)$ の定義は n の偶奇により異なる.

Mishchenko はある統一的な代数的枠組みを用いて modulo 8-torsion で L 群や障害類を記述した (symmetric L -theory) が, Ranicki は彼の quadratic L -theory で, 2 次形式を鎖複体に拡張して, L 群や障害類の完全な記述に成功した [4][5]. その内容は次のようなものである.

R を involution をもつ環とする (たとえば $R = \mathbb{Z}\pi$). n 次元 2 次複体 (quadratic complex (QC)) (C, ψ) とは次のようなものの対のことをいう:

- n 次元 R 加群鎖複体 C ,
- quadratic structure (QS) $\psi = \{\psi_s: C^{n-r-s} \rightarrow C_r, r \in \mathbb{Z}\}_{s \geq 0}$

ここで C が n 次元とは, C が狭い意味で n 次元な鎖複体 D , つまり $D_i = 0$ ($i < 0$, $i > n$) をみたく D , と鎖同値であることをいう.

n 次元 QC (C, ψ) が Poincaré であるとは次の鎖写像が鎖同値であることをいう:

$$(1 + T)\psi_0: C^{m-*} \rightarrow C$$

ただし $T\psi_0 = \pm(\psi_0)^*$ は適当な符号のついた双対を表す. またこのとき (C, ψ) は quadratic Poincaré complex (QPC) であるという. $n = 0$ の場合は古典的な非特異 2

次形式となる。鎖複体として表現することにより、様々な鎖複体のことばを用いて扱うことができるようになる。たとえば、以下のようなものが定義できる:

- QC たち間の写像 $f : (C, \psi) \rightarrow (C', \psi')$
- $(n+1)$ 次元 **quadratic pair (QP)** $(f : C \rightarrow D, (\delta\psi, \psi))$
 ※ ここで「境界」 (C, ψ) は n 次元 QC であることを要求する.
- $(n+1)$ 次元 **quadratic Poincaré pair (QPP)** $(f : C \rightarrow D, (\delta\psi, \psi))$

さらに, QPC $(C, \psi), (C', \psi')$ の間のコボルディズムを, $(C, \psi) \oplus (C', -\psi')$ を境界を持つ一つ上の次元の QPP として定義する.

環 R の n 次元 **quadratic L 群** $L_n(R)$ を n 次元 QPC たちのコボルディズム類全体として定義する (連続するコボルディズムをつなぎあわせると, それもコボルディズムになる!). これは 4 周期性 ($L_{n+4}(R) \cong L_n(R)$) をもち, Wall の L 群と一致する. また, 次数 1 の normal map f に対してその手術障害類が, 中間次元より下の手術をすることなく自然に定義できる.

$\mathfrak{C}(f : C \rightarrow D)$ で f の代数的写像錐を表す:

$$\mathfrak{C}(f)_r = D_r \oplus C_{r-1}$$

n 次元 QC (C, ψ) が連結であることを $H_0(\mathfrak{C}((1+T)\psi_0)) = 0$ が成り立つことと定義する. また $\Sigma C, \Sigma^{-1}C$ で鎖複体 C の suspension, desuspension を表す.

このとき, 次の 2 つの構成は (up to homotopy で) 互いに逆である:

- n 次元 QPP $(f : C \rightarrow D, (\delta\psi, \psi))$ の代数的 **Thom 複体** とは $(\mathfrak{C}(f), \delta\psi/\psi)$ で定まる連結 n 次元 QC のことをいう.
- 連結 n 次元 QC (C, ψ) の代数的 **Poincaré 厚み付け** とは n 次元 QPP $(i_C : \partial C \rightarrow C^{n-*}, (0, \partial\psi))$ のことをいう. 特に, $\partial C = \Sigma^{-1}\mathfrak{C}((1+T)\psi_0)$ は $(n-1)$ 次元鎖複体である. $\partial(C, \psi) = (\partial C, \partial\psi)$ を (C, ψ) の境界とよぶ.

※ QC (C, ψ) が Poincaré $\Leftrightarrow \partial C$ が可縮

3. 幾何的制御の理論と横断性

この節では, Quinn 流の幾何的加群の理論について復習し, 幾何的制御付きの L 理論における横断性定理について解説する.

距離空間 X 上の幾何的加群 $\mathbb{Z}[S]$ とは集合 S の元を基底とする自由加群と写像 $S \rightarrow X$ の対である. その写像によって $s \in S$ たちを X の点とみなす. いちいち写像を書かない. また, 幾何的射 $\alpha : \mathbb{Z}[S] \rightarrow \mathbb{Z}[T]$ とは形式的な和

$$\sum_{s \in S} \sum_{\lambda \text{ (finite)}} m_\lambda(s, \rho_\lambda : [0, \tau_\lambda] \rightarrow X, t_\lambda) \quad (m_\lambda \in \mathbb{Z}, \rho_\lambda(0) = s, \rho_\lambda(\tau_\lambda) = t_\lambda \in T)$$

のことをいう.

※係数0の項の削除・挿入したものは元の射と同一と考える.

※同類項をまとめることは許さない.

※道の情報を忘れることにより, α は加群準同型写像 $|\alpha|: \mathbb{Z}[S] \rightarrow \mathbb{Z}[T]$ を誘導する.

※合成 $\beta\alpha$ は道の合成を使って定義する.

※ S の各元 s に対応する1を係数とする定値 s の道の和からなる射を $\mathbb{Z}[S]$ の恒等射といい, $1_{\mathbb{Z}[S]}$ もしくは1で表す.

(幾何的)射のホモトピー (\sim) とは次の2種類の操作の有限個の列をいう:

- (1) データ中の道のホモトピー ($rel \partial$) による変形: $m(s, \rho, t) \sim m(s, \rho', t)$
- (2) 同類項の和をまとめる $m(s, \rho, t) + n(s, \rho, t) \sim (m+n)(s, \rho, t)$, またその逆

ホモトピックな射は同じ加群準同型写像を誘導する.

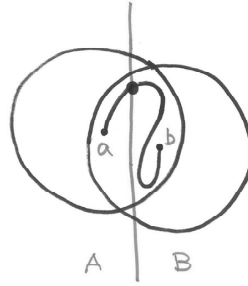
射 $\alpha: \mathbb{Z}[S] \rightarrow \mathbb{Z}[T]$ が同型とは「逆」 $\beta: \mathbb{Z}[T] \rightarrow \mathbb{Z}[S]$ ($\beta\alpha \sim 1, \alpha\beta \sim 1$) が存在することをいう. 逆はユニークに定まるわけではないが α^{-1} と書く.

$\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を X の regular な被覆, Γ をその被覆変換群とする. X 上の幾何的加群 $\mathbb{Z}[S]$ に対し, 写像 $S \rightarrow X$ による π の引き戻しを $\tilde{S} \rightarrow S$ とすると, 引き戻し図式より, $\mathbb{Z}[\tilde{S}]$ は \tilde{X} 上の幾何的加群であり, $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -加群構造をもつ ($\mathbb{Z}[S]$ のアセンブリ). さらに, (X 上の)射 $\alpha: \mathbb{Z}[S] \rightarrow \mathbb{Z}[T]$ は (\tilde{X} 上の)射 $\tilde{\alpha}: \mathbb{Z}[\tilde{S}] \rightarrow \mathbb{Z}[\tilde{T}]$ を誘導し, これは $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -加群準同型と見ることができる (α のアセンブリ).

次に, 射に対する幾何的制御の概念について復習する. δ は正の数とし, $B(x, \delta)$ は x を中心とした半径 δ の閉球体とする.

- $\alpha: \mathbb{Z}[S] \rightarrow \mathbb{Z}[T]$ が半径 δ をもつとは, $(s, \rho: [0, \tau] \rightarrow X, t)$ が α の中で0でない係数をもつならば必ず $\rho([0, \tau]) \subset B(s, \delta) \cap B(t, \delta)$ が成り立つことをいう.
- $\alpha, \beta: \mathbb{Z}[S] \rightarrow \mathbb{Z}[T]$ が δ ホモトピックである (\sim_δ) とは, 上の (1) では各ホモトピーの像が $B(s, \delta) \cap B(t, \delta)$ に含まれ, かつ, (2) では対象の項が半径 δ をもつことをいう.
- 同型 $\alpha: \mathbb{Z}[S] \rightarrow \mathbb{Z}[T]$ が δ 同型であるとは, (i) α, α^{-1} がともに半径 δ をもち, (ii) $\beta\alpha \sim_{2\delta} 1, \alpha\beta \sim_{2\delta} 1$ が成り立つことをいう.

A, B は X の閉集合で, $X = A \cup B$ が成り立っているとす. $N = A \cap B$ と置く. “半径 δ ” の道 $\rho: [0, \tau] \rightarrow X$ が A の点 a と B の点 b を結んでいるとすると, $\rho([0, \tau]) \subset N^{2\delta}$ (N の閉 2δ 近傍) が成り立つことに注意する.



X 上の幾何的加群を用いて定義された QPC (GQPC と呼ぼう) で狭い意味で n 次元なもの (C, ψ) をとる. ただし, 等式の代わりに \sim_δ 等を使い, 幾何的加群の双対は自分自身とみなす. 上のように $X = A \cup B$, $N = A \cap B$ とする. (C, ψ) の“半径”が十分小さければ, (C, ψ) が N に対して“横断的”であることを示そう.

C の部分複体 C' を次の条件を満たすようにとる:

- C' は A の小さな近傍の上にある
- C/C' は B の小さな近傍の上にある

射影 $C \rightarrow C/C'$ を p で表すと, $(C/C', \{p\psi_s p^*\})$ は連結な n 次元 GQC となる. これは A から離れた場所では Poincaré の条件を満たす. つまり $\partial(C/C', \{p\psi_s p^*\})$ という GQPC は A から離れた場所では“可縮”になっている; すなわち, 鎖ホモトピー $s : (C/C')_r \rightarrow (C/C')_{r+1}$ で, N から離れたところで $ds + sd = 1$ をみたすものがある (d は C/C' の境界準同型写像). $1 - ds - sd : C/C' \rightarrow C/C'$ を考えると N から離れたところでは本質的に 0 であり, 像が非自明なのは N の近くだけである. だからこれは $f : C/C' \rightarrow D$ を定めていると考えられる. $i : D \rightarrow C/C'$ を包含写像とする. $if = 1 - ds - sd$ であるから $ds + sd = 1 - if$. つまり if は 1 と鎖ホモトピック. つまり (D, f, i, s) は C/C' の domination である. $(fi)(fi) = f(if)i \simeq fi$ つまり $fi : D \rightarrow D$ はホモトピー的には射影 (idempotent) である. このことから C/C' が N の近傍の上のある狭い意味で $(n-1)$ 次元の「射影的な QPC」 (P, ψ_P) に鎖同値となることがわかる (finiteness obstruction). P の作り方は Pedersen-Ranicki により explicit に与えられている. そして, (C, ψ) は共通の境界 (P, ψ_P) をもち, おおのが A, B の近傍の上にあるような対を (P, ψ_P) で繋いだものにホモトピー同値であることがわかる [2].

上の横断性定理より, 制御 L 群に関するマイヤー=ビートリス列が導かれる [7].

4. マイヤー=ビートリス列の応用

Ranicki-Yamasaki の 2 つの論文 [3][7] で証明した制御 K 群および制御 L 群に関するマイヤー=ビートリス列を用いて, Guentner-Tessera-Yu はある種の群に対しての剛性定理などを証明した [1]. 以下で Γ は有限生成な群であり, 語距離により距離空間であ

ると考える. 我々が前節に述べた研究を行っていた時は, 制御を強める方向での応用 (ε 制御) を考えていたが, Yu らの応用は逆に制御を弱める方向 (有界制御) で用いていることに注意してほしい.

Theorem 4.1 (K-T-Y). 群 Γ が “bounded geometry (BG)” および “finite decomposition complexity (FDC)” をもつならば

(1) Γ に対し bounded な Borell 同型予想が成り立つ. つまり, アセンブリ写像

$$A : \lim_{d \rightarrow \infty} H_n(P_d(\Gamma); \mathbb{L}) \rightarrow \lim_{d \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow \infty} L_n^\delta(P_d(\Gamma))$$

は同型である. ここで $P_d(\Gamma)$ は Γ の Rips 複体である (下を見よ).

(2) Γ に対し $\otimes \mathbb{Q}$ なしで Novikov 予想が成り立つ. つまり, アセンブリ写像

$$A : H_*(B\Gamma; \mathbb{L}) \rightarrow L_*(\mathbb{Z}\Gamma)$$

は split injective.

Theorem 4.2 (K-T-Y). 閉多様体 M が $K(\Gamma, 1)$ であるとする. Γ が FDC をもつならば M は stably rigid である. つまり, ある自然数 n が存在して, 任意のホモトピー同値写像 $f : N \rightarrow M$ に対し, $f \times 1 : N \times \mathbb{R}^n \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ は同相写像にホモトピックである.

用語について説明しておく.

- Γ が **bounded geometry (BG)** をもつとは, 任意の $r > 0$ に対し, ある $N = N(r) \in \mathbb{N}$ が存在して, 半径 r の球体はたかだか N 個の要素しかもたないことをいう.
- X を局所有限な距離空間, $d > 0$ とする. X の **Rips 複体** $P_d(X)$ とは次のような多面体をいう:
 - $P_d(X)$ の頂点: X の点たち
 - $P_d(X)$ の n 単体: $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$, ただし $d(x_i, x_j) \leq d$
 Rips 複体の上の距離は, 各単体上では標準単体の距離になるように定める (異なる成分の2点の距離は ∞). 例えば X が $(n+1)$ 個の点からなるとき, $d \geq \text{diam} X$ ならば, $P_d(X)$ は標準 n 単体である.
- FDC の定義のための準備を行う.
 - 距離空間 X の部分集合の族 \mathcal{Z} が **r -disjoint** $\iff d(Z, Z') \geq r$ ($Z \neq Z' \in \mathcal{Z}$)
 - 距離空間の族 \mathcal{Y} が **s -bounded** $\iff \text{diam}(Y) \leq s$ ($\forall Y \in \mathcal{Y}$)
 - 距離空間の族 \mathcal{Y} が **(一様) 有界** $\iff \mathcal{Y}$ が, ある $s > 0$ に対して s -bounded
 - 距離空間 X の \mathcal{Y} 上の r -分解:

$$X = X_0 \cup X_1, \quad X_i = \bigsqcup_{r\text{-disjoint}} X_{ij}, \quad X_{ij} \in \mathcal{Y}$$

- 距離空間の族 \mathcal{X} が \mathcal{Y} 上 r 分解可能 (記号: $\mathcal{X} \xrightarrow{r} \mathcal{Y}$)
 $\iff \mathcal{X}$ の任意のメンバーが \mathcal{Y} 上の r -分解をもつ
- 【分解試合】 初期の距離空間族 \mathcal{Y}_0 が与えられている. 選手 A と B の分解試合とは次の試合をいう:
 ラウンド 1: A が \mathcal{Y}_0 を分解することを宣言し, B は A に対して自然数 r_0 を与える. それに対し, A はある族 \mathcal{Y}_1 上で \mathcal{Y}_0 を r_0 -分解する.
 ラウンド k : A が \mathcal{Y}_{k-1} を分解することを宣言し, B は A に対して自然数 r_{k-1} を与える. それに対し, A はある族 \mathcal{Y}_k 上で \mathcal{Y}_{k-1} を r_{k-1} -分解する.
 試合はある k に対して \mathcal{Y}_k を有界な族にできたとき, **A の勝ち** となる.
- \mathcal{X} が **FDC** をもつとは, $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{X}$ で B がどんな r_i を指定しても必ず A が勝てることをいう.
- 距離空間 X が **FDC** をもつとは, $\{X\}$ が FDC をもつことをいう.

非有界で FDC をもつ一番簡単な例は \mathbb{Z} である. 例えば選手 B が $r_0 = 3$ を与えたとする. このとき A は 2-有界な族 \mathcal{Y}_1 として,

$$\mathcal{Y}_1 = \{\{i, i+1\} \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

をとり, 3-disjoint な 2 つの族を

$$X_{0j} = \{4j, 4j+1\} \quad (j \in \mathbb{Z}), \quad X_{1j} = \{4j+2, 4j+3\} \quad (j \in \mathbb{Z})$$

とすればよい.

FDC をもつ群として次のようなものが知られている:

- 可算部分群 $\subset \text{GL}(n, R)$, R : 任意の可換環 $\ni 1$
- 有限個の連結成分をもつリー群の加算部分群
- 双曲群
- elementary amenable な群

定理 4.1(1) の証明のアイデアを紹介する. Γ のある部分距離空間 (部分群ではないことに注意!) の族 \mathcal{F} に関する数学的帰納法で証明を行う. ここでは最後のステップのさらにそのごく一部のみを考える. また, K 理論的修飾に関しては目をつぶる. $\mathcal{Y}_0 = \{\Gamma\}$ に対して, Γ のある部分空間族 \mathcal{Y}_1 が得られており, 任意の自然数 n に対して, \mathcal{Y}_1 上で \mathcal{Y}_0 を n -分解できる (FDC による仮定). 考えているアセンブリ写像のターゲットで極限をとる前の部分 (つまり有界 L 群) から元 α をひとつ取る. これが左辺 (ホモロジー群) から来ていることを示したい. α の「サイズ」はある有限値で抑えられる. そのサイズより十分大きい $n > 0$ をとる. この n に対する Γ の n -分解 $\Gamma = X_0 \cup X_1$ をとる. この分解についてのマイヤー=ビートリス列で図式追跡を行うことによって証明を行う. ホモロジーのほうについては当然マイヤー=ビートリス完全列がある. X_i は \mathcal{Y}_1 に属

すある部分集合 X_{ij} たちの n -disjoint な和で書けている. n を十分大きくとっておけば, X_0, X_1 に対応する有界 L 群の項は各 X_{ij} たちの項に分解している (相互作用はない) ので帰納法の仮定が使える. $X_0 \cap X_1$ についても帰納法の仮定が使えるように, あらかじめ対象となる部分空間の族 \mathcal{F} を設定しておかなければならないのだが, ここでは触れない. 原論文にあたってほしい. また, Rips 複体の振る舞いはかなり奇妙であり, かなり準備が必要であることにも注意しておく.

REFERENCES

1. E. Guentner, R. Tessera, and G. Yu, A notion of geometric complexity and its application to topological rigidity, *Invent. math.* (2012) **189**, 315–357.
2. E. Pedersen and M. Yamasaki, Stability in Controlled L -theory, *Geometry and Topology Monographs Vol.9 Exotic homology manifolds – Oberwolfach 2003* (2006), 67–86.
3. A. Ranicki and M. Yamasaki, Controlled K -theory, *Topology and Appl.* **61** (1995), 1–59.
4. A. Ranicki, Algebraic L -theory. I. Foundations. *Proc. London Math. Soc.* (3) **27** (1973), 101–125.
5. A. Ranicki, *Exact sequences in the algebraic theory of surgery*, Princeton Univ. Press (1981).
6. A. Ranicki, *Algebraic and geometric surgery*, Oxford Univ. Press (2002).
7. A. Ranicki and M. Yamasaki, Controlled L -theory, *Geometry and Topology Monographs Vol.9 Exotic homology manifolds – Oberwolfach 2003* (2006), 105–153.
8. M・ライヒ=ラニツキ, わがユダヤ・ドイツ・ポーランドーマルセル・ライヒ=ラニツキ自伝, 柏書房 (2002).