数理解析研究所講究録 第2101巻 2019年 153-156

Singularities of gravity water waves

Keisuke Uchikoshi
Department of Mathematics,
National Defense Academy,
Yokosuka 239-8686, Japan
e-mail: uchikosh@nda.ac.jp
防衛大学校数学教育室　打越敬祐

要旨. 2次元非圧縮性完全流体とその表面を考え，流体表面における特異点の伝播について考察する．そこで流体の内部で流速や圧力は実解析的であり，流体表面は孤立特異点以外は実解析的であると仮定し，オイラー方程式の初期値境界値問題を考察する．このような初期値境界値問題の解を構成し，流体表面の孤立特異点が流速で伝播することを示す．これはこの点においてよどみ (stagnation) が起きていることを意味する．

Key words. オイラー方程式，特異点の伝播

MSC2000. 76B03, 35A20, 35A21

1　主要結果

表面張力のない，2次元非圧縮性完全流体を考える．十分小さな定数 $r>0$ に対して，

$$\begin{aligned} \omega &= \omega(r) &&= \{x \in \mathbf{R}^3;\ |x| < r\}, \\ \omega_H &= \omega_H(r) &&= \{x \in \omega;\ x_2 = h(x'')\}, \\ \omega_- &= \omega_-(r) &&= \{x \in \omega;\ x_2 < h(x'')\} \end{aligned}$$

とする．ここで，関数 $h(x'')$ は波の高さを表し，ω_H は流体表面を表す．領域 ω_- は流体で満たされている．各点における流速を $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$，圧力を $p(x)$ とする． オイラー方程式は ω_- において

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \partial_{x_0} u_1 + \displaystyle\sum_{1\le k\le 2} u_k \partial_{x_k} u_1 = -\frac{1}{\rho}\partial_{x_1} p, \\ \partial_{x_0} u_2 + \displaystyle\sum_{1\le k\le 2} u_k \partial_{x_k} u_2 = -\frac{1}{\rho}\partial_{x_2} p - g, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases}$$

と表され，波の高さ $h(x'')$ は ω_H において

$$\text{(2)} \qquad \partial_{x_0} h + u_1 \partial_{x_1} h = u_2$$

を満たす．

表面上の動点 $(A_1(x_0), A_2(x_0))$ が流速で移動しているとする：

$$\text{(3)} \qquad \partial_{x_0} A_k = u_k(x_0, A_1(x_0), h(x_0, A_1(x_0))).$$

これらの関数は $1 \leq k \leq 2$ に対して初期条件

$$
(4) \qquad \begin{cases} u_k(0, x') = u_k^0(x'), \\ h(0, x_1) = h^0(x_1), \\ A_k(0) = A_k^0 \end{cases}
$$

を満たしているものとする．このとき

$$
(5) \qquad \operatorname{div} u^0 = 0.
$$

および

$$
(6) \qquad (0, A_1(0), A_2(0)) \in \omega_H.
$$

と仮定しなければならない．一方 (6) を仮定すると，つねに

$$
(x_0, A_1(x_0), A_2(x_0)) \in \omega_H.
$$

となることが容易にわかる．また圧力 $p(x)$ に対して境界条件

$$
(7) \qquad \begin{cases} p(x'', h(x'')) & = p^0(x''), \\ \partial_n p(x'', h(x'')) & = p^1(x''). \end{cases}
$$

を仮定する．ここで n は ω_H の上向き単位法線ベクトルを表す．以下方程式の解が $(x_0, A_1(x_0), A_2(x_0))$ において特異点を持ち，その他の点では実解析的な場合を考える．

3 次元複素ユークリッド空間の座標も x で表すことにする．また $A_k(x_0)$ は複素数 x_0 について求めることとし，

$$
\begin{aligned}
z = (z_0, z_1, z_2) \quad &= (x_0, x_1 - \sqrt{-1}x_2, x_1 + \sqrt{-1}x_2), \\
(B_1(z_0), B_2(x_0)) \quad &= (A_1(x_0) - \sqrt{-1}A_2(x_0), A_1(x_0) + \sqrt{-1}A_2(x_0))
\end{aligned}
$$

とする．このとき

$$
\begin{aligned}
\Omega \quad &= \Omega_1(r) \quad = \{x \in \mathbf{C}^3;\ |x| < r,\ z_1 - B_1(z_0) \neq 0, z_2 - B_2(z_0) \neq 0\}, \\
\Omega' \quad &= \Omega'(r) \quad = \{x' \in \mathbf{C}^2;\ |x'| < r,\ z_1 \neq 0, z_2 \neq 0\}, \\
\Omega_H \quad &= \Omega_H(r) \quad = \{x'' \in \mathbf{C}^2;\ |x''| < r,\ x_1 \neq A_1(x_0)\}, \\
\Omega'_H \quad &= \Omega'_H(r) \quad = \{x_1 \in \mathbf{C};\ 0 < |x_1| < r\}
\end{aligned}
$$

とする．複素多様体 X の普遍被覆空間を $\mathcal{R}(X)$ として，$\mathcal{R}(X)$ において正則な関数の全体を $\mathcal{O}(\mathcal{R}(X))$．とする．$0 < q < 1$ を満たす定数 q を考える．$\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$，$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ とする．$\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{Z}_+^2$ に対して $|\alpha'| = \alpha_1 + \alpha_2$

とする．$j \in \mathbf{N}$ のとき，以下のとおり定める．

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^{j-q}(\mathcal{R}(\Omega)) &= \{f(x) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\Omega));\ |\alpha'| \le j-1 \text{ のとき} \partial_{x'}^{\alpha'} f(x) \text{ は有界},\\
&\qquad |\alpha'| = j \text{ のとき } |(z_1 - B_1(x_0), z_2 - B_2(x_0))|^q \partial_{x'}^{\alpha'} f(x) \text{ は有界 }\},\\
\mathcal{O}^{j-q}(\mathcal{R}(\Omega')) &= |\alpha'| \le j-1 \text{ のとき} \partial_{x'}^{\alpha'} f(x') \text{ は有界},\\
&\qquad |\alpha'| = j \text{ のとき } |z'|^q \partial_{x'}^{\alpha'} f(x') \text{ は有界 }\},\\
\mathcal{O}^{j-q}(\mathcal{R}(\Omega_H)) &= \{f(x'') \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\Omega_H));\ \ k \le j-1 \text{ のとき} \partial_{x_1}^{k} f(x'') \text{ は有界},\\
&\qquad |x_1 - A_1 x_0|^q \partial_{x_1}^{j} f(x') \text{ は有界 }\},\\
\mathcal{O}^{j-q}(\mathcal{R}(\Omega'_H)) &= \{f(x_1) \in \mathcal{O}(\mathcal{R}(\Omega'_H));\ \ k \le j-1 \text{ のとき} \partial_{x_1}^{k} f(x_1) \text{ は有界},\\
&\qquad |x_1|^q \partial_{x_1}^{j} f(x_1) \text{ は有界 }\}.
\end{aligned}$$

このとき $\mathcal{O}^{j-q}(\mathcal{R}(\Omega_1))$ は $\mathcal{R}(\Omega)$ において正則で $\{z_1 - B_1(z_0) = 0\} \bigcup \{z_2 - B_2(z_0) = 0\}$ まで指数 $j-q$ のヘルダー連続性を持つ関数の全体である．([7] の 13 章 Proposition 8.7 を参照)．

以下 $m \ge 2$ として，(4), (7) において与えた初期値や境界値は次の条件を満たすものと仮定する．

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} u_k^0(x') \in \mathcal{O}^{m-q}(\mathcal{R}(\Omega'_1)),\\ h^0(x_1) \in \mathcal{O}^{m-q}(\mathcal{R}(\Omega'_{1H})),\\ p_k^j(x'') \in \mathcal{O}^{m+1-j-q}(\{x'' \in \mathbf{C}^2;\ |x''| < r\}). \end{cases}$$

この仮定の下で，解 $u_1(x),\ u_2(x),\ p_1(x),\ p_2(x)$ が $\mathcal{R}(\Omega_1)$ (またはその部分集合) において正則になることを示したい．しかしこの問題を複素領域できちんと解くためには複雑な議論が必要になるので，ここでは解を実領域で求めるにとどめる．主要結果は以下のとおりである

定理． 条件 (5), (6), (8) を仮定する．必要に応じて $r > 0$ を小さく取り直せば，以下の事実が成立する．
(i) $A_1(x_0), A_2(x_0)$ は $\{x_0 \in \mathbf{R};\ |x_0| < r\}$ において解析的である．
(ii) $h(x'')$ は $\{x'' \in \mathbf{R}^2;\ |x''| < r,\ x_1 \ne A_1(x_0)\}$ において解析的であり，
$\{x'' \in \mathbf{R}^2;\ |x''| < r\}$ において指数 $m-q$ のヘルダー連続性を持つ．
(iii) $u_k(x),\ p_k(x)$ は $\{x \in \mathbf{R}^3;\ |x| < r,\ x' \ne (A_1(x_0), A_2(x_0))\}$ において解析的であり，$\{x \in \mathbf{R}^3;\ |x| < r\}$ において指数 $m-q$ のヘルダー連続性を持つ．

2 注意など

重力波に関する初期値境界値問題を扱った論文は多数存在する．代表的な文献として [1] およびその中の文献表を参照していただきたい．通常は $x \in \mathbf{R}^3$ において大域的に問題を考え，波の伝播速度は流速と一致しないと仮定することが多く，この場合特異点は存在しない．本稿では点 $(A_1(x_0), A_2(x_0))$ は流速と一致しているので，この点で流速と波速が一致している．このような現象 (stagnation) は特異点における特徴的な現象であり，通常は stagnation は起こらない．そのためこの現象を扱った文献はあまりないが，[2, 3] などを上げておく．

なお，線形偏微分方程式の複素領域における解の特異点を考察することは [5] などで広く研究されている．非線形方程式について同様の考察をした研究として，代表的なものは [6] である．オイラー方程式についてこういう観点から研究した論文は [4] である．ただしこの論文は完全流体の内部における特異点の伝播を考察したものであり，流体の表面での特異点を研究したものではない．

References

[1] A. Constantin and J Escher, *Analyticity of periodic traveling free surface water waves with vorticity*, Annals of Math., 173 (2011), 559–568

[2] A. Constantin W. Strauss, *Rotational steady water waves near stagnation*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 365 (2007), 2227–2239

[3] A. Constantin, W. Strauss, E. Vărvărucă, *Global bifurcation of steady gravity water waves with critical layers*, Acta Math., 217 (2016), 195—262.

[4] J.-M. Delort, *Singularités conormales non-lipschitzinnes pour des lois de conservation scalaires incompressibles*, Comm. Partial Differential Equations, 20 (1995) 179–231.

[5] Y. Hamada, *The singularities of the solution of the Cauchy problem*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 5 (1969) 21–40.

[6] E. Leichtnam, *Le problème de Cauchy ramifié semi-linéaire d'ordre deux*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 24 (1991) 189–214.

[7] M.-E. Taylor, *Partial differential equations III*, Applied mathematical sciences M7, Springer, 1996