数理解析研究所講究録 第2098巻 2018年 89-93

単体的複体の辺の個数と基本群の生成系の個数

早稲田大学教育学部　　村井　聡

Satoshi Murai
Department of Mathematics, Faculty of Education
Waseda University.

序

多様体の単体分割を考える際, 多様体の構造が複雑になれば単体分割するために必要な頂点数や面の個数が多くなることは直感的には明らかであるが, 一般に多様体の不変量から必要な頂点数や面の個数の良い下限を得ることは難しい問題である. 本稿では基本群の生成元の個数と多様体を単体分割する際に必要な辺の本数の下限に関して Isabella Novik との共同研究で得られた結果を紹介する.

1. 基本群と辺の個数

本稿では単体的複体は有限な抽象単体的複体を考える. 単体的複体 Δ であってその幾何学的実現 $|\Delta|$ が多様体 M と同相になるものを M の**三角形分割**と呼ぶ. 多様体の三角形分割の頂点や面の個数の下限を調べる問題は多様体の三角形分割の組合せ論の研究における中心的なテーマの一つである. $f_i(\Delta)$ で単体的複体 Δ の持つ i 次元面の個数を表すことにする. また, $d-1$ 次元単体的複体 Δ に対し, $h_1(\Delta), h_2(\Delta)$ を次で定義する

$$h_1(\Delta) = f_0(\Delta) - d,\ h_2(\Delta) = f_1(\Delta) - (d-1)f_0(\Delta) + \binom{d}{2}$$

と定める. $\beta_i(\Delta)$ を Δ の i 番目のベッチ数とする. 多様体の三角形分割の面の個数の研究における基本的な定理の一つに次の定理がある.

定理 1.1 (Novik-Swartz [NS])**.** 単体的複体 Δ が連結な閉 $(d-1)$-多様体の三角形分割で $d-1 \geq 3$ なら

$$h_2(\Delta) - h_1(\Delta) \geq \binom{d+1}{2}\beta_1(\Delta).$$

上の定理は Kalai [Ka] によって予想され, Novik と Swartz によって証明された. さらに Kalai は上の定理の改良として次の予想を提唱した. 連結な単体的複体 Δ に対し, $m(\Delta)$ を $|\Delta|$ の基本群 $\pi_1(|\Delta|)$ の生成元の個数の最小値とする. Hurewicz の定理から $m(\Delta) \geq \beta_1(\Delta)$ が成り立つことを注意しておく.

予想 1.2 (Kalai [Ka])**.** 単体的複体 Δ が連結な閉 $(d-1)$-多様体の三角形分割で $d-1 \geq 3$ なら

$$h_2(\Delta) - h_1(\Delta) \geq \binom{d+1}{2}m(\Delta).$$

上の予想は, 多面体的モース理論 (Polyhedral Morse Theory) とスタンレー・ライスナー環のベッチ数との関係を用いて, Novik と著者によって最近解決された.

The author was partially supported by JSPS KAKENHI JP16K05102.

定理 1.3 (M-Novik [MN2]). 単体的複体 Δ が連結な閉 $(d-1)$-多様体の三角形分割で $d-1 \geq 3$ なら

$$h_2(\Delta) - h_1(\Delta) \geq \binom{d+1}{2} m(\Delta).$$

本稿では上記の定理の証明に用いられた多面体的モース理論とスタンレー・ライスナー環のベッチ数との関係について簡単に解説し, 上の定理の証明の概要を説明したい.

2. 多面体的モース理論とスタンレーライスナー環のベッチ数

多面体的モース理論. Δ を頂点集合を V とする単体的複体とし, $\beta_i(\Delta) = \dim_{\mathbb{Q}} H_i(\Delta;\mathbb{Q})$ を Δ の i 番目のベッチ数, $\tilde{\beta}_i(\Delta) = \dim_{\mathbb{Q}} \tilde{H}_i(\Delta;\mathbb{Q})$ を Δ の i 番目の被約ベッチ数とする. 面 $F \in \Delta$ に対し,

$$\mathrm{lk}_\Delta(F) = \{G \setminus F : F \subseteq G \in \Delta\}$$

を Δ における F の **link** と呼ぶ. 部分集合 $W \subseteq V$ に対し,

$$\Delta_W = \{F \in \Delta : F \subseteq W\}$$

を Δ の W への**制限**と呼ぶ. また, S_V で有限集合 $V = \{v_1,\dots,v_n\}$ の元からなる順列 $(x_1,\dots,x_n)$ 全体からなる集合とする. 特に $|S_V| = |V|!$ である.

Δ を V 上の単体的複体, $\varsigma = (v_{\varsigma(1)},\dots,v_{\varsigma(n)}) \in S_V$ とする. このとき $\mu_i^\varsigma(\Delta)$ を次で定義する

$$\mu_i^\varsigma(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\beta}_{i-1}(\mathrm{lk}_\Delta(v_{\varsigma(k)})_{\{v_{\varsigma(1)},\dots,v_{\varsigma(k-1)}\}}).$$

上の $\mu_i^\varsigma(\Delta)$ を (順序 ς に関する) Δ **の指数** i **の臨界点の個数**と呼ぶことにする[1]. この $\mu_i^\varsigma(\Delta)$ に関して次のことが成り立つことがわかる.

定理 2.1 (モース不等式). 単体的複体 Δ に対し次が成立.

(1) $\beta_i(\Delta) \leq \mu_i^\varsigma(\Delta)$.
(2) $\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\beta_j(\Delta) \leq \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\mu_j^\varsigma(\Delta)$.

Proof. 次の短完全系列を考える

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C_\bullet(\Delta_{\{v_{\varsigma(1)},\dots,v_{\varsigma(k-1)}\}}) &\longrightarrow C_\bullet(\Delta_{\{v_{\varsigma(1)},\dots,v_{\varsigma(k)}\}}) \\ &\longrightarrow C_\bullet(\Delta_{\{v_{\varsigma(1)},\dots,v_{\varsigma(k)}\}})/C_\bullet(\Delta_{\{v_{\varsigma(1)},\dots,v_{\varsigma(k-1)}\}}) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

但し $C_\bullet(\Delta)$ は単体的複体の通常の鎖複体を表す. 最後の項 $C_\bullet(\Delta_{\{v_{\varsigma(1)},\dots,v_{\varsigma(k-1)}\}})$ は $\mathrm{lk}_\Delta(v_{\varsigma(k)})_{\{v_{\varsigma(1)},\dots,v_{\varsigma(k-1)}\}}$ の（空集合も元の一つと思った）鎖複体に一致するので二つの不等式は上の短完全系列から帰納的に導かれる. □

先の $\mu_i^\varsigma(\Delta)$ は頂点の順序 ς に依存するが, これらの平均を取ってモース不等式を考えると組合せ論的に様々な応用がある, ということが比較的最近 Bagchi と Datta により発見された. ここでは, 彼らの考えた不変量を簡単に紹介する.

[1] 幾何学的には各単体上で線形な関数で, 異なる頂点上で異なる値を持つようなものを考え, そのような関数を用いて臨界点の個数のようなものを考えている. 詳細は [BK] 等を参照してほしい.

Δ を頂点集合を V とする単体的複体とし, $\tilde{\sigma}_i(\Delta)$ と $\mu_i(\Delta)$ を次で定義する,

$$\tilde{\sigma}_i(\Delta) = \frac{1}{|V|+1} \sum_{W \subset V} \frac{1}{\binom{|V|}{|W|}} \tilde{\beta}_i(\Delta_W),$$
$$\mu_i(\Delta) = \sum_{v \in V} \tilde{\sigma}_{i-1}(\mathrm{lk}_\Delta(v)).$$

このように定義すると, μ_i は ς を S_V の元を全て動かして μ_i^ς の平均を取ったものに一意する. 即ち次が成り立つ (詳しくは [BD] または [MN2] を参照).

定理 2.2 (Bagchi–Datta [BD])**.** $\mu_i(\Delta) = \frac{1}{|V|!} \sum_{\varsigma \in S_V} \mu_i^\varsigma(\Delta)$.

モース不等式から次の事も直ちに導かれる.

系 2.3. 単体的複体 Δ に対し次が成立.

(1) $\beta_i(\Delta) \leq \mu_i(\Delta)$.
(2) $\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\beta_j(\Delta) \leq \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\mu_j(\Delta)$.

スタンレー・ライスナー環とその次数付きベッチ数. 実は先に定義した μ_i はスタンレー・ライスナー環と呼ばれる環を用い, 可換代数の道具を利用して調べることが出来る. 頂点集合を V とする単体的複体 Δ のスタンレー・ライスナー環 $\mathbb{Q}[\Delta]$ とは多項式環 $S = \mathbb{Q}[x_v : v \in V]$ を次のイデアル I_Δ で割って得られる環である

$$I_\Delta = (x_{i_1} \cdots x_{i_k} : \{i_1, \ldots, i_k\} \subset V,\ \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \Delta\}.$$

重要となるのはスタンレー・ライスナー環の次数付きベッチ数と呼ばれる不変量である. スタンレー・ライスナー環 $\mathbb{Q}[\Delta]$ の**次数付きベッチ数**とは, 数

$$\beta_{i,j}(\mathbb{Q}[\Delta], \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Tor}_i^S(\mathbb{Q}[\Delta], \mathbb{Q})_j$$

のことである. この数は次のように組合せ論的に表示できることが知られている.

定理 2.4 (Hochster)**.** 頂点集合を V とする単体的複体 Δ に対し,

$$\beta_{i,i+j}(\mathbb{Q}[\Delta]) = \sum_{W \subset V, |W| = i+j} \tilde{\beta}_{j-1}(\Delta_W).$$

上の定理は Hochster の公式と呼ばれる可換環論では有名な式である. Hochster の公式を用いると, 先に紹介した $\tilde{\sigma}$ が次のように書けることが分かる.

系 2.5. 頂点集合を V とする単体的複体 Δ に対し,

$$\tilde{\sigma}_{i-1}(\Delta) = \frac{1}{(|V|+1)\binom{|V|}{k}} \beta_{k-i,k}(K[\Delta])$$

数 μ_i は $\tilde{\sigma}_{i-1}$ の和であるから, μ_i は頂点の link の次数付きベッチ数を用いて表示できることが上の事実からわかる.

基本群との関係. 最後に μ_i と基本群との関係について述べておく. μ_1^c は指数 1 の臨界点の個数のようなものなので, モース理論に関して多少の知識があればこの値が基本群の生成元の個数と関係することは自然に予想がつく. 実際, 次の事が証明できる.

定理 2.6 (M–Novik [MN2])**.** 連結な単体的複体 Δ に対し, $\mu_1(\Delta)-\mu_0(\Delta)+1 \geq m(\Delta)$ が成り立つ.

定理 2.6 の証明はここでは省くが難しくない.

3. 定理 1.3 の証明の概要

ここでは定理 1.3 の証明の概要について解説する. 定理の主張では多様体の三角形分割について考えたが, 実際には "正規な疑似多様体 (normal pseudomanifold)" と呼ばれるもう少し広いクラスの単体的複体に対して定理は証明できる.

単体的複体が**純**であるとは, 全てのファセット（包含関係に関する極大元）が同じ次元を持つときに言う. 純な単体的複体 Δ が**疑似多様体**であるとは, Δ の任意の余次元 1 の面が丁度 2 個のファセットに含まれ, かつ強連結 (即ち, ファセットを頂点とし余次元 1 の面を辺とするグラフが連結) である時にいう. **疑似多様体** Δ **が正規**であるとは, Δ が連結で, かつ Δ の余次元 3 以下の任意の面 $F \in \Delta$ に対し $\mathrm{lk}_\Delta(F)$ が連結である時に言う.

定理 1.3 は先の定理 2.6 と著者によって証明された次の定理から直ちに導かれる.

定理 3.1 (M [Mu])**.** Δ が $(d-1)$ 次元の正規な疑似多様体で $d-1 \geq 3$ であるなら

$$h_2(\Delta)-h_1(\Delta) \geq \binom{d+1}{2}(\mu_1(\Delta)-\mu_0(\Delta)+1).$$

代数がどのように使われるのかの雰囲気を見てもらう為, 上の定理の証明の概要について少しだけ解説する. 証明は大体次のような流れで得られる.

- 正規な疑似多様体の link は正規な疑似多様体である.
- 正規な $(d-1)$ 次元疑似多様体 Δ は generically d-rigid と呼ばれる性質を満たす. これは組合せ論的な性質であるが, スタンレー・ライスナー環の言葉を用いて次のような性質に言い換えられることが知られている: ジェネリックな一次式 $\theta_1,\dots,\theta_{d+1}$ に対し, 積写像
$$\times\theta_i : (\mathbb{Q}[\Delta]/(\theta_1,\dots,\theta_{i-1})\mathbb{Q}[\Delta])_1 \to (\mathbb{Q}[\Delta]/(\theta_1,\dots,\theta_{i-1})\mathbb{Q}[\Delta])_2$$
が全ての $i=1,2,\dots,d+1$ について単射.
- 頂点数 n 個の generically d-rigid な $(d-1)$ 次元単体的複体に対し次が成り立つことが証明できる
$$\beta_{i,i+1}(\mathbb{Q}[\Delta]) \leq i\binom{n-d}{i+1}.$$
- link の頂点数の和を取ると元の単体的複体の辺の個数が出てくることに注意して, 上の不等式を系 2.5 を用いて定理 3.1 の右辺に代入し少し計算すると求める不等式が得られる.

最初の二つは既知の事実である. 証明の本質的な所は三つ目のところで, 面の個数に関する問題を, 次数付きベッチ数の不等式を得る問題に帰着させる点である.

ここで紹介した多面体的モース理論は, 元々は多様体を三角形分割するために必要な頂点数の最小値を求める研究の過程で考案された. 実際, 今回の結果から次のような結果が得られる.

系 3.2. 閉 d 多様体 M に n 頂点三角形分割が存在すれば

$$\binom{n-d-1}{2} \geq \binom{d+2}{2} m(M).$$

尚, 上の系は, 系 1.3 の左辺を f_0, f_1 を用いて書き直し, 自明な不等式 $f_1 \leq \binom{f_0}{2}$ を代入することで簡単に導かれる.

最後に本稿では省略した幾つかの事項について補足しておく. 本稿では係数は全て有理数 $\mathbb{Q}$ で考えたが, 実際には係数は任意の体で考えてよい. また, 本稿では h_2 のみについて考えたが, 高次の h_i とモース不等式の関係も知られている ([BD, MN1]). 最後に, ここでは閉多様体についてのみ考えたが, 同様の手法で境界を持つ多様体の面の個数を調べることもできる ([MN1]).

References

[BD] B. Bagchi and B. Datta, On stellated spheres and a tightness criterion for combinatorial manifolds, *European J. Combin.* **36** (2014), 294–313.

[BK] U. Brehm and W. Kühnel, Combinatorial manifolds with few vertices, *Topology* **26** (1987), 465–473.

[Ka] G. Kalai, Rigidity and the lower bound theorem. I, *Invent. Math.* **88** (1987), 125–151.

[Mu] S. Murai, Tight combinatorial manifolds and graded Betti numbers, *Collect. Math.* **66** (2015), 367–386.

[MN1] S. Murai and I. Novik, Face numbers of manifolds with boundary, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2017), 3603–3646.

[MN2] S. Murai and I. Novik, Face numbers and the fundamental group, *Israel J. Math.* **222** (2017), 297–315.

[NS] I. Novik and E. Swartz, Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets, *Adv. Math.* **222** (2009), 2059–2084.

E-mail address: s-murai@waseda.jp