数理解析研究所講究録 第2098巻 2018年 111-119

旗 Bott-Samelson 多様体の幾何学的及び表現論的側面

東京工業大学理学院 藤田 直樹 (Naoki Fujita)* †
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

概 要

本稿は RIMS 共同研究「変換群論における幾何・代数・組み合わせ論」における講演内容をまとめたものである. Eunjeong Lee 氏及び Dong Youp Suh 教授との共同研究 [5] に基づき, 旗多様体及び Bott-Samelson 多様体の自然な拡張である旗 Bott-Samelson 多様体の幾何学的及び表現論的側面について考察する.

1 旗 Bott-Samelson 多様体

旗 Bott-Samelson 多様体は旗多様体及び Bott-Samelson 多様体の自然な拡張である. $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ とし, $B \subset G$ を上三角行列全体のなす部分群 (Borel 部分群) とする. 本稿の内容は一般の連結単連結半単純代数群 G まで自然に拡張することができるが, 簡単のため A 型に限って話を進めることにする. $[n] \coloneqq \{1, 2, \ldots, n\}$ とし, $I \subset [n]$ とする. このとき正の整数 $n_1, n_2, \ldots, n_s \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し,

$$\{1, 2, \ldots, n+1\} \setminus I = \{n_1, n_1 + n_2, \ldots, n_1 + n_2 + \cdots + n_s\}$$

となる. $L_I \subset G$ を次の形の行列全体のなす部分群とする:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \text{\huge 0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & A_s \end{pmatrix};$$

ただし $1 \leq t \leq s$ に対して A_t は n_t 次の正方行列であり,

$$\det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_s) = 1$$

を満たす. このとき $L_I \cup B$ で生成される G の部分群を P_I と書き, **放物型部分群**という.

例 1.1.

(1) $I = [n]$ とする. このとき $P_{[n]} = G$ である.

(2) $I = \emptyset$ とする. このとき $P_\emptyset = B$ である.

(3) $i \in [n]$ に対して F_i を $(i+1, i)$-成分のみ 1 で他の成分は 0 である $(n+1)$-次正方行列とする. このとき放物型部分群 $P_i \coloneqq P_{\{i\}}$ は $B \cup \exp(\mathbb{C}F_i)$ で生成される G の部分群である. P_i は Borel 部分群 B を除く放物型部分群の中で包含関係に関して極小であり, **極小放物型部分群**と呼ばれる.

*E-mail address: fujita.n.ac@m.titech.ac.jp
†日本学術振興会特別研究員 (PD)

定義 1.2 ([11, Ch. II.13] 参照)**.** $\mathcal{I} = (I_1, I_2, \ldots, I_r)$ を $[n]$ の部分集合の列とする．このとき次で定義される非特異射影多様体 $Z_{\mathcal{I}}$ を**旗 Bott-Samelson 多様体**という:

$$Z_{\mathcal{I}} := (P_{I_1} \times P_{I_2} \times \cdots \times P_{I_r})/B^r;$$

ここで B^r の右作用は $p_1 \in P_{I_1}, p_2 \in P_{I_2}, \ldots, p_r \in P_{I_r}$ 及び $b_1, b_2, \ldots, b_r \in B$ に対して

$$(p_1, p_2, \ldots, p_r) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_r) := (p_1 b_1, b_1^{-1} p_2 b_2, \ldots, b_{r-1}^{-1} p_r b_r)$$

と定める．

例 1.3. $\mathcal{I} = ([n])$ とする．このとき $Z_{\mathcal{I}}$ は旗多様体 G/B と一致する．

例 1.4. すべての $1 \leq k \leq r$ に対して $|I_k| = 1$ とし，$I_k = \{i_k\}$ と書く．このとき $Z_{\mathcal{I}}$ は語 $\mathbf{i} := (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ に対応する Bott-Samelson 多様体 $Z_{\mathbf{i}} := (P_{i_1} \times P_{i_2} \times \cdots \times P_{i_r})/B^r$ と一致する．Bott-Samelson 多様体 $Z_{\mathbf{i}}$ は Bott-Samelson [2], Demazure [3] 及び Hansen [8] によって導入された多様体であり, シューベルト多様体の重要な特異点解消を与えている．

Grossberg-Karshon [7] は Bott-Samelson 多様体 $Z_{\mathbf{i}}$ が複素構造の変形により Bott 多様体と呼ばれるトーリック多様体に退化することを証明した．この退化は Pasquier [19] によって Bott-Samelson 多様体のコホモロジーの消滅に応用されている．本稿の目的は Grossberg-Karshon の結果 [7] を旗 Bott-Samelson 多様体まで拡張することである．旗 Bott-Samelson 多様体の退化先には旗 Bott 多様体という flag bundle の列を取ることで構成される多様体が登場する．退化先に現れる旗 Bott 多様体の具体的な表示についても説明する．さらに旗 Bott-Samelson 多様体の表現論への応用として, テンソル積表現の既約分解を Newton-Okounkov 凸体を用いて記述する公式についても解説する．

2　旗 Bott 多様体と複素構造の変形

まず 黒木-Lee-Song-Suh [15] によって導入された旗 Bott 多様体の定義を説明する．

定義 2.1 ([15, Definition 2.1])**.** **高さ** r **の旗 Bott tower** とは次のような flag bundle の列のことである:

$$F_r \to F_{r-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 = \{\mathrm{pt}\}.$$

ただし各 $1 \leq k \leq r$ に対して F_{k-1} 上の正則直線束 $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(m_k+1)}$ が存在し,

$$F_k = \mathscr{F}\ell\left(\bigoplus_{1 \leq l \leq m_k+1} \xi_k^{(l)}\right)$$

となるとする; ここで $\mathscr{F}\ell(\bigoplus_{1 \leq l \leq m_k+1} \xi_k^{(l)})$ は F_{k-1} 上のベクトル束 $\bigoplus_{1 \leq l \leq m_k+1} \xi_k^{(l)}$ が誘導する flag bundle である．旗 Bott tower に登場する複素多様体 $F_1, \ldots, F_r$ を**旗 Bott 多様体**という．

黒木-Lee-Song-Suh [15] によって与えられている, 旗 Bott 多様体の商多様体としての構成についても説明する．$H \subset G$ を対角行列全体のなす部分群とし, H の指標格子を P とする; つまり

$$P := \{\text{ 指標 } \chi \colon H \to \mathbb{C}^\times\}$$

である．$\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ に対して指標 $\chi_{\mathbf{a}} \in P$ を

$$\chi_{\mathbf{a}}(\mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1})) := t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_{n+1}^{a_{n+1}} \tag{2.1}$$

と定義すると, 写像

$$\mathbb{Z}^{n+1} \to P,\ \mathbf{a} \mapsto \chi_{\mathbf{a}},$$

は全射になる. 一般線形群 $GL_m(\mathbb{C})$ に対して, $B_{GL_m(\mathbb{C})} \subset GL_m(\mathbb{C})$ を上三角行列全体のなす部分群とし, $H_{GL_m(\mathbb{C})} \subset GL_m(\mathbb{C})$ を対角行列全体のなす部分群とする. また

$$\Upsilon\colon B_{GL_m(\mathbb{C})} \to H_{GL_m(\mathbb{C})}$$

を自然な全射とし, $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^m$ に対して指標 $\chi_{\mathbf{a}}\colon H_{GL_m(\mathbb{C})} \to \mathbb{C}^\times$ を (2.1) と同様に定義する.

命題 2.2 ([15, Propositions 2.8, 2.11] 参照)**.** $\{F_k\}_{0\le k\le r}$ を高さ r の旗 Bott tower とする. このとき整数ベクトル

$$\mathbf{a}_{k,j}^{(l)} \in \mathbb{Z}^{m_j+1},\ 1 \le j < k \le r,\ 1 \le l \le m_k+1,$$

が存在し, $\{F_k\}_{0\le k\le r}$ は次の商多様体がなす旗 Bott tower と同型である:

$$\{(GL_{m_1+1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{m_k+1}(\mathbb{C}))/(B_{GL_{m_1+1}(\mathbb{C})} \times \cdots \times B_{GL_{m_k+1}(\mathbb{C})})\}_{0\le k\le r}.$$

ただし $B_{GL_{m_1+1}(\mathbb{C})} \times \cdots \times B_{GL_{m_k+1}(\mathbb{C})}$ の右作用は $g_1 \in GL_{m_1+1}(\mathbb{C}), \ldots, g_k \in GL_{m_k+1}(\mathbb{C})$ 及び $b_1 \in B_{GL_{m_1+1}(\mathbb{C})}, \ldots, b_k \in B_{GL_{m_k+1}(\mathbb{C})}$ に対して,

$$(g_1,\ldots,g_k)\cdot(b_1,\ldots,b_k) \coloneqq (g_1b_1, \Lambda_{2,1}(b_1)^{-1}g_2b_2, \ldots, \Lambda_{k,1}(b_1)^{-1}\Lambda_{k,2}(b_2)^{-1}\cdots\Lambda_{k,k-1}(b_{k-1})^{-1}g_kb_k)$$

と定義する; ここで

$$\Lambda_{k,j}\colon B_{GL_{m_j+1}(\mathbb{C})} \to H_{GL_{m_k+1}(\mathbb{C})},\ b \mapsto \mathrm{diag}(\chi_{\mathbf{a}_{k,j}^{(l)}}(\Upsilon(b)))_{1\le l\le m_k+1},$$

である.

正の整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ と余指標 $\rho\colon \mathbb{C}^\times \to H$ であって, すべての $i \in [n]$ および $t \in \mathbb{C}^\times$ に対して

$$\alpha_i(\rho(t)) = t^q$$

となるものを固定する. ただし $\alpha_i \in P$ は単純ルートである; つまり

$$\mathbf{a}_i \coloneqq (\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},1,-1,0,\ldots,0)$$

に対して $\alpha_i = \chi_{\mathbf{a}_i}$ である. $t \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\Upsilon_t\colon B \to B$ を

$$\Upsilon_t(b) = \rho(t)b\rho(t)^{-1}$$

と定義し, $\Upsilon_0\colon B \to H$ を自然な全射とする. このとき写像

$$B \times \mathbb{C} \to B,\ (b,t) \mapsto \Upsilon_t(b),$$

は正則である. つまり Υ_0 は Υ_t の $t \to 0$ による極限となっている. 各 $t \in \mathbb{C}$ に対して, 複素多様体 $Z_{\mathcal{I}}^t$ を

$$Z_{\mathcal{I}}^t \coloneqq (P_{I_1} \times P_{I_2} \times \cdots \times P_{I_r})/B^r$$

と定義する; ここで B^r の右作用は $p_1 \in P_{I_1}, p_2 \in P_{I_2}, \ldots, p_r \in P_{I_r}$ 及び $b_1, b_2, \ldots, b_r \in B$ に対して

$$(p_1,p_2,\ldots,p_r)\cdot(b_1,b_2,\ldots,b_r) \coloneqq (p_1b_1, \Upsilon_t(b_1)^{-1}p_2b_2, \ldots, \Upsilon_t(b_{r-1})^{-1}p_rb_r)$$

と定める. $\Upsilon_1 = \mathrm{id}_B$ のため $Z_{\mathcal{I}}^1$ は $Z_{\mathcal{I}}$ と一致している. また次の命題により $Z_{\mathcal{I}}^t$ は $Z_{\mathcal{I}}$ の複素構造の変形を与えていることがわかる.

命題 2.3. $Z^t_{\mathcal{I}}$ の微分多様体としての構造は $t \in \mathbb{C}$ に依らず一定である.

$t \in \mathbb{C}$ 及び $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in P$ に対して, $Z^t_{\mathcal{I}}$ 上の正則直線束 $\mathcal{L}^t_{\mathcal{I},\lambda_1,\ldots,\lambda_r}$ を

$$\mathcal{L}^t_{\mathcal{I},\lambda_1,\ldots,\lambda_r} := (P_{I_1} \times P_{I_2} \times \cdots \times P_{I_r} \times \mathbb{C})/B^r$$

と定める; ここで B^r の右作用は $p_1 \in P_{I_1}$, $p_2 \in P_{I_2}$, $\ldots$, $p_r \in P_{I_r}$, $c \in \mathbb{C}$ 及び $b_1, b_2, \ldots, b_r \in B$ に対して

$$\begin{aligned}&(p_1, p_2, \ldots, p_r, c) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_r)\\ &:= (p_1 b_1, \Upsilon_t(b_1)^{-1} p_2 b_2, \ldots, \Upsilon_t(b_{r-1})^{-1} p_r b_r, \lambda_1(\Upsilon(b_1)) \cdots \lambda_r(\Upsilon(b_r))c)\end{aligned}$$

と定義する. $(c_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ を $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ の Cartan 行列とする; つまり

$$c_{i,j} := \begin{cases} 2 & (i = j), \\ -1 & (|i - j| = 1), \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

である. 次が本稿の一つ目の主結果である.

定理 2.4. すべての $1 \le k \le r$ に対して, ある $0 \le u_k < n$ が存在し

$$I_k = \{u_k + 1, u_k + 2, \ldots, u_k + m_k\}$$

となると仮定する; ここで $m_k := |I_k|$ である.

(1) $Z^0_{\mathcal{I}}$ は $Z^0_{\mathcal{I}'}$ 上の flag bundle

$$\mathscr{F}\ell(\mathcal{L}^0_{\mathcal{I}',0,\ldots,0,\chi_1} \oplus \mathcal{L}^0_{\mathcal{I}',0,\ldots,0,\chi_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}^0_{\mathcal{I}',0,\ldots,0,\chi_{m_r}} \oplus \mathcal{L}^0_{\mathcal{I}',0,\ldots,0})$$

と一致する; ここで $\mathcal{I}' := (I_1, \ldots, I_{r-1})$ であり, 各 $1 \le j \le m_r$ に対して

$$\chi_j := \alpha_{u_r+j} + \cdots + \alpha_{u_r+m_r}$$

である.

(2) 高さ r の旗 Bott tower

$$Z^0_{\mathcal{I}} \to Z^0_{\mathcal{I}'} \to Z^0_{(I_1,\ldots,I_{r-2})} \to \cdots \to Z^0_{(I_1)} \to \{\mathrm{pt}\}$$

は次の整数ベクトルにより与えられる:

$$\mathbf{a}^{(l)}_{k,j} = \left(\sum_{\substack{l \le s \le m_k, \\ p \le t \le m_j}} c_{u_j+t, u_k+s} \right)_{1 \le p \le m_j+1}.$$

注意 2.5. G が一般の連結単連結半単純代数群のとき, $I_k = \{u_k + 1, u_k + 2, \ldots, u_k + m_k\}$ という仮定は P_{I_k}/B が A 型の旗多様体であることに対応する.

例 2.6. $G = SL_3(\mathbb{C}), \mathcal{I} = ([2],[2])$ とする．このとき高さ 2 の旗 Bott tower

$$Z^0_{\mathcal{I}} \to Z^0_{([2])} \to \{\mathrm{pt}\}$$

は次の整数ベクトルで与えられる:

$$\mathbf{a}^{(1)}_{2,1} = \left(\sum_{\substack{1 \le s \le 2, \\ p \le t \le 2}} c_{t,s} \right)_{1 \le p \le 3} = (2,1,0),$$
$$\mathbf{a}^{(2)}_{2,1} = (c_{1,2} + c_{2,2}, c_{2,2}, 0) = (1,2,0).$$

特に $Z^0_{\mathcal{I}}$ は商多様体

$$(GL_3(\mathbb{C}) \times GL_3(\mathbb{C}))/(B_{GL_3(\mathbb{C})} \times B_{GL_3(\mathbb{C})})$$

と同型である．ただし $B_{GL_3(\mathbb{C})} \times B_{GL_3(\mathbb{C})}$ の右作用は $g_1, g_2 \in GL_3(\mathbb{C})$ 及び $b_1, b_2 \in B_{GL_3(\mathbb{C})}$ に対して

$$(g_1, g_2) \cdot (b_1, b_2) := (g_1 b_1, \Lambda_{2,1}(b_1)^{-1} g_2 b_2)$$

で与えられる; ここで b_1 の対角成分を $b_1(1), b_1(2), b_1(3)$ とするとき,

$$\Lambda_{2,1}(b_1) = \mathrm{diag}(b_1(1)^2 b_1(2), b_1(1) b_1(2)^2, 1)$$

である．

3 Newton-Okounkov 凸体とテンソル積表現

まず Newton-Okounkov 凸体の定義から説明する．Newton-Okounkov 凸体は Kaveh-Khovanskii [13, 14] 及び Lazarsfeld-Mustata [17] によって系統的な定義がなされた概念であり, トーリック多様体に対するモーメント多面体の拡張となっている．

$$P_+ := \{\chi_{\mathbf{a}} \in P \mid \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}),\ a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_{n+1} = 0\}$$

とおく．簡単のため $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in P_+$ に対して $\mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r} := \mathcal{L}^1_{\mathcal{I},\lambda_1,\ldots,\lambda_r}$ と書く．$\mathbb{C}$-代数 $R(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r})$ を

$$R(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}} H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}^{\otimes k}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r})$$

と定義する．$N := \dim_{\mathbb{C}}(Z_{\mathcal{I}})$ とし, $\mathbb{Z}_{\ge 0} \times \mathbb{Z}^N$ 上の全順序 $<$ を

$$(k, \mathbf{a}) \le (l, \mathbf{b}) \iff \begin{cases} k > l,\ \text{または} \\ k = l,\ \mathbf{a} \le \mathbf{b} \end{cases}$$

と定める．この全順序に関する付値

$$v \colon R(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\ge 0} \times \mathbb{Z}^N$$

を取り, 次を仮定する:

(i) $v(H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}^{\otimes k}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}) \setminus \{0\}) \subset \{k\} \times \mathbb{Z}^N$,

(ii) $\sigma \in R(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r})$ に対して,

$$v(\sigma) = v(\sigma_{\max\{k \mid \sigma_k \neq 0\}})$$

である; ただし $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して σ_k を σ の $H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}^{\otimes k}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r})$-成分とする.

定義 3.1 ([9, Sect. 3.1.1] 及び [14, Definition 1.10] 参照)**.** $\mathcal{I} = (I_1, I_2, \ldots, I_r)$ を $[n]$ の部分集合の列とし, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in P_+$ とする. 像 $\mathrm{Im}(v)$ を含む最小の実閉錐を $C(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}, v) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N$ とし, 集合 $\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}, v) \subset \mathbb{R}^N$ を

$$\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}, v) \coloneqq \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \mid (1, \mathbf{a}) \in C(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}, v)\}$$

と定める. この集合 $\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}, v)$ を **Newton-Okounkov** 凸体という.

v が付値であることから $\mathrm{Im}(v)$ は半群となっている. この半群が有限生成のとき, Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}, v)$ は有理凸多面体となる. Newton-Okounkov 凸体の重要な応用の一つが Harada-Kaveh [9] による完全可積分系の構成である.

定理 3.2 ([9, Theorem B])**.** 像 $\mathrm{Im}(v)$ が有限生成半群のとき, 通常の位相での開稠密部分集合 $U \subset Z_{\mathcal{I}}$ 及び $Z_{\mathcal{I}}$ 上の実数値連続関数の組 $F_1, \ldots, F_N$ が存在し, 次が成り立つ:

(1) $F_1, \ldots, F_N$ の U への制限は U 上の完全可積分系を与える;

(2) モーメント写像 $\mu = (F_1, \ldots, F_N)\colon Z_{\mathcal{I}} \to \mathbb{R}^N$ の像は Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}, v)$ と一致する.

P_{I_1} の $Z_{\mathcal{I}}$ 及び $\mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}$ への作用を $p, p_1 \in P_{I_1}$, $p_2 \in P_{I_2}$, $\ldots$, $p_r \in P_{I_r}$ 及び $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$p \cdot [p_1, \ldots, p_r] \coloneqq [pp_1, p_2, \ldots, p_r],$$
$$p \cdot [p_1, \ldots, p_r, c] \coloneqq [pp_1, p_2, \ldots, p_r, c]$$

と定める. 射影 $\mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r} \twoheadrightarrow Z_{\mathcal{I}}$ がこれらの作用と compatible であるため, 大域切断のなす空間 $H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r})$ は自然に P_{I_1}-加群となる. $\mathcal{I} = ([n])$ とすると, $P_{I_1} = G$ かつ $Z_{\mathcal{I}} = G/B$ である. $\lambda \in P_+$ に対して $V(\lambda) \coloneqq H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)^*$ とおくと, Borel-Weil 理論により集合 $\{V(\lambda) \mid \lambda \in P_+\}$ は有限次元既約 G-加群全体の集合と一致する. 以後 $\mathcal{I} = ([n], [n])$ とする. このとき対応する旗 Bott-Samelson 多様体は

$$Z_{\mathcal{I}} = G \times_B G/B$$

であり, $\lambda, \mu \in P_+$ に対して, G-加群としての同型

$$H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu})^* \simeq V(\lambda) \otimes V(\mu)$$

が成り立つ. すべての有限次元 G-加群は完全可約なので ([10, Sect. 14.3] 参照), 既約分解

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus_{\nu \in P_+} V(\nu)^{\oplus c^{\nu}_{\lambda,\mu}}$$

を得る. $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ なので, $V(\nu)$ の重複度 $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ は Littlewood-Richardson 係数と一致している ([6, Ch. 8] 参照). この重複度 $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ を具体的に記述することは G の表現論における重要な問題の一つである. Berenstein-Zelevinsky [1, Theorems 2.3, 2.4] は $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ をある具体的な有理

凸多面体の格子点の個数として記述した．本稿では Newton-Okounkov 凸体の格子点を用いて，Berenstein-Zelevinsky のものとは異なる公式を与える．

$$N_0 \coloneqq \dim_{\mathbb{C}}(G/B) = \frac{n(n+1)}{2}$$

とおく．このとき $N \coloneqq \dim_{\mathbb{C}}(Z_{\mathcal{I}}) = 2N_0$ である．

定義 3.3. 語 $(i_1, \ldots, i_{N_0}) \in [n]^{N_0}$ が**簡約語**であるとは，次の写像が双有理射となることである:

$$\mathbb{C}^{N_0} \to G/B,$$
$$(t_1, \ldots, t_{N_0}) \mapsto \exp(t_1 F_{i_1}) \cdots \exp(t_{N_0} F_{i_{N_0}}) \bmod B;$$

ただし F_i, $i \in [n]$, は例 1.1 (3) で定義した行列である．

例 3.4. 語 $(1, 2, 1, 3, 2, 1, \ldots, n, n-1, \ldots, 1) \in [n]^{N_0}$ は簡約語である．

$(i_1, \ldots, i_{N_0}), (j_1, \ldots, j_{N_0}) \in [n]^{N_0}$ を二つの簡約語とし，

$$\mathbf{i} \coloneqq (i_1, \ldots, i_{N_0}, j_1, \ldots, j_{N_0}) \in [n]^N$$

とおく．このとき次の写像は双有理射である:

$$\mathbb{C}^N \to Z_{\mathcal{I}},$$
$$(t_1, \ldots, t_N) \mapsto (\exp(t_1 F_{i_1}) \cdots \exp(t_{N_0} F_{i_{N_0}}), \exp(t_{N_0+1} F_{j_1}) \cdots \exp(t_N F_{j_{N_0}})) \bmod B^2.$$

この双有理射を用いて関数体 $\mathbb{C}(Z_{\mathcal{I}})$ を有理関数体 $\mathbb{C}(t_1, \ldots, t_N)$ と同一視する．$\mathbb{Z}^N$ 上の全順序 $<$ を次で定義する: $(a_1, \ldots, a_N), (a'_1, \ldots, a'_N) \in \mathbb{Z}^N$ に対して，

$$(a_1, \ldots, a_N) < (a'_1, \ldots, a'_N) \iff \text{ある } 1 \leq k \leq N \text{ について，} a_1 = a'_1, \ldots, a_{k-1} = a'_{k-1},\ a_k < a'_k.$$

この全順序 $<$ を用いて $t_1, \ldots, t_N$ を変数とする単項式たちの間の順序 $<$ を次で定義する:

$$t_1^{a_1} \cdots t_N^{a_N} < t_1^{a'_1} \cdots t_N^{a'_N} \iff (a_1, \ldots, a_N) < (a'_1, \ldots, a'_N).$$

以上の準備のもとで付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}} \colon \mathbb{C}(Z_{\mathcal{I}}) \setminus \{0\}\ (= \mathbb{C}(t_1, \ldots, t_N) \setminus \{0\}) \to \mathbb{Z}^N$ を次のように定める: $f, g \in \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_N] \setminus \{0\}$ に対して $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}(f/g) \coloneqq v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}(f) - v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}(g)$ とし，

$$f = c t_1^{a_1} \cdots t_N^{a_N} + (\text{lower terms}) \in \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_N] \setminus \{0\}$$

に対して $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}(f) \coloneqq -(a_1, \ldots, a_N)$ とする; ここで c は 0 でない複素数であり，“lower terms” は上で定めた順序 $<$ に関して $t_1^{a_1} \cdots t_N^{a_N}$ より小さい単項式たちの線形結合である．大域切断 $0 \neq \tau \in H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu})$ を固定し，各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}^{\otimes k})$ を次のように $\mathbb{C}(Z_{\mathcal{I}})$ の有限次元部分空間と同一視する:

$$H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}^{\otimes k}) \hookrightarrow \mathbb{C}(Z_{\mathcal{I}}),\ \sigma \mapsto \sigma/\tau^k.$$

すると $\mathbb{C}(Z_{\mathcal{I}})$ 上の付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}$ は上で述べた条件を満たす $R(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu})$ 上の付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}$ を誘導する．次が本稿の二つ目の主結果である．

定理 3.5. $\mathcal{I} = ([n], [n])$, $\lambda, \mu \in P_+$ とし，$(i_1, \ldots, i_{N_0}), (j_1, \ldots, j_{N_0}) \in [n]^{N_0}$ を二つの簡約語とする．

(1) 像 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}(R(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}) \setminus \{0\})$ は有限生成半群である．特に $\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}})$ は有理凸多面体である．

(2) 射影 $\pi\colon \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_0} \oplus \mathbb{R}^{N_0} \to \mathbb{R}^{N_0}$ を $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \mathbf{b}$ により定義し，

$$\widehat{\Delta}(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}) := \pi(\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}))$$

とおく．このとき格子点集合 $\widehat{\Delta}(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}) \cap \mathbb{Z}^{N_0}$ は自然にテンソル積表現 $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ の直和成分と重複度込みで 1 対 1 に対応する．特に $\mathbf{y} \in \widehat{\Delta}(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}) \cap \mathbb{Z}^{N_0}$ に対応する既約表現を $V(\nu(\mathbf{y}))$ とすると，$c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ は

$$\{\mathbf{y} \in \widehat{\Delta}(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}) \cap \mathbb{Z}^{N_0} \mid \nu(\mathbf{y}) = \nu\}$$

の位数と一致する．

(3) $\mathbf{y} \in \widehat{\Delta}(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}) \cap \mathbb{Z}^{N_0}$ に対して，ファイバー $\pi^{-1}(\mathbf{y}) \cap \Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}})$ は簡約語 $(i_1, \ldots, i_{N_0})$ に関する $V(\nu(\mathbf{y}))$ のストリング多面体と一致する (ストリング多面体については [1, 18] 参照).

例 3.6. $(i_1, \ldots, i_{N_0}) = (1, 2, 1, 3, 2, 1, \ldots, n, n-1, \ldots, 1)$ とする．このときファイバー $\pi^{-1}(\mathbf{y}) \cap \Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}})$ は指標 $\nu(\mathbf{y})$ に関する Gelfand-Zetlin 多面体とユニモジュラー同値である ([18, Sect. 5] 参照).

注意 3.7. G-加群 $H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu})^* \simeq V(\lambda) \otimes V(\mu)$ は一般化 Demazure 加群 ([16] 参照) の特別な場合である．筆者 [4] は一般化 Demazure 加群に対応する結晶基底 (一般化 Demazure 結晶) に着目し，ストリング多面体の理論を一般化 Demazure 加群にまで拡張した (結晶基底については [12] 参照). Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}})$ はこの一般化されたストリング多面体と一致している．

例 3.8. $G = SL_2(\mathbb{C})$, $\mathcal{I} = ([1], [1])$, $\lambda = \chi_{(\lambda_1, 0)}$, $\mu = \chi_{(\mu_1, 0)} \in P_+$, $\mathbf{i} = (1, 1)$ とする．このとき大域切断 $0 \neq \tau \in H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu})$ を適切に取ると，

$$\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}) = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le a_2 \le \min\{\lambda_1, \mu_1\},\ 0 \le a_1 \le \lambda_1 + \mu_1 - 2a_2\}$$

が成り立つ．また

$$\widehat{\Delta}(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}) = \{a_2 \in \mathbb{R} \mid 0 \le a_2 \le \min\{\lambda_1, \mu_1\}\}$$

であり，$a_2 \in \widehat{\Delta}(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}) \cap \mathbb{Z}$ は既約表現 $V(\chi_{(\lambda_1+\mu_1-2a_2, 0)})$ に対応する．実際

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus_{0 \le a_2 \le \min\{\lambda_1, \mu_1\}} V(\chi_{(\lambda_1+\mu_1-2a_2, 0)})$$

が成り立つ．射影 $\pi\colon \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ は $\pi(a_1, a_2) = a_2$ で与えられ，$a_2 \in \widehat{\Delta}(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}) \cap \mathbb{Z}$ に対して $\pi^{-1}(a_2) \cap \Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}) = \{(a_1, a_2) \mid 0 \le a_1 \le \lambda_1 + \mu_1 - 2a_2\}$ が成り立つ．第 1 成分への射影 $(a_1, a_2) \mapsto a_1$ により，$\pi^{-1}(a_2) \cap \Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda,\mu}, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}})$ は指標 $\chi_{(\lambda_1+\mu_1-2a_2, 0)}$ に関する Gelfand-Zetlin 多面体と同一視される．

参考文献

[1] A. Berenstein and A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math. **143** (2001), 77–128.

[2] R. Bott and H. Samelson, Applications of the theory of Morse to symmetric spaces, Amer. J. Math. **80** (1958), 964–1029.

[3] M. Demazure, Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 53–88.

[4] N. Fujita, Newton-Okounkov bodies for Bott-Samelson varieties and string polytopes for generalized Demazure modules, preprint 2015, arXiv:1503.08916v2.

[5] N. Fujita, E. Lee, and D. Y. Suh, Algebraic and geometric properties of flag Bott-Samelson varieties and applications to representations, preprint 2018, arXiv:1805.01664v1.

[6] W. Fulton, Young Tableaux, London Mathematical Society Student Texts Vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[7] M. Grossberg and Y. Karshon, Bott towers, complete integrability, and the extended character of representations, Duke Math. J. **76** (1994), 23–58.

[8] H. C. Hansen, On cycles in flag manifolds, Math. Scand. **33** (1973), 269–274.

[9] M. Harada and K. Kaveh, Integrable systems, toric degenerations, and Okounkov bodies, Invent. Math. **202** (2015), 927–985.

[10] J. E. Humphreys, Linear Algebraic Groups, Graduate Texts in Mathematics Vol. 21, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[11] J. C. Jantzen, Representations of Algebraic Groups, 2nd ed., Math. Surveys Monographs Vol. 107, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[12] M. Kashiwara, On crystal bases, in Representations of Groups (Banff, AB, 1994), CMS Conf. Proc. Vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 155–197.

[13] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Convex bodies and algebraic equations on affine varieties, preprint 2008, arXiv:0804.4095v1; a short version with title *Algebraic equations and convex bodies* appeared in Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology, Progr. Math. Vol. 296, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, 263–282.

[14] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, Ann. of Math. **176** (2012), 925–978.

[15] S. Kuroki, E. Lee, J. Song, and D. Y. Suh, Flag Bott manifolds and the toric closure of a generic orbit associated to a generalized Bott manifold, preprint 2017, arXiv:1708.02082v1.

[16] V. Lakshmibai, P. Littelmann, and P. Magyar, Standard monomial theory for Bott-Samelson varieties, Compos. Math. **130** (2002), 293–318.

[17] R. Lazarsfeld and M. Mustata, Convex bodies associated to linear series, Ann. Sci. de I'ENS **42** (2009), 783–835.

[18] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, Transform. Groups **3** (1998), 145–179.

[19] B. Pasquier, Vanishing theorem for the cohomology of line bundles on Bott-Samelson varieties, J. Algebra **323** (2010), 2834–2847.