数理解析研究所講究録 第2098巻 2018年 83-88

Borsuk-Ulam の定理の一般化と
その組合せ論への応用

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate school of Sience, Osaka University

1 序

S^n を $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ における原点中心の n 次元単位球面とするとき, 連続写像 $f\colon S^n \to \boldsymbol{R}^n$ に対して, $f(-x)=f(x)$ をみたす S^n の元 x が存在するというのが Borsuk-Ulam の定理である. この定理は次の定理 A を用いて証明できる。

定理 A. 連続写像 $f\colon S^n \to S^n$ がすべての $x \in S^n$ に対して $f(-x)=-f(x)$ をみたすとき, f の写像度は奇数である.

f の写像度とは, α を $H_n(S^n;\boldsymbol{Z})(\cong \boldsymbol{Z})$ の生成元とするとき, $f_*\alpha = m\alpha$ をみたす整数 m のことであり, 写像度を以下では $\deg f$ と書くことにする. 定理 A の証明や定理 A から Borsuk-Ulam の定理を証明する方法については, [5] に書いてある. 定理 A については, f が可微分写像であるとき, 正則値 $y \in S^n$ を取ると $f^{-1}(y)$ の個数 $\sharp f^{-1}(y)$ が奇数であるということもできる. ここで, f が可微分写像の場合のことを書いたが, 連続写像でも同様のことを考えることができる.

M を $(m+n)$ 次元位相多様体とし, N_1 をその m 次元部分多様体, N_2 を n 次元部分多様体とするとき, 任意の $p \in N_1 \cap N_2$ において, p の近傍 U で $(U, U\cap N_1, U\cap N_2)$ が $(\boldsymbol{R}^{m+n}, \boldsymbol{R}^m \times \{\boldsymbol{0}\}, \{\boldsymbol{0}\}\times \boldsymbol{R}^n)$ と同相になるようなものが存在するとき, N_1 と N_2 は **trensverse に交わる**という.

M を m 次元位相多様体, N を n 次元多様体とし (ただし $n \geqq m$ とする), L を N の $(n-m)$ 次元部分多様体とする, 連続写像 $f\colon M \to N$ が L と **transversal regular な写像**とは, $M \times N$ の部分多様体 $\{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ と $M \times L$ が transverse に交わるときをいう. M, N が同じ次元の可微分位相多様体で, $f\colon M \to N$ が可微分写像のとき, y を正則値とすると, 1 点 y からなる空間 $\{y\}$ は 0 次元部分多様体で, f は $\{y\}$ と transversal regular な写像となっていることは容易にわかる. また, L が N のコンパクトな部分多様体で, M がコンパクトな多様体であるとき ($\dim M = \dim N - \dim L$ とする), $f\colon M \to N$ が L に transversal regular な連続写像であれば, $f^{-1}(L)$ はコンパクトな M の部分集合であり, transversal regular の定義より集積点を持つこともないので, $f^{-1}(L)$ は有限集合であることに注意しておこう. 定理 A は次のように一般化することができる.

定理 1. $m \leqq n$ とし $f\colon S^m \to S^n$ をすべての $x \in S^m$ に対して $f(-x)=-f(x)$ をみたす連続写像とする. f が S^n の部分多様体 $S^{n-m}=\{(x_0,\dots,x_n)\in S^n \mid x_{n-m+1}=\cdots=x_n=0\}$ と transversal regular な写像であるとき, $\sharp f^{-1}(S^{n-m}) \equiv 2 \pmod 4$ が成り立つ.

上に書いたように $f^{-1}(S^{n-m})$ は有限集合であり, $\sharp f^{-1}(S^{n-m})$ はその元の個数を表している. この定理において, $m=n$ で $f\colon S^n \to S^n$ が $S^0=\{p_+, p_-\}$ と transversal regular であるとき, $\sharp f^{-1}(S^0) \equiv 2 \pmod 4$ であることから, $\sharp f^{-1}(p_+)$ が奇数であることがわかり, この場合

が定理 A になっている．本稿の目的は定理 1 を証明し, 組合せ論への応用として, 定理 1 を用いて Ky Fan の定理を証明することである.

以下, Ky Fan の定理を述べるための準備をしよう．$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n+1}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の基本ベクトルとし, Γ^n を $n+1$ 個の 0-sphere$\{\pm \boldsymbol{e}_i\}(i=1,2,\ldots,n+1)$ の join

$$\Gamma^n = \{\pm \boldsymbol{e}_1\} * \{\pm \boldsymbol{e}_2\} * \cdots * \{\pm \boldsymbol{e}_{n+1}\}$$

により定義する．Γ^n には, $\pm \boldsymbol{e}_1, \pm \boldsymbol{e}_2, \ldots, \pm \boldsymbol{e}_{n+1}$ を頂点 (0-単体) とする自然な単体複体の構造が考えられるが, これを Γ^n の標準的な複体の構造と呼ぶことにする.

ユークリッド空間の中の単体複体 K が **antipodally symmetric** であるとは, $\sigma \in K$ に対して, $-\sigma \in K$ となっていることをいう．また, antipodally symmetric な複体 K に対して,

$$\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \ldots, \pm m\} \quad (V(K) \text{ は } K \text{ の 0-単体の集合})$$

が $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ をみたすとき, λ を **antipodally symmetric な K の labeling** という. 特に, antipodally symmetric な K の labeling $\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \ldots, \pm m\}$ が, K の任意の 1-単体 $\{v_0, v_1\}$ に対して．$\lambda(v_0) \neq -\lambda(v_1)$ をみたすとき, **complementary edge のない** antipodally symmetric な K の labeling と呼ぶ.

$\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \ldots, \pm m\}$ に対して, d-単体 $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ が

$$\{\lambda(v_0), \lambda(v_1), \ldots, \lambda(v_d)\} = \{+j_0, -j_1, +j_2, \ldots, (-1)^d j_d\} \quad (1 \leqq j_0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_d)$$

を満たすとき, σ を λ に関して $+$-alternating といい,

$$\{\lambda(v_0), \lambda(v_1), \ldots, \lambda(v_d)\} = \{-j_0, +j_1, -j_2, \ldots, (-1)^{d+1} j_d\} \quad (1 \leqq j_0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_d)$$

を満たすとき, σ を λ に関して $-$-alternating という．Ky Fan の定理は次のものである (cf.[3]).

Ky Fan の定理. Γ^n に標準的な複体の構造を考え, K をその antipodally symmetric な細分とする．$\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \ldots, \pm m\}$ を complementary edge のない antipodally symmetric な K の labeling とするとき, K には λ に関して $+$-alternating な n-単体が奇数個存在する.

$\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \ldots, \pm m\}$ が antipodally symmetric な K の labeling であるとき, σ が $+$-alternating な n-単体であれば $-\sigma$ は $-$-alternating な n-単体であり, この逆も成り立つので, $+$-alternating な n-単体と $-$-alternating な n-単体は同数であり, 上の Ky Fan の定理の仮定のもとでは, $-$-alternating な n-単体も奇数個であることに注意しておこう．また, $m \leqq n$ の場合は Borsuk-Ulam の定理を用いることにより, Ky Fan の定理の仮定をみたす K の labeling λ が存在しないことを容易に証明することができる．したがって, この定理は $m > n$ の場合に関するものと考えてよい.

2　定理 1 の証明

以下で定理 1 の証明をする．transversal regular な写像の性質に関しては, [2] の第 8 章に詳しい．ここでは, 多様体は向きづけ可能でないものも扱うので, ホモロジー, コホモロジーの係数は $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$(以下では $\boldsymbol{Z}/2$ と書く) とする.

$m \leqq n$ とし, $f\colon S^m \to S^n$ を $f(-x) = -f(x)$ をみたす連続写像で, $S^{n-m} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_{n-m+1} = \cdots = x_n = 0\}$ と transversal regular なものとする.

対心点を同一視することによりできる商写像 (2 重被覆)$\pi\colon S^m \to \boldsymbol{R}P^m$, $\pi\colon S^n \to \boldsymbol{R}P^n$ を考えると, 次の図式を可換にする写像 $\overline{f}\colon \boldsymbol{R}P^m \to \boldsymbol{R}P^n$ が定まる.

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{f} & S^n \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ \boldsymbol{R}P^m & \xrightarrow{\overline{f}} & \boldsymbol{R}P^n \end{array}$$

$\boldsymbol{R}P^n$ の部分多様体 $\boldsymbol{R}P^{n-m} = \{[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \boldsymbol{R}P^n \mid x_{n-m+1} = \cdots = x_n = 0\}$ を考えると, $\overline{f}$ は f と局所的には同じ構造を持つので, $\overline{f}$ は $\boldsymbol{R}P^{n-m}$ と transversal regular な写像である.

$i\colon \boldsymbol{R}P^{n-m} \to \boldsymbol{R}P^n$, $j\colon f^{-1}(\boldsymbol{R}P^{n-m}) \to \boldsymbol{R}P^m$ を包含写像とすると, $\overline{f}$ は $\boldsymbol{R}P^{n-m}$ と transversal regular な写像であることから, コホモロジーに関して次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} H^0(\boldsymbol{R}P^{n-m}; \boldsymbol{Z}/2) & \xrightarrow{\overline{f}^*} & H^0(f^{-1}(\boldsymbol{R}P^{n-m}); \boldsymbol{Z}/2) \\ i_!\downarrow & & \downarrow j_! \\ H^m(\boldsymbol{R}P^n; \boldsymbol{Z}/2) & \xrightarrow{\overline{f}^*} & H^m(\boldsymbol{R}P^m; \boldsymbol{Z}/2) \end{array}$$

ここで, $i_!\colon H^0(\boldsymbol{R}P^{n-m}; \boldsymbol{Z}/2) \to H^m(\boldsymbol{R}P^n; \boldsymbol{Z}/2)$ および $j_!\colon H^0(f^{-1}(\boldsymbol{R}P^{n-m}); \boldsymbol{Z}/2) \to H^m(\boldsymbol{R}P^m; \boldsymbol{Z}/2)$ は Gysin 準同型である. $\overline{f}$ は $\boldsymbol{R}P^{n-m}$ と transversal regular な写像なので, $\overline{f}^{-1}(\boldsymbol{R}P^{n-m})$ は有限個の点であり, その点の個数を k とし, α を $H^0(\boldsymbol{R}P^{n-m}; \boldsymbol{Z}/2)$ の生成元すると, k が偶数であれば $j_! \circ \overline{f}^*(\alpha) = 0$, k が奇数であれば $j_! \circ \overline{f}^*(\alpha) \neq 0$ となる. 一方, $S^n \to \boldsymbol{R}P^n$ の第 1 Stiefel-Whitney 類を w とすると, $i_!(\alpha) = w^m$ であり, $\overline{f}$ は $f(-x) = -f(x)$ をみたす写像 f から得られる写像なので, $\overline{f}^*(w) \neq 0$ である. よって, $\overline{f}^* \circ i_!(\alpha) = \overline{f}^*(w)^m \neq 0$ が成り立つ. したがって, k は奇数であることがわかる. $\pi\colon S^m \to \boldsymbol{R}P^m$ により $f^{-1}(S^{n-m})$ における対心点が同一視されて $\overline{f}^{-1}(\boldsymbol{R}P^{n-m})$ の点になるので, $\sharp f^{-1}(S^{n-m}) = 2\overline{f}^{-1}(\boldsymbol{R}P^{n-m})$ であり, $\sharp f^{-1}(S^{n-m}) \equiv 2 \pmod 4$ が成り立つ.

注意. C_2 を位数 2 の巡回群とし, S^m, S^n に対心点を入れ替えるような C_2 作用を考えると, 連続写像 $f\colon S^m \to S^n$ が $f(-x) = -f(x)$ をみたすというのは, f が C_2 写像ということである. なお, 定理 1 では S^n の部分多様体として標準的な S^{n-m} を考えたが, C_2 部分多様体で S^{n-m} と C_2 同相なものを考えれば, 定理 1 と同様のことが成り立つ (証明も同様である).

3　定理 1 の組合せ論への応用

定理 1 を用いて Ky Fan の定理を証明をするために単体複体に関する準備をする.

$\Gamma^{m-1} = \{\pm \boldsymbol{e}_1\} * \{\pm \boldsymbol{e}_2\} * \cdots * \{\pm \boldsymbol{e}_m\}$ は $\boldsymbol{R}^m$ における $\pm\boldsymbol{e}_1, \pm\boldsymbol{e}_2, \ldots, \pm\boldsymbol{e}_m$ を頂点とする cross-polytope の境界部分と考えることができる.

$$Q_m = \{S \subset \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m\} \mid S \cap -S = \emptyset\}$$

とし, 集合の包含関係により辺単体を考えて得られる Q_m の単体複体の構造は Γ^{m-1} の標準的な複体の構造と一致している. したがって, 以下では $\boldsymbol{e}_i$ を i と同一視し, Γ^{m-1} の標準的な

複体の構造を Q_m と同じものと見る (したがって, Q_m の元を $\boldsymbol{R}^m$ における単体と見ることもある).

$S \in Q_m$ に対して, S の部分集合 $\{x_1, \dots, x_k\}(|x_1| < |x_2| < \cdots < |x_k|)$ が alternating subsequence であるとは, $x_i x_{i+1} < 0(i = 1, 2, \dots, k-1)$ をみたすときにいう. つまり, 絶対値の小さい方からならべたとき, 正負が交互になるようなものである。

$$\mathrm{alt}(S) = \max\{k \in \boldsymbol{N} \mid \{x_1, \dots, x_k\} \subset S \text{ が alternating subsequence}\}$$

により $\mathrm{alt}(S)$ を定義する. Q_m の部分集合 $R_m^k (k \leqq m)$ を

$$R_m^k = \{S \in Q_m \mid \mathrm{alt}(S) \geqq m - k\}$$

により定める. R_m^k 自体は単体複体にならないが,

$$\Delta R_m^k = \{(S_1, S_2, \dots, S_l) \mid S_i \in R_m^k, S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \cdots \subsetneq S_l\}$$

は Q_m の重心細分 $\mathrm{sd}(Q_m)$ の部分複体になっている. この単体複体 ΔR_m^k の多面体 $|\Delta R_m^k|$ の位相について次のことがわかっている.

定理 2.1(小路 [6]). $m \geqq 1$, $0 \leqq k \leqq m$ とするとき, $|\Delta R_m^k|$ は S^k と同相である.

次に, ΔR_m^k と transverse に交わる単体について考察する.

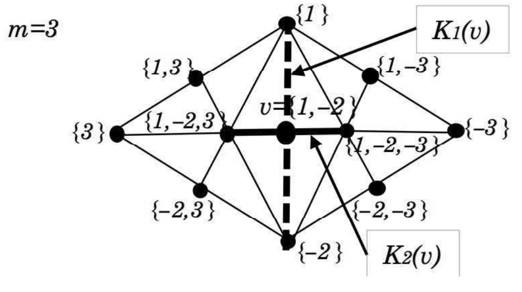
Q_m の重心細分 $\mathrm{sd}(Q_m)$ を考え, $\mathrm{sd}(Q_m)$ の頂点 $v = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}(|x_1| < |x_2| < \cdots < |x_k|)$ をとる. $\mathrm{sd}(Q_m)$ の部分複体 $K_1(v), L_1(v)$ を

$$K_1(v) = \{(v_1, v_2, \dots, v_l) \mid v_i \in Q_m,\ v_1 \subsetneq v_2 \subsetneq \cdots \subsetneq v_l \subset v\}$$
$$L_1(v) = \{(v_1, v_2, \dots, v_l) \mid v_i \in Q_m,\ v_1 \subsetneq v_2 \subsetneq \cdots \subsetneq v_l \subsetneq v\}$$

により定義する. $v = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathrm{sd}(Q_m)$ に対して, Q_m の $(k-1)$-単体として $\sigma_v = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ を考えると, v は σ_v の重心の点で $\sigma_v = |K_1(v)|$ が成り立ち, $|K_1(v)| \approx D^{k-1}((k-1)$ 次元の円盤), $K_1(v) = L_1(v) * v$, $|L_1(v)| \approx S^{k-2}$ であることに注意しておこう ($\approx$ は同相であることを表す). 次に, $\mathrm{sd}(Q_m)$ の部分複体 $K_2(v), L_2(v)$ を

$$K_2(v) = \{(v_1, v_2, \dots, v_l) \mid v_i \in Q_m,\ v \subset v_1 \subset v_2 \subset \cdots \subset v_l\}$$
$$L_2(v) = \{(v_1, v_2, \dots, v_l) \mid v_i \in Q_m,\ v \subsetneq v_1 \subset v_2 \subset \cdots \subset v_l\}$$

により定義する.



$y_1, y_2, \ldots, y_{m-k}$ を $\{y_1, y_2, \ldots, y_{m-k}\} = [m] \setminus \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|\}$ となる自然数とし ($[m]$ は 1 から m までの自然数の集合を表す), 単体複体

$$L(v) = \{S \subset \{\pm y_1, \pm y_2, \ldots, \pm y_{m-k}\} \mid S \cap -S = \emptyset\}$$

を考えると, $\mathrm{sd}(L(v))$ は $L_2(v)$ と単体複体として同型であり, $|\mathrm{sd}(L(v))| \approx |L(v)|$ は Γ^{m-k-1} と同相, つまり S^{m-k-1} と同相である. $K_2(v)$ は v と $L_2(v)$ の join であり, $|K_2(v)| \approx D^{m-k}$ なっていることに注意しよう.

v の $\mathrm{sd}(Q_m)$ における星状複体 $S_{\mathrm{sd}(Q_m)}(v)$ は

$$S_{\mathrm{sd}(Q_m)}(v) = \{(v_1, v_2, \ldots, v_l) \mid v_j \in Q_m,\ v_1 \subsetneq \cdots \subsetneq v_i \subset v \subset v_{i+1} \subsetneq \cdots \subsetneq v_l,\ v_i \subsetneq v_{i+1}\}$$

となる. $S_{\mathrm{sd}(Q_m)}(v)$ は, $K_1(v)$ と $L_2(v)$ の join であり, $|S_{\mathrm{sd}(Q_m)}(v)|$ は $(m-1)$ 次元閉円盤 D^{m-1} と同相で, $|K_1(v)|$ と $|K_2(v)|$ は v において transverse に交わることがわかる.

$v = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ を $\mathrm{alt}(v) = k$ となるものとするとき, $K_1(v)$ の v 以外の頂点 u を取ると $u \subsetneq v$ を満たすことより, $\mathrm{alt}(u) < k$ となる. したがって, $K_1(v)$ と R_m^k は v 以外に共有点を持たない. また, $K_2(v)$ は R_m^k の部分複体で, $|K_2(v)|$ と $|R_m^k|$ の次元は一致していることから, $|K_2(v)|$ は $|R_m^k|$ における v の近傍となっている. 以上のことから, 次のことがわかる.

補題 2.2. $v = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ を $\mathrm{alt}(v) = k$ となるものとするとき, $|K_1(v)|$ は $|R_m^k|$ と transverse に交わる.

以上で準備ができたので, 定理 1 および定理 2.1 を用いて Ky Fan の定理を証明しよう.

(定理 1 を用いた Ky Fan の定理の証明) 序に書いたように, $m \leqq n$ の場合は Ky Fan の定理の仮定をみたす K の labeling λ は存在しないので, 以下では, $m > n$ とする.

Γ^n に標準的な複体の構造を考え, K をその antipodally symmetric な細分とする. また, $\lambda\colon V(K) \to \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m\}$ を complementary edge のない antipodally symmetric な K の labeling とする. このとき, λ により, 単体複体 K から Q_m への単体写像 $\lambda(\{v_1, \ldots, v_k\}) = \{\lambda(v_1), \ldots, \lambda(v_k)\}$ が定まり, それより K と Q_m の重心細分の間の単体写像 $\mathrm{sd}(\lambda)\colon \mathrm{sd}(K) \to \mathrm{sd}(Q_m)$ を得る. また, $\mathrm{sd}(\lambda)$ から定まる連続写像 $|\mathrm{sd}(\lambda)|\colon |\mathrm{sd}(K)| \to |\mathrm{sd}(Q_m)|$ は $|\mathrm{sd}(\lambda)|(-x) = -|\mathrm{sd}(\lambda)|(x)$ をみたす連続写像であることに注意しておこう.

さて, $\sigma \in V(\mathrm{sd}(K))(= K)$ に対して, $v = \mathrm{sd}(\lambda)(\sigma)(\in V(\mathrm{sd}(Q_m)))$ とおくと, K の次元が n であることより, $\mathrm{alt}(v) \leqq n+1$ となっている. したがって, $\Delta R_m^{m-(n+1)}$ と $\mathrm{sd}(\lambda)(\mathrm{sd}(K))$ の共通部分は $\mathrm{alt}(v) = n+1$ となるような 0-単体のみである. $\sigma \in V(\mathrm{sd}(K))$ を $\mathrm{sd}(\lambda)(\sigma) \in V(\Delta R_m^{m-(n+1)})$ をみたすものとし, $v = \mathrm{sd}(\lambda)(\sigma)$ とおく ($v \in \Delta R_m^{m-(n+1)} \cap \mathrm{sd}(\lambda)(\mathrm{sd}(K))$ である). $\mathrm{sd}(\lambda)$ の定義に注意すると, $\sigma \in V(\mathrm{sd}(K))$ を K の単体と見たとき, $\dim K = n$ かつ $\mathrm{alt}(\lambda(\sigma)) = n+1$ なので, σ は n-単体であり, $+$ または $-$-alternating ということである. このことより, σ の $\mathrm{sd}(K)$ における星状複体 $S_{\mathrm{sd}K}(\sigma)$ の $\mathrm{sd}(\lambda)$ による像は $K_1(v)$ となっていて, $S_{\mathrm{sd}K}(\sigma)$ と $K_1(v)$ が $\mathrm{sd}(\lambda)$ により 1 対 1 に対応していることがわかる. 補題 2.2 より $|K_1(v)|$ と $|\Delta R_m^{m-(n+1)}|$ は transverse に交わり, これが, $\mathrm{sd}(\lambda)(\sigma) \in R_m^{m-(n+1)}$ をみたすすべての $\sigma \in \mathrm{sd}(K)$ について成り立つので, $|\mathrm{sd}(\lambda)|\colon |\mathrm{sd}(K)| \to |\mathrm{sd}(Q_m)|$ は $|\Delta R_m^{m-(n+1)}|$ と transversal regular な写像である.

したがって, 定理 1(および 2 節の注意) より, $|\mathrm{sd}(\lambda)|^{-1}(|\Delta R_m^{m-(n+1)}|)$ はある整数 k を用いて $4k+2$ と書くことができる. これは, $\mathrm{alt}(\mathrm{sd}(\lambda)(\sigma)) = n$ となる σ の個数が $4k+2$ とい

うことであり, K の n 単体で λ に関して $+$-alternating な n-単体の個数と $-$-alternating な n-単体の個数の和が $4k+2$ となる．$+$-alternating なものの個数と $-$-alternating なものの個数は一致するので, $(2k+1)$ 個の $+$-alternating n-単体が存在する．以上で, K には λ に関して $+$-alternating な n-単体が奇数個存在することが示された.

References

[1] A. Dold, Lecture on Algebraic Topology, Springer(1972).

[2] 服部晶夫, 位相幾何学, 岩波基礎数学選書 (1991).

[3] M. de Longueville, A course in topological combinatorics, Universitext, Springer(2013).

[4] J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam theorem, Springer, Berlin(2003).

[5] 中岡稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店 (1977).

[6] 小路史朗, 位相幾何的な手法による general Kneser hypergraph の彩色数の研究, 大阪大学理学研究科数学専攻修士論文 (2018).