数理解析研究所講究録 第2098巻 2018年 68-75

Delzant 多面体のモジュライ空間上の距離関数について

日本女子大学理学部　藤田 玄
Hajime Fujita
Faculty of Science, Japan Women's University *

1　序 - 動機と主結果 -

本稿は, 2018 年度 RIMS 共同研究『変換群論における幾何・代数・組み合わせ論』における発表に基づくものであり, その内容は日本女子大学大学院修了生の大橋佳歩氏との共同研究 [3] に関するものである. シンプレクティックトーリック多様体は, 付随する運動量写像から定まる Delzant 多面体により完全に分類されることが Delzant 構成としてよく知られている ([2]). この対応に基づき, Pelayo-Pires-Ratiu-Sabatini[6] は, Delzant 多面体全体の集合上に対称差の Lebesgue 体積を用いて距離関数を導入しその性質を考察した. また, 整アファイン変換に関する合同関係による商空間として Delzant 多面体のモジュライ空間を導入し, その (商位相に関する) 構造を考察した. 彼らの主結果は以下のものである.

定理 1.1 ([6])**.** *2 次元 Delzant 多面体全体の空間は完備でも局所コンパクトでもない. また, そのモジュライ空間は弧状連結である.*

注意 1.1. 2 次元の非完備性および非局所コンパクト性から, 一般次元に対する同様の結果も得られる. また, [6] では 2 次元 Delzant 多面体全体の空間の完備化も決定している. それは正の Lebesgue 測度をもつ凸集合全体と空集合の和集合という巨大なものである.

[6] ではモジュライ空間上の距離関数は定義されていない. そこで, 次の問が自然に考えられる.

*fujitah@fc.jwu.ac.jp

問. モジュライ空間上に自然な距離関数が導入できないか?

本発表での主結果はその問に対する肯定的な答えを与えることである. なお, その証明には Delzant 多面体という設定は不要で, [3] の結果は Euclid 空間内の一般の (凸) 体に対するものであるので, 本稿ではその立場での記述を採用する. Gelfand-Celin 系などのトーリックに近いけれどトーリックではない例や, 近年のトーリック退化や Newton-Okounkov 体の理論の発展も踏まえると, そのような一般化も意味があると思われる.

謝辞. 講演の機会を与えてくださった世話人の黒木慎太郎さんに感謝申し上げます.

2 凸体の集合とそのモジュライ空間上の距離関数

$\mathbb{R}^n$ 内の凸体, すなわち $\mathbb{R}^n$ 内の有界な開集合の閉包として実現できる凸集合[1]全体を $\mathcal{B}_n$ とする. $A, B \in \mathcal{B}_n$ に対して

$$d(A,B) := \mathrm{vol}_n(A\Delta B) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A\Delta B} d\lambda$$

により関数 $d : \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n \to \mathbb{R}$ が定義される. ただし, $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ は対称差, $\mathrm{vol}_n(\cdot)$ は n 次元体積, $\chi_\cdot$ は特性関数, $d\lambda$ は Lebesgue 測度である. この d は $\mathcal{B}_n$ 上の距離関数になることがわかる.

次に, 整アファイン変換とその合同関係によるモジュライ空間を考える. 整アファイン変換群 $AGL_n(\mathbb{Z})$ は集合としては $AGL_n(\mathbb{Z}) := GL_n(\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n$ であり, その群構造は $(A_1, t_1), (A_2, t_2) \in AGL_n(\mathbb{Z})$ に対して

$$(A_1, t_1) \cdot (A_2, t_2) := (A_1A_2, A_1t_2 + t_1)$$

により定義される. ここで, $GL_n(\mathbb{Z})$ は整数成分の n 次可逆行列であって, その逆行列の成分も整数となるもの全体である. 以降, $G_n := AGL_n(\mathbb{Z})$ とおく. G_n は自然に $\mathcal{B}_n$ に作用する.

定義 2.1. 商空間 $\widetilde{\mathcal{B}}_n := \mathcal{B}_n/G_n$ を凸体のモジュライ空間とよぶ.

$\mathcal{B}_n$ 上の距離関数 d は自然には $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ 上の距離関数を誘導しない. そこで, 同値類にわたる下限としての距離関数の導入を考える.

[1]実際には, 以下の議論には凸性も不要である.

定義 2.2. 関数 $\tilde{d} : \widetilde{\mathcal{B}}_n \times \widetilde{\mathcal{B}}_n \to \mathbb{R}$ を $\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n$ に対して

$$\tilde{d}(\alpha, \beta) := \inf\{d(P, P') \mid P \in \alpha,\ P' \in \beta\}$$

により定義する.

次が本稿での主結果である.

定理 2.3 ([3]). *$\tilde{d}$ は $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ 上の距離関数となる.*

$\tilde{d}$ の対称性は明らかである. 三角不等式も以下のように示せる. まず, $GL_n(\mathbb{Z})$ の元の行列式は ± 1 であることから G_n の $\mathcal{B}_n$ への作用は等長的, すなわち各 $g \in G_n$ に対して $d(g\cdot, g\cdot) = d(\cdot, \dot{)}$ となり, $\alpha, \beta \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ の代表元 $P, P' \in \mathcal{B}_n$ を固定すると,

$$\tilde{d}(\alpha, \beta) = \inf\{d(P, gP') \mid g \in G_n\}$$

となることに注意する. 以下ではこの表示を用いる. $\alpha, \beta, \gamma \in \widetilde{\mathcal{B}}_n$ に対して, 代表元 $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{B}_n$ をとる. d の三角不等式より, 任意の $g, g' \in G_n$ に対して

$$d(P_1, gP_2) \le d(P_1, g'P_3) + d(g'P_3, gP_2) = d(P_1, g'P_3) + d(g^{-1}g'P_3, P_2)$$

となる. g に関して下限をとると, 任意の $g', g'' \in G_n$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\alpha, \beta) &\le d(P_1, g'P_3) + \inf_g\{d(g^{-1}g'P_3, P_2)\} \\ &= d(P_1, g'P_3) + \inf_g\{d(g''g^{-1}g'P_3, g''P_2)\} \\ &\le d(P_1, g'P_3) + d(P_3, g''P_2)\} \end{aligned}$$

となる. さらに $g', g'' \in G_n$ に関して下限をとることにより $\tilde{d}$ の三角不等式

$$\tilde{d}(\alpha, \beta) \le \tilde{d}(\alpha, \gamma) + \tilde{d}(\gamma, \beta).$$

を得る.

実は, [8] でも述べられているように, このように定義される $\tilde{d}$ の対称性と三角不等式は一般の距離空間への等長的な作用でも正しい. つまり, 擬距離になることは一般に正しい. あとは非退化性を示せば距離関数となるわけであるが, それは一般論では処理できず, 次節で紹介するアイデア[2]を用いる.

モジュライ空間 $\widetilde{B}_n$ 上に定まる距離位相と商位相について, 距離空間への等長作用の一般論として次がわかる.

命題 2.4 ([3]). *$\widetilde{\mathcal{B}}_n$ 上の π による商位相と $\tilde{d}$ による商位相は同相である. とくに, $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ は Hausdorff 空間である.*

[2] このアイデアは, 2017 年 12 月の大阪市大でのトーリックトポロジー workshop での筆者の講演後に佐藤敬志氏 (大阪市大) から提案されたアイデアに基づく.

3 $\tilde{d}$ の非退化性の証明のアイデア

ここでは, $\tilde{d}$ の非退化性の証明のアイデアを紹介する．示すべきは以下の主張である：

$$\alpha, \beta \in \widetilde{\mathcal{B}}_n \text{に対して} \tilde{d}(\alpha, \beta) = 0 \text{ならば} \alpha = \beta \text{となる.}$$

いま $\tilde{d}(\alpha, \beta) = 0$ と仮定し, $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_n$ の代表元 $P, P' \in \mathcal{B}_n$ を固定すると, 最小化列 $\{g_m\}_m \subset G_n$, すなわち

$$\lim_{m \to \infty} d(P, g_m P') = \inf_{g \in G_n} d(P, gP') = \tilde{d}(\alpha, \beta) = 0$$

がとれる．$G_n = GL_n(\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n$ に Euclid 距離から定まる直積距離を考える．このとき, 上の仮定のもとで $\{g_m\}$ の有界性が示せれば, Bolzano-Weierstrass の定理より, $\{g_m\}$ に収束部分列がとれる．その収束部分列も同じ添え字で表し, $g_m \to g_\infty \in G_n$ $(m \to \infty)$ とすると,

$$d(P, g_\infty P') = \tilde{d}(\alpha, \beta) = 0$$

より $P = g_\infty P'$, すなわち $\alpha = \beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n$ となる．よって $\{g_m\}$ の有界性を示せば非退化性が示せることになる．

いま, $\{g_m = (A_m, t_m)\}_m \subset G_n$ として, まず $\{A_m\}$ が非有界であると仮定する．簡単のため β の代表元 P' として $0 \in P'$ となるものをとる．$\{A_m\}_m$ が非有界であることから $\mathrm{diam}(g_m P') \to \infty$ $(m \to \infty)$ となる．このとき, 十分大きい任意の m に対して $P \Delta g_m P'$ が内点を含むことがわかる．これは $d(P, g_m P') \to 0$ $(m \to \infty)$ に矛盾する．実際には, P を含む十分大きい立方体と P' の原点を含む十分小さい立方体をとりそれらに対して上述の議論を行う．次に $\{A_\mathrm{m}\}_m$ は有界で $\{t_m\}_m$ が非有界と仮定する．このとき, $\{g_m P'\}$ は直径が有界のまま遠方に逃げていき, 十分大きい任意の m に対して $P \Delta g_m P' = P \cup g_m P'$ となり, やはり $d(P, g_m P') \to 0$ $(m \to \infty)$ に矛盾する. 以上により $\{g_m\}_m$ の有界性が示される.

4 関連する問題と今後の展望

以下では, 主に Delzant 多面体の集合およびそのモジュライ空間考える．その定義を確認しておく.

定義 4.1. $\mathbb{R}^n$ 内の凸多面体 P が以下の条件をみたすとき **Delzant 多面体**であるという：

1. P は単純である. すなわち, P の各頂点から n 本の辺が出ている.

2. P は有理的である. すなわち, 各辺の方向ベクトルは有理数ベクトルでとれる.

3. P は滑らかである. すなわち, 各辺の方向ベクトルとして $\mathbb{R}^n$ 内の格子 $\mathbb{Z}^n$ の基底をなすものがとれる.

$\mathbb{R}^n$ 内の Delzant 多面体全体の集合を $\mathcal{D}_n$ とする. また, $\mathcal{D}_n$ への自然な G_n 作用に関する商集合を $\widetilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{D}_n/G_n$ とし, **Delzant 多面体のモジュライ空間**とよぶ.

注意 4.1. $\mathcal{D}_n$ および $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ にはそれぞれ対称差の体積から決まる距離関数 d およびその同値類にわたる下限から定まる距離関数 $\tilde{d}$ が定義される. 以下ではこれらによる距離位相を考える. なお, 命題 2.4 により $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ 上の距離位相と自然な射影から定まる商位相は同相である.

Delzant 構成が $\mathcal{D}_n$ とシンプレクティックトーリック多様体の同変同型類全体との間の 1 対 1 対応を与えることが知られている. 一方, モジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ は**弱同変同型**という同値関係に関する同値類全体の 1 対 1 に対応することが知られている ([5]).

4.1　次元の評価

Delzant 多面体のモジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ はシンプレクティックトーリック多様体の弱同変同値に関するモジュライ空間とみなすことができる. したがって, その次元をなんらかの形で決定/評価することが考えられる. 距離空間に対して定まる自然な次元として, Hausdorff 次元が考えられる. ただし, $\mathcal{D}_n$ や $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ に対して意味のある評価を得るためには次元 n だけでなく頂点や面の個数などを指定したモジュライ空間を考える必要があるかもしれない.

4.2　完備化の決定

[6] では $\mathcal{D}_n$ が距離空間としては完備でなく, その完備化は凸集合全体であることが示されている. $\mathcal{D}_n$ 内の収束しない Cauchy 列を用いるとモジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ も距離関数 $\tilde{d}$ に関して完備ではないことがわかる. そこで, $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ の完備化を決定せよ, という問題が考えられる. この問題は対応するシンプレクティックトーリック多様体の極限の観点 (次小節も参照) からも興味深いと思われる.

4.3 Gromov-Hausdorff極限との関係

Delzant多面体PからDelzant構成により構成されたシンプレクティックトーリック多様体M_Pには自然にKähler構造が入り, その複素構造とRiemann計量はPの面の定義方程式から定まる関数を用いて非常に具体的に表示できることが知られている ([4][1]). その記述から, このKähler構造は$\mathcal{D}_n$へのG_n-作用に関して同変であることもわかる. 特に, モジュライ空間$\widetilde{\mathcal{D}}_n$からコンパクトRiemann多様体の等長同型類全体の集合$\mathcal{M}$への写像

$$\mathrm{Del} : \widetilde{\mathcal{D}}_n \to \mathcal{M}$$

が得られる. $\mathcal{M}$には**Gromov-Hausdorff距離**というRiemann幾何的に非常に由緒正しい距離関数が定義されることがよく知られおり, その構造が古くから研究されている. そこで, この2つの距離空間$\widetilde{\mathcal{D}}_n$と$\mathcal{M}$の間の写像Delの性質を調べよ, という問題が考えられる. しかし, $\mathcal{D}_n$, $\widetilde{\mathcal{D}}_n$や我々が考えている距離関数$d$, $\tilde{d}$はこの問題には適していないことが次の例から示唆される.

例 4.2. 2次元Delant多面体(長方形)の列$P_m := [0,1] \times [0, \frac{1}{m}]$ $(m \in \mathbb{N})$を考える. よく知られているように, P_mにDelにより対応する多様体は$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$であり, その計量は$g_{\mathrm{FS}} \oplus \frac{1}{m} g_{FS}$である. ここで, g_{FS}はFubini-Study計量である. このRiemnn多様体の列のGromov-Hausdorff距離に関する極限は$(\mathbb{C}P^1, g_{\mathrm{FS}})$である. 一方, P_mはdに関して$\mathcal{D}_2$および$\mathcal{B}_2$内では収束せず, その完備化の中では$\emptyset$に収束する.

これらの問題点を解消するために, $\mathcal{D}_n$やモジュライ空間$\widetilde{\mathcal{D}}_n$を, 低次元の対象も含むように拡大する必要がある. そこで, ナイーブなアイデアではあるが低次元のDelzant多面体の埋め込みを含むように次のように拡大する：

$$\mathcal{D}_{\le n} := \{g\left(\iota_k(P)\right) \mid k = 0, 1, \ldots, n,\ P \in \mathcal{D}_k,\ g \in G_n\},$$

ただし, 各$k = 0, 1, \ldots, n$に対して$\iota_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$は 埋め込み$\mathbb{R}^k \ni (x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$である. この$\mathcal{D}_{\le n}$には自然に$G_n$が作用するのでその商空間

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\le n} := \mathcal{D}_{\le n}/G_n$$

として拡大されたモジュライ空間を定義する. しかし, n次元体積から定まる距離関数dや$\tilde{d}$は低次元の対象の情報を何も捉えず, $\mathcal{D}_{\le n}$や$\widetilde{\mathcal{D}}_{\le n}$上の距離関数としては機能しない. そこで代替案として距離空間のコンパクト部分集合間の**Hausdorff距離**d_Hを考えてみる. d_Hは$\mathbb{R}^n$のコンパクト部分集合P_1, P_2に対して

$$d_H(P_1, P_2) := \min\{\sup_{x \in P_1} \inf_{y \in P_2} |x - y|,\ \sup_{y \in P_2} \inf_{x \in P_1} |x - y|\}$$

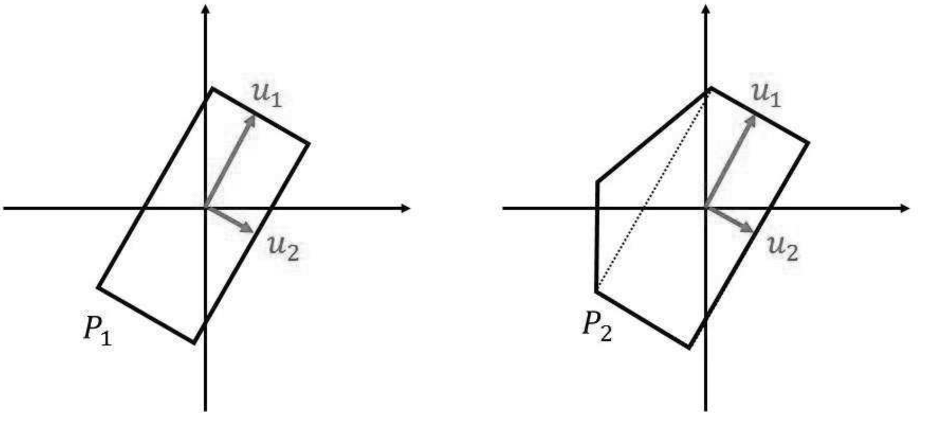

図 1: 長方形 P_1 と 5 角形 P_2

で定義される. Hausdorff 距離 d_H と対称差の体積から定まる距離 d は距離関数として Lipschitz 同値ではない[3]が, それらが定める位相は同相であることが知られている ([7]). d_H は $\mathcal{D}_{\leq n}$ の距離を定め, その距離位相に関して $\mathcal{D}_n$ は $\mathcal{D}_{\leq n}$ の稠密部分集合となる. しかし, 同値類にわたる下限として

$$\tilde{d}_H(\alpha, \beta) := \inf\{d_H(P_1, P_2) \mid P_1 \in \alpha,\ P_2 \in \beta\}$$

により $\tilde{d}_H : \widetilde{\mathcal{D}}_{\leq n} \times \widetilde{\mathcal{D}}_{\leq n} \to \mathbb{R}$ を定義しても, 次の例[4]により $\tilde{d}_H$ は $\widetilde{D}_2$ 上でも非退化性を (おそらく三角不等式も) みたさないことがわかる.

例 4.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ とし, その固有値 $3 \pm \sqrt{2}$ に対応する固有ベクトルとして $u_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \pm \sqrt{2} \end{pmatrix}$ をとる. 図 1 のような長方形 P_1 と P_1 に頂点を一つ付け加えた 5 角形 P_2 を考えると, $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$d_H(A^m P_1, A^m P_2) \to 0 \quad (m \to \infty)$$

となる. P_1, P_2 に十分近い $\mathcal{D}_2$ の元をとると, $\tilde{d}_H$ が非退化性をみたさないことを意味する.

現在, 対称差による距離関数 d がもつ特性と Hausdorff 距離 d_H がもつ特性を兼ね備えた $\widetilde{\mathcal{D}}_{\leq n}$(あるいはより適切なモジュライ空間) 上の距離関数の候補として, 確率測度の空間上で定義される **Wasserstein 距離**を用いた距離関数の構成とその性質の考察を北別府悠氏と行っている.

[3]一つの多角形とそれを平行移動で無限に遠くに持っていく列を考えればよい.
[4]この例は北別府悠氏 (熊本大) により指摘された.

参考文献

[1] M. Abreu, *Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates*, Symplectic and contact topology: interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001), Fields Inst. Commun., vol. 35, pp. 1–24.

[2] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 315–339.

[3] H. Fujita and K. Ohashi, *A metric on the moduli space of bodies*, preprint, arXiv:1804.05161, 2018.

[4] V. Guillemin, *Kaehler structures on toric varieties*, J. Differential Geom. **40** (1994), no. 2, 285–309.

[5] Y. Karshon, L. Kessler, and M. Pinsonnault, *A compact symplectic four-manifold admits only finitely many inequivalent toric actions*, J. Symplectic Geom. **5** (2007), no. 2, 139–166.

[6] Á. Pelayo, A. R. Pires, T. S. Ratiu, and S. Sabatini, *Moduli spaces of toric manifolds*, Geom. Dedicata **169** (2014), 323–341.

[7] G. C. Shephard and R. J. Webster, *Metrics for sets of convex bodies*, Mathematika **12** (1965), 73–88.

[8] T. Shioya, *Metric measure geometry*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 25, EMS Publishing House, Zürich, 2016, Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures.