数理解析研究所講究録 第2101巻 2019年 64-76

On Laplace and Residue integral representations of GKZ hypergeometric functions

東京大学・数理科学研究科　松原　宰栄

Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo

Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo

1　導入

Gauss の超幾何函数

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n}z^n \tag{1.1}$$

は特殊函数論において中心的な役割を演じている。一方、${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は下記の Euler 積分表示を持ち、それが故に大域解析が可能となる。

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}dt\ \ (|z|<1). \tag{1.2}$$

ここで、パラメーター $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は積分が収束するようにとる必要があるが、ここでは論じない。一方で些か奇異な表示だが、Γ 函数の定義から次の Laplace 積分表示

$$\begin{aligned}&{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)\\ =&\frac{\pi\Gamma(\gamma)}{\sin\pi(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(1-t_1)t_2-(1-zt_1)t_3}t_1^{\alpha-1}t_2^{\alpha-\gamma}t_3^{\beta-1}dt_1dt_2dt_3\end{aligned} \tag{1.3}$$

も $|z|<1$ なる限り成立する。この書き換えは一変数では全く非効率的であるが、GKZ 界隈において Cayley trick と呼ばれているものである。Euler 積分表示と異なり、Laplace 積分表示の積分路は基本的には非有界である。また、やはり一見非効率的に思われるが、Euler 積分表示は次の留数（Residue）積分表示

$$\begin{aligned}&{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)\\ =&\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)(2\pi\sqrt{-1})^2}\int_0^1\oint_{L_2}\oint_{L_1}\frac{t^{\alpha-1}y_1^{\alpha-\gamma}y_2^{\beta-1}}{\Big(1-y_1(1-t)\Big)\Big(1-y_2(1-zt)\Big)}dy_1dy_2dt,\end{aligned} \tag{1.4}$$

に書き直すこともできる。ここで、L_1 および L_2 は各々 $\frac{1}{y_1}=1-t$ および $\frac{1}{y_2}=1-zt$ を一周する小さな loop である。留数積分表示の積分路は有界になっていることに注意されたい。以上の考察により、次のことがわかる。Gauss の超幾何函数は四つの一見異なる表示を持つ。それらは、級数表示 (1.1)、Euler 積分表示 1.2)、 Laplace 積分表示 (1.3)、そして留数積分表示 (1.4) である。本稿の目的は GKZ 超幾何函数に対してこれらの表示の関係を確立することにある。紙数の制約上簡単な場合についての記述に制限する。一般的な定式化や証明は [10] を参照されたい。なお、本稿においては [5] に従って n 次元縦ベクトル v に対して $|v|$ でその成分の和を表すことにする。

2　GKZ 超幾何系と級数解

本節では GKZ 超幾何系の定義を振り返り、Γ 級数に関して既知の結果を列挙する。本稿の記述は [5] によるものである。この論文は級数解に関する素晴らしい要約を含んでおり、内容だけでなく記号の使い方も上手い。$n < N$ を正整数、$c \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ をパラメーターとする。格子点 $\{\mathbf{a}(1), \ldots, \mathbf{a}(N)\} \subset \mathbb{Z}^{N\times 1}$ を考えて、$A = (\mathbf{a}(1) \mid \cdots \mid \mathbf{a}(N)) = (a_{ij})$ とおく。本稿を通じて $\mathbb{Z}A = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{Z}\mathbf{a}(j) = \mathbb{Z}^{n\times 1}$ を仮定する。次の連立方程式系 $M_A(c)$ を GKZ 超幾何系と呼ぶ。

$$M_A(c): \begin{cases} E_i \cdot f(z) = 0 & (i = 1, \cdots, n) \\ \Box_u \cdot f(z) = 0 & (u \in L_A = \mathrm{Ker}_{\mathbb{Z}} A), \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.1\mathrm{a}) \\ (2.1\mathrm{b}) \end{matrix}$$

ここで、 E_i および $\Box_u$ は各々以下で定義される線形偏微分作用素である。

$$E_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + c_i, \quad \Box_u = \prod_{u_j>0} \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^{u_j} - \prod_{u_j<0} \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^{-u_j}. \tag{2.2}$$

定理 2.1 ([1]). $\Delta_A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{c.h.}\{0, \mathbf{a}(1), \ldots, \mathbf{a}(N)\}$ とおく。

1. $M_A(c)$ は *holonomic.*
2. $\mathrm{rank}\, M_A(c) = \mathrm{vol}_{\mathbb{Z}} \Delta_A$.

ここで、$\mathrm{vol}_{\mathbb{R}}$ を n 次元 *Lebesgue* 測度による体積とするとき、$\mathrm{vol}_{\mathbb{Z}} = n!\, \mathrm{vol}_{\mathbb{R}}$.

さて、 $v \in \mathbb{C}^N$ を $Av = -c$ を満たすように一つとり、

$$\varphi_v(z) = \sum_{u \in \mathrm{L}_A} \frac{z^{u+v}}{\Gamma(\mathbf{1} + u + v)} \tag{2.3}$$

とおく。ここで $\mathbf{1}$ はすべての成分が 1 である $N\times 1$ ベクトルであり、$\Gamma(\mathbf{1}+u+v) = \prod_{j=1}^{N} \Gamma(1+u_j+v_j)$ の意味である。$\varphi_v(z)$ を Γ 級数と呼ぶ。次の事実は直接計算でわかる。

命題 2.2 ([5],[?]). $\varphi_v(z)$ は $M_A(c)$ の形式解である。

Gelfand らの一般的な結果によれば、Δ_A の正則三角形分割 T を選び、各単体 $\sigma \in T$ に対して特別なベクトル v をとることで実際に $M_A(c)$ の解の基底を構成できる。これを説明しよう。

一般に部分集合 $\tau \subset \{1, \ldots, N\}$ に対して、A_τ で $\{\mathbf{a}(j)\}_{j\in\tau}$ を並べた $n \times |\tau|$ 行列とする。部分集合 $\sigma \subset \{1, \ldots, N\}$ で、$|\sigma| = n$ かつ $\det A_\sigma \neq 0$ なるものを n 単体と呼び、以下固定する。整数ベクトル $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\bar\sigma}$ に対し、

$$v_\sigma^{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} -A_\sigma^{-1}(c + A_{\bar\sigma}\mathbf{k}) \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

とおく。すると直接計算により

$$\varphi_{\sigma,\mathbf{k}}(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi_{v_\sigma^{\mathbf{k}}}(z) = z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}\mathbf{c}} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{m}\in\Lambda_{\mathbf{k}}} \frac{(z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}A_{\bar\sigma}} z_{\bar\sigma})^{\mathbf{k}+\mathbf{m}}}{\Gamma(\mathbf{1}_\sigma - A_\sigma^{-1}(\mathbf{c} + A_{\bar\sigma}(\mathbf{k}+\mathbf{m})))(\mathbf{k}+\mathbf{m})!} \tag{2.5}$$

なる式を得る。ここで $\Lambda_{\mathbf{k}} = \left\{\mathbf{k}+\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\bar\sigma} \mid A_{\bar\sigma}\mathbf{m} \in \mathbb{Z}A_\sigma\right\}$ である。$\Lambda_{\mathbf{k}}$ の定義により

$$\varphi_{\sigma,\mathbf{k}}(z) = \varphi_{\sigma,\mathbf{k}'}(z) \iff [A_{\bar\sigma}\mathbf{k}] = [A_{\bar\sigma}\mathbf{k}'] \text{ in } \mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}A_\sigma \tag{2.6}$$

がわかる。また $\{[A_{\bar{\sigma}}\mathbf{k}(i)]\}_{i=1}^r$ を有限 Abel 群 $\mathbb{Z}^{n\times 1}/\mathbb{Z}A_\sigma$ の完全代表系とすると、$\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\bar{\sigma}} = \bigsqcup_{j=1}^r \Lambda_{\mathbf{k}(j)}$ となることからもしすべての $i = 1,\ldots,r$ に対して $\varphi_{\sigma,\mathbf{k}(i)}(z) \neq 0$ であれば、$\{\varphi_{\sigma,\mathbf{k}(i)}(z)\}_{i=1}^r$ は一次独立な形式解である。そこでパラメーター c が σ に対して very generic であることを、すべての $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\bar{\sigma}}$ に対して $A_\sigma^{-1}(c + A_{\bar{\sigma}}\mathbf{m})$ が整数の成分を持たないことでもって定義する。すると c が very generic なる限りはすべての i に対して $\varphi_{\sigma,\mathbf{k}(i)}(z) \neq 0$ となる。

さて、これらの級数の収束性については一般的な処方箋がある（[5]）。本稿で使う形で述べておこう。今、$H_\sigma = \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid |A_\sigma^{-1}y| = 1\right\}$ とおき、さらに十分小さな正の実数 $R > 0$ に対して

$$U_\sigma = \left\{z \in (\mathbb{C}^*)^N \mid \mathrm{abs}(z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)} z_j) < R, \forall \mathbf{a}(j) \in H_\sigma \setminus \sigma\right\} \tag{2.7}$$

とおく。ただし $\mathrm{abs}(\zeta)$ は ζ の絶対値の意味である。

命題 2.3. パラメーター c は *very generic* で、任意の $j \in \bar{\sigma}$ に対して $|A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)| \leq 1$ と仮定する。この時 $\{\varphi_{\sigma,\mathbf{k}(i)}(z)\}_{i=1}^r$ は $M_A(c)$ の一次独立な収束解である。

これで、各単体 σ に対して $r = |\mathbb{Z}^{n\times 1}/\mathbb{Z}A_\sigma| = \mathrm{vol}_\mathbb{Z}(\sigma)$ 個の一次独立解が作れたことになる。最後の式において σ は $\mathrm{c.h.}(0, \{\mathbf{a}(i)\}_{i\in\sigma})$ と同一視した。$M_A(c)$ の rank が $\mathrm{vol}_\mathbb{Z}(\Delta_A)$ であったことを踏まえると Δ_A のうまい三角形分割を考えれば解の基底が作れるとわかる。一般に勝手な部分集合 σ of $\{1,\ldots,N\}$ に対して $\mathrm{cone}(\sigma) = \sum_{i\in\sigma} \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}(i)$ とおく。しばしば、$\sigma \subset \{1,\ldots,N\}$、$\{\mathbf{a}(i)\}_{i\in\sigma}$、$\mathrm{c.h.}(0, \{\mathbf{a}(i)\}_{i\in\sigma})$ の三者を同一視する。$\{1,\ldots,N\}$ の部分集合族 T が Δ_A の三角形分割（triangulation）であるとは、$\{\mathrm{cone}(\sigma) \mid \sigma \in T\}$ が台が $\mathrm{cone}(A)$ となるような単体的扇 (simplicial fan) をなす時を言う。このように定義すれば $\sigma \in T$ の位数は n とは限らぬが、以下では T を n 単体の集合 $\{\sigma \in T \mid |\sigma| = n,\ \det A_\sigma \neq 0\}$ と同一視する。gereric vector $\omega \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ に対して、三角形分割 $T(\omega)$ を次のように定める。$\sigma \subset \{1,\ldots,N\}$ が $T(\omega)$ に属するのは次の場合かつその場合のみである：ある $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ が存在して

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}(i) = \omega_i \text{ if } i \in \sigma \tag{2.8}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}(j) < \omega_j \text{ if } j \in \bar{\sigma} \tag{2.9}$$

となる。T が正則三角形分割であるとは、ある $\omega \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ に対して $T = T(\omega)$ となり、$U_T \overset{def}{=} \bigcap_{\sigma\in T} U_\sigma \neq \varnothing$ となることを言う。（通常の定義では T に対応する二次扇（secondary fan）の中の錐が開錐であるときを言う。U_T は本質的に二次扇の中の錐に対応しているので本稿での定義と同値である。）

定理 2.4. T を Δ_A の正則三角形分割 T で任意の $j \in \bar{\sigma}$ に対して $|A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)| \leq 1$ であるものとする（このようなものは常に存在する）。また、パラメーター c は *very generic* とする。

$$\bigcup_{\sigma\in T} \left\{\varphi_{\sigma,\mathbf{k}(i)}(z)\right\}_{i=1}^r \tag{2.10}$$

は U_T 上 $M_A(c)$ の解空間の基底である。

注意 2.5. *[?]* と *[?] COROLLARY 3.16* により $M_A(c)$ が確定特異点型（*regular holonomic*）であることと、ある線形写像 $l : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$ で、任意の $j = 1,\ldots,N$ に対して $l(\mathbf{a}(j)) = 1$ となるものが存在することは同値である。従って、$M_A(c)$ が確定特異点型であるときは任意の正則三角形分割 T と任意の n 単体 $\sigma \in T$ に対して $\varphi_{\sigma,\mathbf{k}(i)}$ は U_T 上収束する。

3 種種の積分表示と同値性

$k+1$ 個の Laurent 多項式 $h_{l,z^{(l)}}(x)$ $(l=0,\dots,k)$ を考えよう。

$$h_{l,z^{(l)}}(x)=\sum_{j=1}^{N_l} z_j^{(l)} x^{\mathbf{a}^{(l)}(j)}. \tag{3.1}$$

この節では以下の 3 つの積分表示

$$\int h_{1,z^{(1)}}(x)^{-\gamma_1}\cdots h_{k,z^{(k)}}(x)^{-\gamma_k} x^{c-1} e^{h_{0,z^{(0)}}(x)} dx, \tag{3.2}$$

$$\int \exp\left\{h_{0,z^{(0)}}(x)+\sum_{l=1}^{k} y_l h_{l,z^{(l)}}(x)\right\} y^{\gamma-1} x^{c-1} dydx, \tag{3.3}$$

$$\int \frac{e^{h_{0,z^{(0)}}(x)} y^{\gamma-1} x^{c-1}}{\left(1-y_1 h_{1,z^{(1)}}(x)\right)\cdots\left(1-y_k h_{k,z^{(k)}}(x)\right)} dydx \tag{3.4}$$

に対応する D 加群の同型を述べる。まず、(3.2) と (3.3) の間の同型は Cayley trick として広く知られているものである。精神的には導入部で述べたとおりである。本稿では D 加群の順像の間の同型として定式化する。定式化のため Newton 非退化集合（Newton non-degenerate locus）を定義しよう。

定義 3.1. $A=(\mathbf{a}(1)\mid\cdots\mid\mathbf{a}(N))$ を $n\times N$ 整数行列とし、$h_z(x)=\sum_{j=1}^{N} z_j x^{\mathbf{a}(j)}$ とおく。任意の面 $\Gamma<\Delta_A \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{c.h.}\{0,\mathbf{a}(1),\dots,\mathbf{a}(N)\}$ に対して $h_z^{\Gamma}(x)=\sum_{\mathbf{a}(j)\in\Gamma} z_j x^{\mathbf{a}(j)}$ とおく。$z\in\mathbb{A}^N$ が A の *Newton* 非退化集合に属するとは、任意の面 $\Gamma<\Delta_A$ で $0\notin\Gamma$ なるものに対し、

$$\left\{x\in(\mathbb{G}_m)^n \mid \frac{\partial h_z^{\Gamma}}{\partial x_1}(x)=\cdots=\frac{\partial h_z^{\Gamma}}{\partial x_n}(x)=0\right\}=\varnothing. \tag{3.5}$$

が成立する時をいう。A について *Newton* 非退化な点の集合を Ω_z とかく。

下記の定理は A. Adolphson による。

定理 3.2 ([1], COROLLARY 3.8.). *GKZ* 系 $M_A(c)$ は Ω_z 上で可積分接続である。

(3.2) と (3.3) の同値性は下記のように定式化される。

定理 3.3 (Cayley trick for mixed integrals). $N=N_0+\cdots+N_k$, $z=(z^{(0)},\dots,z^{(k)})$, $A_l=(\mathbf{a}^{(l)}(1)\mid\cdots\mid\mathbf{a}^{(l)}(N_l))$ とおく。$\Omega_z\subset\mathbb{A}_z^N$ を

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c|ccc}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \hline
 & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ \hline
 & A_0 & & & A_1 & & & A_2 & & \cdots & & A_k &
\end{array}\right) \tag{3.6}$$

の $Newton$ 非退化集合とする。$\pi : \Omega_z \times (\mathbb{G}_m)^n_x \setminus \left\{ h_{1,z^{(1)}} \cdots h_{k,z^{(k)}} = 0 \right\} \to \Omega_z$ および $\varpi : \Omega_z \times (\mathbb{G}_m)^k_y \times (\mathbb{G}_m)^n_x \to \Omega_z$ を射影、$\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\ (l = 1, \ldots, k)$ をパラメーターとする。この時、下記の D 加群の標準的同型

$$\int_\pi \mathcal{O}_{\Omega_z \times (\mathbb{G}_m)^n_x \setminus \left\{ h_{1,z^{(1)}} \cdots h_{k,z^{(k)}} = 0 \right\}} h_1^{-\gamma_1} \cdots h_k^{-\gamma_k} x^c e^{h_{0,z^{(0)}}(x)} \simeq \int_\varpi \mathcal{O}_{\Omega_z \times (\mathbb{G}_m)^k_y \times (\mathbb{G}_m)^n_x} y^\gamma x^c e^{h_z(y,x)} \tag{3.7}$$

が成立する。ここに $h_z(y,x) = h_{0,z^{(0)}}(x) + \sum_{l=1}^{k} y_l h_{l,z^{(l)}}(x)$ である。

次に (3.2) と (3.4) の間の同型を述べよう。

$$Y = \mathbb{A}^N_z \times (\mathbb{G}_m)^k_y \times (\mathbb{G}_m)^n_x \tag{3.8}$$

および超曲面

$$S_l = \{1 = y_l h_{l,z^{(l)}}(x)\} \subset Y\ (l = 1, \ldots, k) \tag{3.9}$$

を考えよう。$X = \mathbb{A}^N_z \times (\mathbb{G}_m)^n_x \setminus \left\{ h_{1,z^{(1)}} \ldots h_{k,z^{(k)}} = 0 \right\}$、
$\tilde{Y} = \mathbb{A}^N_z \times (\mathbb{G}_m)^k_y \times (\mathbb{G}_m)^n_x \setminus \left\{ (1 - y_1 h_{1,z^{(1)}}) \ldots (1 - y_k h_{k,z^{(k)}}) = 0 \right\}$ とおく。次の超曲面の埋め込みの列

$$\begin{aligned} S_1 \cap \cdots \cap S_k &\to S_2 \cap \cdots \cap S_k \setminus S_1 \\ &\to S_3 \cap \cdots \cap S_k \setminus (S_1 \cup S_2) \\ &\to \cdots \\ &\to Y \setminus (S_1 \cup \cdots \cup S_k) \end{aligned}$$

に対する Leray の多重留数（résidu composé）に対応する議論を行うことで、次の同型を得る。

定理 3.4 (Composed residue isomorphism). $\gamma_l \notin \mathbb{Z}$ と仮定する。この時 $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^N}$ 加群の標準的同型

$$\int_{\pi_z} \mathcal{O}_X h_{1,z^{(1)}}^{-\gamma_1} \ldots h_{k.z^{(k)}}^{-\gamma_k} x^c e^{h_{0,z^{(0)}}(x)} \simeq \int_{\tilde{\varpi}_z} \mathcal{O}_{\tilde{Y}} y^\gamma x^c e^{h_{0,z^{(0)}}(x)} \tag{3.10}$$

が成立する。ただし、$\tilde{\varpi} : \tilde{Y} \to \mathbb{A}^N_z$ は自然な射影である。

4　積分サイクルの構成法 I: Laplace 積分表示

本節では Laplace 積分表示

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+1}} \int_\Gamma e^{h_z(x)} x^{c-\mathbf{1}} dx \tag{4.1}$$

に対する積分サイクルを三角形分割を用いて構成する方法について述べる。この構成方法は [6] にその発想を負う。n 単体 $\sigma \subset \{1, \cdots, N\}$ を、任意の $j \in \overline{\sigma}$ に対して $s_j = |A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)| \leq 1$ が成り立つようにとる。命題 2.3 によれば、Γ 級数 $\{\varphi_{\sigma,\mathbf{k}(i)}(z)\}_{i=1}^r$ はすべて収束する。今、被覆写像

$$\mathbb{T}^n_x \xrightarrow{p} \mathbb{T}^\sigma_{\xi_\sigma} \tag{4.2}$$

を

$$x \mapsto \xi_\sigma = z_\sigma x^{A_\sigma}. \tag{4.3}$$

で定める。$\sigma = \{i_1, \dots, i_n\}$ と書くとき、$i_1 < \cdots < i_n$ と並んでいると仮定しよう。単純計算により次の公式

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{\det(A_\sigma)} \frac{d\xi_\sigma}{\xi_\sigma} \tag{4.4}$$

を得る。我々は積分サイクルを ξ_σ 座標におけるサイクルの p による引き戻しとして構成したい。サイクルの（固有写像による）引き戻しは標準的な技法であるが、一般的な説明をしておく。X, Y を向きづけられた n 次元可微分多様体とし、$\pi : X \to Y$ を次数 d の被覆写像とする。Y 上に局所系 $\mathcal{L}$ が与えられているとする。また、$\Phi_Y : \mathrm{H}_c^{n-p}(Y, \mathcal{L}) \to \mathrm{H}_p(Y, \mathcal{L})$ および $\Phi_X : \mathrm{H}_c^{n-p}(X, \pi^*\mathcal{L}) \to \mathrm{H}_p(X, \pi^*\mathcal{L})$ で Poincaré 双対を表す。下記の写像の合成を π^* で表す。

$$\mathrm{H}_p(Y, \mathcal{L}) \overset{\Phi_Y^{-1}}{\to} \mathrm{H}_c^{n-p}(Y, \mathcal{L}) \overset{\pi^*}{\to} \mathrm{H}_c^{n-p}(X, \pi^*\mathcal{L}) \overset{\Phi_X}{\to} \mathrm{H}_p(X, \pi^*\mathcal{L}). \tag{4.5}$$

引き戻し $\mathrm{H}_c^{n-p}(Y, \mathcal{L}) \overset{\pi^*}{\to} \mathrm{H}_c^{n-p}(X, \pi^*\mathcal{L})$ は π が固有射であることから well-defined であることに注意する。

補題 4.1. p サイクル $[\gamma] \in \mathrm{H}_p(Y, \mathcal{L})$ と p コサイクル $[\omega] \in \mathrm{H}^p(Y, \mathcal{L}^\vee)$ に対し、

$$\int_{\pi^*\gamma} \pi^*\omega = d \int_\gamma \omega \tag{4.6}$$

が成り立つ。

証明は $[\xi] \in \mathrm{H}_c^{n-p}(X, \pi^*\mathcal{L})$ と $[\eta] \in \mathrm{H}^p(X, \pi^*\mathcal{L}^\vee)$ に対して

$$\int_X \xi \wedge \eta = \int_{\Phi_X(\xi)} \eta \tag{4.7}$$

が成立することを用いればよい。さて、(4.1) の積分サイクルの構成に戻る。積分サイクル Γ がある $\mathbb{T}^\sigma_{\xi_\sigma}$ におけるサイクル γ の引き戻しであるとしよう。即ち、$\Gamma = p^*\gamma$ と書けているとする。すると等式

$$f_{\sigma,0}(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+1}} \int_\Gamma e^{h_z(x)} x^{\mathbf{c}-\mathbf{1}} dx \tag{4.8}$$

$$= \frac{z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}\mathbf{c}}}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+1}} \int_\gamma \exp\{\sum_{i\in\sigma} \xi_i + \sum_{j\in\bar{\sigma}} z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)} z_j \xi_\sigma^{A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)}\} \xi_\sigma^{A_\sigma^{-1}\mathbf{c}-\mathbf{1}} d\xi_\sigma. \tag{4.9}$$

を得る。ここで平面波分解座標

$$\xi_i = \rho u_i \quad (i \in \sigma), \tag{4.10}$$

を取ろう。ここで、$\rho \in \mathbb{C}^*$ であり、u_i は $\{u_\sigma = (u_i)_{i\in\sigma} \in (\mathbb{C}^*)^\sigma \mid \sum_{i\in\sigma} u_i = 1\}$ の座標である。体積要素の変換は

$$d\xi_\sigma = \rho^{n-1} d\rho du_\sigma \tag{4.11}$$

によって与えられる。ただし、$du_\sigma = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k du_{\widehat{i_k}}$ および $du_{\widehat{i_k}} = du_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{du_{i_k}} \wedge \cdots \wedge du_{i_n}$ である。この座標において、

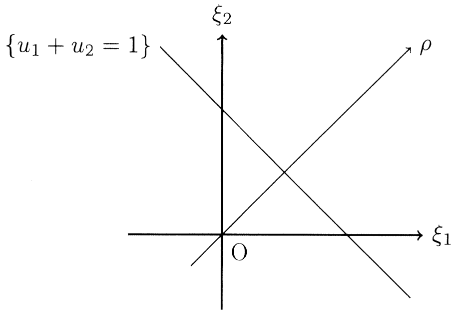

図 1: plane wave coordinate for $n = 2$ and $\sigma = \{1, 2\}$

$$f_{\sigma,0}(z) = \frac{z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}\mathbf{c}}}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+1}} \int_\gamma \exp\{\rho + \sum_{j\in\bar{\sigma}} z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)} z_j u_\sigma^{A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)} \rho^{|A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)|}\} \times$$
$$\rho^{|A_\sigma^{-1}\mathbf{c}|-1} u_\sigma^{A_\sigma^{-1}\mathbf{c}-\mathbf{1}_\sigma} d\rho du_\sigma \tag{4.12}$$

という等式を得る。
そこで、我々は積分サイクル γ を ρ 方向のサイクルと u_σ 方向のサイクルとに分解して構成する。ρ 方向では、所謂 Hankel の道 Γ_0 をとる。Γ_0 は式 $\Gamma_0 = (-\infty, -\delta]e^{-\pi\sqrt{-1}} + l_{(0+)} - (-\infty, -\delta]e^{\pi\sqrt{-1}}$ により定義する。ここで $e^{\pm\pi\sqrt{-1}}$ は偏角を表し、$l_{(0+)}$ は原点を正の向きに一周する小さな円弧を表す。

補題 4.2. $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し、

$$\int_{\Gamma_0} \xi^{\alpha-1} e^\xi d\xi = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

が成立する。

u_σ 方向については、所謂 Pochhammer の道をとる。[3] にある次の補題を引用しよう。(この補題は以前から知られていたが、[3] の証明は読みやすいものになっている。)

補題 4.3 ([3] Proposition 6.1)**.** $\Delta^k \subset \mathbb{R}^k$ を k 単体 $\Delta^k = \{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k | x_1, \cdots, x_k \geq 0, \sum_{j=1}^k x_j \leq 1\}$ とし、$\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$ とする。P_k を *[3]* の意味で Δ_k に付随する *Pochhammer* の道とするとき、公式

$$\int_{P_k} t_1^{\alpha_1-1} \cdots t_k^{\alpha_k-1}(1-t_1\cdots-t_k)^{\alpha_{k+1}-1} dt_1 \cdots dt_k = \frac{e^{-\pi\sqrt{-1}(\alpha_1+\cdots+\alpha_{k+1})}(2\pi\sqrt{-1})^{k+1}}{\Gamma(1-\alpha_1)\cdots\Gamma(1-\alpha_{k+1})\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_{k+1})} \tag{4.13}$$

が成立する。

P_k は k 単体 Δ_k の正則化に相当するものである ([2]、[3])。P_k は座標軸 $\{x_j = 0\}$ $(j = 1, \ldots, k)$ および超平面 $\{x_1 + \cdots + x_k = 1\}$ とは交わらないことに気を付ける。

ここで積分サイクル γ を直積 $\gamma = \Gamma_0 \times P_{u_\sigma}$ にとろう。P_{u_σ} は $\left\{u_\sigma = (u_i)_{i\in\sigma} \in \mathbb{R}^\sigma \mid \sum_{i\in\sigma} u_i = 1\right\} \simeq \mathbb{R}^{|\sigma|-1}$ における単体 $\{u_i \geq 0\} \simeq \Delta^{|\sigma|-1}$ に付随した Pochhammer の道である。すると $|A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)| \leq 1$

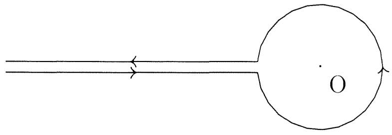

図 2: Hankel の道

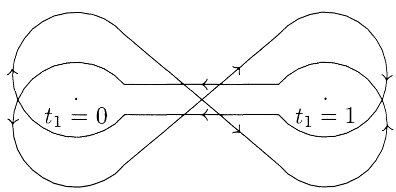

図 3: Pochhammer の道 P_1

であることから $f_0(z)$ は $z \in U_\sigma$ なる限り収束し、被積分函数を Taylor 展開することにより公式

$$f_{\sigma,0}(z) = \sum_{i=1}^{r} (1 - e^{-2\pi\sqrt{-1}|A_\sigma^{-1}(\mathbf{c}+A_{\bar\sigma}\mathbf{k}(i))|})\varphi_{\sigma,\mathbf{k}(i)}(z) \tag{4.14}$$

を得る。そこで最初の積分サイクルは引き戻し $\Gamma_{\sigma,0} = p^*\gamma$ と定義する。これは非有界なサイクルであるので、厳密には以下のように構成する。座標 ρ を函数 $\rho : \mathbb{T}_x^n \ni x \mapsto \sum_{i\in\sigma} z_i x^{\mathbf{a}(i)} \in \mathbb{C}$ と思う。この時、適当に Γ_0 を摂動して Γ_0 の単連結な開近傍 U 上への制限 $\rho : \rho^{-1}(U) \to U$ は自明なファイバー束になっているとしてよい。(Thom-Mather の第一イソトピー定理 [12] による。実際には擬斉次性により ρ は $\mathbb{C}^\times$ 上のファイバー束になっている。)今、$1 \in \Gamma_0$ として一般性を失わない。p を $\rho = 1$ へ制限することにより被覆写像

$$p : \left\{\sum_{i\in\sigma} z_i x^{\mathbf{a}(i)} = 1\right\} \setminus \bigcup_{i\in\sigma}\{z_i x^{\mathbf{a}(i)} = 0\} \to \left\{\sum_{i\in\sigma} u_i = 1\right\} \setminus \bigcup_{i\in\sigma}\{u_i = 0\} \tag{4.15}$$

が誘導される。Pochhammer の道 P_{u_σ} はホモロジー群

$$\mathrm{H}_{n-1}\left(\left\{\sum_{i\in\sigma} u_i = 1\right\} \setminus \bigcup_{i\in\sigma}\{u_i = 0\}; \underline{\mathbb{C}} u_\sigma^{A_\sigma^{-1}c}\right) \tag{4.16}$$

の元であるから、その引き戻しは

$$p^*(P_{u_\sigma}) \in \mathrm{H}_{n-1}\left(\left\{\sum_{i\in\sigma} z_i x^{\mathbf{a}(i)} = 1\right\} \setminus \bigcup_{i\in\sigma}\{z_i x^{\mathbf{a}(i)} = 0\}; \underline{\mathbb{C}} x^c\right) \tag{4.17}$$

となる。ρ は Γ_0 上自明束となるから、引き戻し $p^*(P_{u_\sigma})$ を Γ_0 に沿って延長することにより積分サイクル $\Gamma_{\sigma,0}$ を得る。以上の議論を命題の形にまとめておこう。

命題 4.4. n 単体 $\sigma \subset \{1, \cdots, N\}$ で任意の $j \in \bar\sigma$ に対して $s_j = |A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)| \leq 1$ となるものをとる。その時、

$$f_{\sigma,0}(z) \overset{def}{=} \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\Gamma_{\sigma,0}} e^{h_z(x)} x^{\mathbf{c}-\mathbf{1}} dx \tag{4.18}$$

は任意のパラメーター $c \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ に対して収束し、等式

$$f_{\sigma,0}(z) = \sum_{i=1}^{r}\left(1 - e^{-2\pi\sqrt{-1}|A_\sigma^{-1}(\mathbf{c}+A_{\bar\sigma}\mathbf{k}(i))|}\right)\varphi_{\sigma,\mathbf{k}(i)}(z) \tag{4.19}$$

が成立する。

このままではただ一つの積分サイクルを作り、級数が出てくることを見ただけであるが、被覆変換を考えることにより $r=|\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}A_\sigma|$ 個の独立な積分サイクルを手に入れることができる。$\tilde{\mathbf{k}}\in\mathbb{Z}^n$ をとり、$\tilde{\xi}_\sigma\mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}\tilde{\mathbf{k}}}\tilde{\xi}_\sigma=(e^{2\pi\sqrt{-1}\tilde{k}_1}\tilde{\xi}_1,\dots,e^{2\pi\sqrt{-1}\tilde{k}_n}\tilde{\xi}_n)$ に対応した $\Gamma_{\sigma,0}$ の被覆変換を考える。この積分サイクルを $\Gamma_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}$ と書く。(4.18)、(2.5) により計算していくと次を得る。

$$
\begin{aligned}
f_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}(z) &\overset{def}{=} \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+1}}\int_{\Gamma_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}} e^{h_z(x)}x^{c-1}dx && (4.20)\\
&= \frac{z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}\mathbf{c}}}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+1}}\int_{\Gamma_0\times P_{u_\sigma}} \exp\left\{\sum_{i\in\sigma}\xi_i+\sum_{j\in\bar{\sigma}} z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)}z_j e^{2\pi\sqrt{-1}{}^t\tilde{\mathbf{k}}A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)}\xi_\sigma^{A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)}\right\}\times\\
&\quad \xi_\sigma^{A_\sigma^{-1}\mathbf{c}-\mathbf{1}}d\xi_\sigma && (4.21)\\
&= e^{2\pi\sqrt{-1}{}^t\mathbf{k}A_\sigma^{-1}c}\sum_{i=1}^{r}\left(1-e^{-2\pi\sqrt{-1}|A_\sigma^{-1}(\mathbf{c}+A_{\bar{\sigma}}\mathbf{k}(i))|}\right)e^{2\pi\sqrt{-1}{}^t\tilde{\mathbf{k}}A_\sigma^{-1}\mathbf{k}(i)}\varphi_{\sigma,\mathbf{k}(i)}(z). && (4.22)
\end{aligned}
$$

条件

$$|A_\sigma^{-1}(\mathbf{c}+A_{\bar{\sigma}}\mathbf{k}(i))|\notin\mathbb{Z}\ \ (\forall i=1,\dots,r)$$

を仮定すると、$\tilde{\mathbf{k}}(1),\dots,\tilde{\mathbf{k}}(r)\in\mathbb{Z}^n$ を行列

$$\left(e^{2\pi\sqrt{-1}{}^t\tilde{\mathbf{k}}(i)A_\sigma^{-1}\mathbf{k}(j)}\right)_{i,j=1}^{r} \tag{4.23}$$

が可逆になるように取れれば r 個の独立な積分サイクルを構成できる。

補題 4.5. ペアリング $\langle\ ,\ \rangle:\mathbb{Z}^{n\times1}/\mathbb{Z}{}^tA_\sigma\times\mathbb{Z}^{n\times1}/\mathbb{Z}A_\sigma\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を $\langle v,w\rangle={}^tvA_\sigma^{-1}w$ で定義すると、$\langle,\rangle$ は有限アーベル群の意味で *perfect pairing* である。即ち、任意に $v\in\mathbb{Z}^{n\times1}/\mathbb{Z}{}^tA_\sigma$ を固定すると、$<\langle v,w\rangle=0$ が任意の $w\in\mathbb{Z}^{n\times1}/\mathbb{Z}A_\sigma$, について成り立てば $v=0$ であり、$w\in\mathbb{Z}^{n\times1}/\mathbb{Z}{}^tA_\sigma$ についても同様である。

この証明は単因子論から直ちに従う。この補題と群の埋め込み $\phi:\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\ni\alpha\mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\in\mathbb{C}^*$ により、指標群の表示 $\mathbb{Z}^{n\times1}/\mathbb{Z}{}^tA_\sigma\tilde{\to}\widehat{\mathbb{Z}^{n\times1}/\mathbb{Z}A_\sigma}$ を得る。特に $\{\tilde{\mathbf{k}}(i)\}_{i=1}^r$ of $\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}{}^tA_\sigma$ を完全代表系とすれば Schur の直交性から行列

$$\frac{1}{r}\left(e^{2\pi\sqrt{-1}{}^t\tilde{\mathbf{k}}(i)A_\sigma^{-1}A_{\bar{\sigma}}\mathbf{k}(j)}\right) \tag{4.24}$$

はユニタリ行列である。

注意 4.6. 任意の有限アーベル群 G に対して標準的同型

$$\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\simeq\mathrm{Ext}^1(G,\mathbb{Z}). \tag{4.25}$$

がある。補題 *4.5* のペアリングはこの同型の一つの実現である。

定理 4.7. T を正則三角形分割であって、任意の $\sigma\in T$ に対して $s_j=|A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)|\le1$ *(*$j\in\bar{\sigma}$*)* となるものとする。*parameter vector* c は任意の単体 $\sigma\in T$ に対して *very generic* であると仮定し、各 $\sigma\in T$ に対して $|A_\sigma^{-1}(\mathbf{c}+A_{\bar{\sigma}}\mathbf{k}(i))|\notin\mathbb{Z}$ *(*$i=1,\dots,r$*)* とする。この時、

$$f_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}(j)}(z)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+1}}\int_{\Gamma_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}(j)}}e^{h_z(x)}x^{c-1}dx \tag{4.26}$$

とおけば、$\bigcup_{\sigma\in T}\{f_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}(j)}(z)\}_{j=1}^{r}$ は U_T 上の $M_A(c)$ の解空間の基底をなす。ここで、$\{\tilde{\mathbf{k}}(j)\}_{j=1}^{r}$ は有限アーベル群 $\mathbb{Z}^{n\times 1}/\mathbb{Z}^t A_\sigma$ の完全代表系である。更に、各 $\sigma\in T$ に対して積分表示と級数解の間の変換公式

$$\begin{pmatrix} f_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}(1)}(z) \\ \vdots \\ f_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}(r)}(z) \end{pmatrix} = T_\sigma \begin{pmatrix} \varphi_{\sigma,\mathbf{k}(1)}(z) \\ \vdots \\ \varphi_{\sigma,\mathbf{k}(r)}(z) \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

が成立し、T_σ は下記の可逆 $r\times r$ 行列で与えられる。

$$T_\sigma = \mathrm{diag}\left(e^{2\pi\sqrt{-1}\,{}^t\mathbf{k}(i)A_\sigma^{-1}c}\right)_{i=1}^{r}\left(e^{2\pi\sqrt{-1}\,{}^t\tilde{\mathbf{k}}(i)A_\sigma^{-1}\mathbf{k}(j)}\right)_{i,j=1}^{r}\mathrm{diag}\left(1-e^{-2\pi\sqrt{-1}|A_\sigma^{-1}(\mathbf{c}+A_{\bar\sigma}\mathbf{k}(j))|}\right)_{j=1}^{r}. \tag{4.28}$$

5 積分サイクルの構成法 II: 留数積分表示

本節では Laurent 多項式 $h_{l,z^{(l)}}(x)=\sum_{j=1}^{N_l} z_j^{(l)} x^{\mathbf{a}^{(l)}(j)}$ $(l=1,\dots,k)$ を与えた時、

$$f(z)=\int \frac{y^{\gamma-1}x^{c-1}}{(1-y_1h_{1,z^{(1)}}(x))\cdots(1-y_kh_{k,z^{(k)}}(x))}dydx, \tag{5.1}$$

の形の積分表示を留数積分表示と呼んでその積分サイクルの構成法を述べる。前節の内容を少し変更するだけで本節の結果も出てしまう。まず、この形の積分の満たす方程式系を書いておこう。$n\times N_l$ 行列 A_l を $A_l=(\mathbf{a}^{(l)}(1)\mid\cdots\mid\mathbf{a}^{(l)}(N_l))$ で定め、$(n+k)\times N$ $(N=N_1+\cdots+N_k)$ 行列 A を

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \hline & A_1 & & & A_2 & & \cdots & & A_k & \end{array}\right) \tag{5.2}$$

で定める。$d=\begin{pmatrix}\gamma\\ c\end{pmatrix}$ と置く時、次の命題が単純計算によりわかる。

命題 5.1. *(5.1)* は $M_A(d)$ の解である。

さて、積分サイクルの構成法を述べよう。勝手な $n+k$ 単体 $\sigma\subset\{1,\dots,N\}$ を取り、$\tilde{x}=(y,x)$ と置く。A の形から常に $|A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)|\le 1$ $(\forall j\in\bar\sigma)$ が成立することに気を付けておこう。これはすべての Γ 級数が収束級数であることを意味し、$M_A(d)$ が確定特異点型であることに対応している。そこで、

$$f_{\sigma,0}(z)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+2k}}\int_{\Gamma_{\sigma,0}}\frac{\tilde{x}^{d-1}}{(1-\tilde{h}_{1,z^{(1)}}(\tilde{x}))\cdots(1-\tilde{h}_{k,z^{(k)}}(\tilde{x}))}d\tilde{x} \tag{5.3}$$

と置く。ただし、

$$\tilde{h}_{l,z^{(l)}}(\tilde{x})=y_l\sum_{j=1}^{N_l}z_j^{(l)}x^{\mathbf{a}^{(l)}(j)}=\sum_{j\in I_l}z_j\tilde{x}^{\mathbf{a}(j)} \tag{5.4}$$

と置いた。また、$\Gamma_{\sigma,0}$ は以下で定義する。§4 のように、被覆写像

$$\mathbb{T}_{\tilde{x}}^{n+k}\xrightarrow{p}\mathbb{T}_{\xi_\sigma}^{\sigma} \tag{5.5}$$

を

$$\tilde{x} \mapsto \xi_\sigma = z_\sigma \tilde{x}^{A_\sigma}. \tag{5.6}$$

で定める。$\sigma^{(l)} = \sigma \cap I_l$、$\overline{\sigma}^{(l)} = I_l \setminus \sigma^{(l)}$ と置き、積分サイクルが引き戻し $\Gamma_{\sigma.0} = p^*\gamma$ の形であると仮定しよう。$\gamma \in \mathrm{H}_{n+k}(\mathbb{T}^\sigma_{\xi_\sigma}; \mathbb{C}\xi_\sigma^{A_\sigma^{-1}d})$ である。すると、公式

$$f_{\sigma,0}(z) = \frac{z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}d}}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+2k}} \int_\gamma \frac{\xi_\sigma^{A_\sigma^{-1}d-\mathbf{1}}}{\prod_{l=1}^k \left(1 - \sum_{i\in\sigma^{(l)}} \xi_i - \sum_{j\in\overline{\sigma}^{(l)}} (z_\sigma^{-A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)} z_j)\xi_\sigma^{A_\sigma^{-1}\mathbf{a}(j)}\right)} d\xi_\sigma \tag{5.7}$$

を得る。ここで $z \in U_\sigma$ なる限り被積分函数の極は積分サイクルには触れないから、積分は収束している。 $P_{\sigma^{(l)}}$ で $\mathbb{T}^{\sigma^{(l)}}_{\xi_{\sigma^{(l)}}}$ における Pochhammer の道を表すことにすると、

$$\gamma = P_\sigma \overset{\mathrm{def}}{=} \prod_{l=1}^k P_{\sigma^{(l)}}. \tag{5.8}$$

とおいて計算することにより、

$$f_{\sigma,0}(z) = \frac{e^{-\pi\sqrt{-1}|A_\sigma^{-1}d|}}{\prod_{l=1}^k \Gamma\left(\sum_{i\in\sigma^{(l)}} {}^t\mathbf{e}_i A_\sigma^{-1} d\right)} \sum_{i=1}^r \varphi_{\sigma,\mathbf{k}(i)}(z) \tag{5.9}$$

を得る。§4 同様に $\xi_\sigma \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}\tilde{\mathbf{k}}}\xi_\sigma$ ($\tilde{\mathbf{k}} \in \mathbb{Z}^{n+k}$) に沿った $\Gamma_{\sigma,0}$ の被覆変換像を $\Gamma_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}}$ と書くと定理 4.7 の類似を得る。

定理 5.2. T を正則三角形分割、d を *very generic* とし、任意の $l = 1, \ldots, k$ に対して $\sum_{i\in\sigma^{(l)}} {}^t\mathbf{e}_i A_\sigma^{-1} d \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ と仮定する。この時、

$$f_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}(j)}(z) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{n+2k}} \int_{\Gamma_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}(j)}} \frac{y^{\gamma-1}x^{c-1}}{(1-y_1h_{1,z^{(1)}}(x))\cdots(1-y_kh_{k,z^{(k)}}(x))} dydx, \tag{5.10}$$

と置くと、$\bigcup_{\sigma\in T}\{f_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}(j)}(z)\}_{j=1}^r$ は U_T 上 $M_A(d)$ の解空間の基底をなす。ここで、$\{\tilde{\mathbf{k}}(j)\}_{j=1}^r$ は $\mathbb{Z}^{n+k}/\mathbb{Z}^t A_\sigma$ の完全代表系である。さらに、各 $\sigma \in T$ に対して変換公式

$$\begin{pmatrix} f_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}(1)}(z) \\ \vdots \\ f_{\sigma,\tilde{\mathbf{k}}(r)}(z) \end{pmatrix} = T_\sigma \begin{pmatrix} \varphi_{\sigma,\mathbf{k}(1)}(z) \\ \vdots \\ \varphi_{\sigma,\mathbf{k}(r)}(z) \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

が成り立つ。ここで T_σ は下記の可逆 $r \times r$ 行列である。

$$T_\sigma = \frac{e^{-\pi\sqrt{-1}|A_\sigma^{-1}d|}}{\prod_{l=1}^k \Gamma\left(\sum_{i\in\sigma^{(l)}} {}^t\mathbf{e}_i A_\sigma^{-1} d\right)} \operatorname{diag}\left(e^{2\pi\sqrt{-1}{}^t\tilde{\mathbf{k}}(i)A_\sigma^{-1}d}\right)_{i=1}^r \left(e^{2\pi\sqrt{-1}{}^t\tilde{\mathbf{k}}(i)A_\sigma^{-1}A_{\overline{\sigma}}\mathbf{k}(j)}\right)_{i.j=1}^r. \tag{5.12}$$

上記の具体的計算から GKZ の解層と積分サイクルの空間の同型も証明することができる。

定理 5.3. *parameter* d が *non-resonant* かつ、ある単体 σ が存在して $\sum_{i\in\sigma^{(l)}} {}^t\mathbf{e}_i A_\sigma^{-1} d \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ がすべての $l=1,\dots,k$ に対して成立すると仮定する。この時、局所系の同型

$$\int : R^{n+k}\varpi_!(\mathbb{C}_{\tilde{Y}^{an}} y^\gamma x^c) \restriction_{\Omega^{an}} \ni \Gamma \mapsto \int_\Gamma \frac{y^{\gamma-1}x^{c-1}dydx}{(1-y_1h_{1,z^{(1)}}(x))\cdots(1-y_kh_{k,z^{(k)}}(x))} \in \mathrm{Sol}_{M_A(c)} \restriction_{\Omega^{an}} \tag{5.13}$$

が成立する。

この定理は両辺の局所系が互いに同型な既約局所系となることから、上記の射が 0 射でないことを示せばよい（Schur の補題）。この定理の仮定の下、この射が 0 にならないことを上述の具体的な計算を援用して示すことができる（級数の係数がすべて 0 になるのがいつかということを考えればよい）。

[10] では Euler 型積分表示の場合の積分サイクルの構成法についても述べてある。紙数の都合で本稿では述べない。

参考文献

[1] Adolphson, A., Hypergeometric functions and rings generated by monomials, Duke Math. J. 73, no. 2, 269-290, 1994

[2] Aomoto, K., Kita, M., Theory of hypergeometric functions, Springer-Verlag, Tokyo, 2011

[3] Beukers, F., Algebraic A-hypergeometric functions, Inv. Math., Volume 180, pp589-610, 2009

[4] Esterov, A., Takeuchi, K., Confluent A -hypergeometric functions and rapid decay homology cycles. Amer. J. Math. 137, no. 2, 365-409, 2015

[5] Fernández-Fernández, M.-C., Irregular Hypergeometric D-Modules, Adv. Math., 224, no. 5, 1735-1764, 2010

[6] Gelfand, I. M., Graev, M. I., GG functions and their relations to general hypergeometric functions. Lett. Math. Phys. 50, no. 1, 1-27, 1999

[7] Gel'fand, I. M., Kapranov, M. M., Zelevinsky, A. V., Hypergeometric functions and toric varieties. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 23 (1989), no. 2, 12-26; translation in Funct. Anal. Appl. 23 (1989), no. 2, 94-106

[8] Hotta, R., Tanisaki, T., Takeuchi, K., D-Modules, Perverse sheaves, and Representation Theory, Progress in Math., vol. 236, Birkhauser

[9] Leray, J., Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, Bull. Soc. Math. France 87 (1959), 81–180.

[10] S.-J. Matsubara-Heo, Laplace, Residue, and Euler integral representations of GKZ hypergeometric functions, arXiv:1801.04075

[11] Schulze, M., Walther, U., Hypergeometric D-modules and twisted Gauß-Manin systems, J. Algebra 322, no. 9, 3392-3409, 2009

[12] Verdier, J.-L. Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Invent. Math. 36 (1976), 295–312.