

\mathfrak{sl}_2 の有限次元表現に付随する $O(p, q)$ の (\mathfrak{g}, K) 加群

鳥取大学 教育センター 橋本 隆司

Takashi Hashimoto

Education Center, Tottori University

Abstract

本稿の主目的は, Howe 双対性の下で \mathfrak{sl}_2 の有限次元表現 F_m ($\dim F_m = m + 1$) に対応する $O(p, q)$ の既約 (\mathfrak{g}, K) 加群を構成し, その K タイプ公式, および Gelfand-Kirillov 次元, Bernstein 次数を求めることである.

1 序

本稿を通して, G は不定値直交群 $O(p, q)$ を表し, 次のように実現しておく :

$$G = O(p, q) = \{g \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}); {}^t g I_{p,q} g = I_{p,q}\}. \quad (1.1)$$

ただし $I_{p,q} = \begin{bmatrix} 1_p & \\ & -1_q \end{bmatrix}$ とする. したがって G のリー環を \mathfrak{g}_0 と記すとき

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}(p, q) = \{X \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{R}); {}^t X I_{p,q} + I_{p,q} X = O\}$$

となる. \mathfrak{g}_0 の複素化を \mathfrak{g} , さらに \mathfrak{g}_0 (resp. \mathfrak{g}) の双対を \mathfrak{g}_0^* (resp. \mathfrak{g}^*) と記し, 次の G -不変双一次形式 B により \mathfrak{g}_0 (resp. \mathfrak{g}) と同一視する :

$$B(X, Y) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(XY).$$

さて, G はシンプレクティック・ベクトル空間 (W, ω) , ただし

$$\begin{aligned} W &= (\mathbb{C}^{p+q})_{\mathbb{R}} = \{z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}^{p+q}\}; \\ \omega(z, w) &= \mathrm{Im}(z^* I_{p,q} w) \quad (z, w \in W), \end{aligned}$$

に自然に作用するが, これはハミルトニアン作用, すなわち, 運動量写像 $\mu: W \rightarrow \mathfrak{g}_0^* \simeq \mathfrak{g}_0$ が存在する. この運動量写像 μ を量子化することにより \mathfrak{g} の表現が得られるが, この表現は (\mathfrak{g}, K) 加群になることがわかる (ただし K は, $O(p) \times O(q)$ に同型な G の極大コンパクト部分群を表す). 次に, 好一対 $(O(p, q), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ に着目して, Howe 双対性の下で $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の有限次元表現 F_m (ただし $\dim F_m = m + 1$) に対応する (\mathfrak{g}, K) 加群 $M^\pm(m)$ を構成する.

この $M^\pm(m)$ の K タイプ公式と既約性を調べ, また, それによりこの加群の Gelfand-Kirillov 次元および Bernstein 次数を求めるのが本研究の目的である.

なお, 証明等の詳細については, arXiv:1801.10298 [math.RT] を参照のこと.

以下、本稿で使用する記号を準備する。

リー環 \mathfrak{g}_0 の Cartan 分解を $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$, 複素リー環 \mathfrak{g} の複素カルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする。 $E_{i,j}$ により (i,j) 成分のみ 1 で他の成分はすべて 0 である $(p+q)$ 次の正方行列を表すものとするとき, \mathfrak{g} の基底 $\{X_{i,j}^\pm\}$ を

$$X_{i,j}^+ = \begin{bmatrix} A_{i,j} & \\ & \end{bmatrix}, \quad X_{p+i,p+j}^+ = \begin{bmatrix} & \\ & A_{i,j} \end{bmatrix}, \quad X_{i,j}^- = \begin{bmatrix} & E_{i,j} \\ E_{j,i} & \end{bmatrix}$$

とおく。ただし, $A_{i,j} := E_{i,j} - E_{j,i}$ とおいた。したがって,

$$\mathfrak{k} = \bigoplus_{i,j} \mathbb{C}X_{i,j}^+ \oplus \bigoplus_{i,j} \mathbb{C}X_{p+i,p+j}^+, \quad \mathfrak{p} = \bigoplus_{i,j} \mathbb{C}X_{i,j}^-$$

である。また, 上昇階乗, 下降階乗をそれぞれ

$$(\alpha)_n := \prod_{i=1}^n (\alpha + i - 1), \quad (\alpha)_n^- := \prod_{i=1}^n (\alpha - i + 1).$$

とかくことにする。

2 運動量写像とその量子化

■運動量写像 W の標準的な基底 $\{e_1, \dots, e_{p+q}, ie_1, \dots, ie_{p+q}\}$ ($e_i = {}^t(0, \dots, 1, \dots, 1)$) に対し, 同一視

$$e_i \leftrightarrow \partial_{x_i}, \quad ie_i \leftrightarrow \partial_{y_i} \quad (i = 1, 2, \dots, p+q)$$

の下で, W 上のシンプレクティック形式 ω を微分形式として表すと

$$\omega = \sum_{i=1}^{p+q} \epsilon_i dx_i \wedge dy_i \tag{2.1}$$

となる。ただし, $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & (i = 1, \dots, p) \\ -1 & (i = p+1, \dots, p+q) \end{cases}$ とおいた。このとき, G の W への自然な作用の運動量写像は次のようになる。

命題 2.1. 運動量写像 $\mu : W \rightarrow \mathfrak{g}_0^* \simeq \mathfrak{g}_0$ は次式で与えられる :

$$\begin{aligned} \mu(z) &= -\frac{i}{2}(zz^* - {}^t(zz^*))I_{p,q} \\ &= (-x {}^t y + y {}^t x)I_{p,q} \\ &= \begin{bmatrix} -x' {}^t y' + y' {}^t x' & x' {}^t y'' - y' {}^t x'' \\ -x'' {}^t y' + y'' {}^t x' & x'' {}^t y'' - y'' {}^t x'' \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

ただし $z = x + iy \in W$, $x = {}^t(x', x'')$, $y = {}^t(y', y'') \in \mathbb{R}^{p+q}$ とする。

■正準量子化 $f \in C^\infty(W)$ に対し, W 上のベクトル場 ξ_f を $df = \omega(\xi_f, \cdot)$ により定め, Poisson bracket を $\{f, g\} := \omega(\xi_g, \xi_f)$ と定義する. このとき, (2.1) より各座標関数間の Poisson bracket は以下ようになる:

$$\{x_i, y_j\} = -\epsilon_i \delta_{i,j}, \quad \{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0.$$

$f \in C^\infty(W)$ に対応する量子化を \hat{f} とかくとき, Dirac の量子化条件の一つである

$$\{f_1, f_2\} = f_3 \quad \text{ならば} \quad [\hat{f}_1, \hat{f}_2] = -i \hat{f}_3 \quad (f_j \in C^\infty(W), j = 1, 2, 3)$$

に則って

$$[\hat{x}_i, \hat{y}_j] = i \epsilon_i \delta_{i,j}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{y}_i, \hat{y}_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, p+q)$$

となるので,

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= x_i, & \hat{y}_i &= -i \partial_{x_i}, & (i = 1, \dots, p); \\ \hat{x}_{p+j} &= -i \partial_{y_{p+j}}, & \hat{y}_{p+j} &= y_{p+j} & (j = 1, \dots, q) \end{aligned} \quad (2.3)$$

と量子化する. したがって, この量子化は W のラグランジュ部分空間 V として

$$V = \langle e_1, \dots, e_p, i e_{p+1}, \dots, i e_{p+q} \rangle_{\mathbb{R}} \quad (2.4)$$

を選んだことになる. つまり, V 上の多項式係数の微分作用素のなす環を $\mathcal{PD}(V)$ とするとき, 量子化された作用素はすべて $\mathcal{PD}(V)$ の元として実現されている. したがって, (2.2) で与えられる運動量写像 μ を量子化すれば, すなわち, その中の x_i, y_i をそれぞれ \hat{x}_i, \hat{y}_i で置き換えれば, 量子化 $\hat{\mu}$ は次のようになる:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} i(x'^t \partial_{x'} - \partial_{x'}{}^t x') & x''^t y'' + \partial_{x'}{}^t \partial_{y''} \\ \partial_{y''}{}^t \partial_{x'} + y''{}^t x' & i(y''{}^t \partial_{y''} - \partial_{y''}{}^t y'') \end{bmatrix}.$$

ここで

$$\begin{aligned} x' &= {}^t(x_1, \dots, x_p), & \partial_{x'} &= {}^t(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_p}), \\ y'' &= {}^t(y_{p+1}, \dots, y_{p+q}), & \partial_{y''} &= {}^t(\partial_{y_{p+1}}, \dots, \partial_{y_{p+q}}) \end{aligned}$$

とかいた.

■ $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p, q)$ の表現 上で定義した運動量写像 μ に対し, $H_X := \langle \mu, X \rangle$ ($X \in \mathfrak{g}$) とおくとき,

$$\{H_X, H_Y\} = H_{[X, Y]}$$

が成り立つことに注意すれば, 次の定理が成り立つ.

定理 2.2. $\pi(X) := i\langle \hat{\mu}, X \rangle$ ($X \in \mathfrak{g}$) とおけば, 写像 $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{PD}(V)$ はリ一環の準同型となる. これを \mathfrak{g} の基底 $\{X_{i,j}^\pm\}$ で述べると

$$\pi(X) = \begin{cases} -x_j \partial_{x_i} + x_i \partial_{x_j} & \text{if } X = X_{i,j}^+; \\ -y_{p+j} \partial_{y_{p+i}} + y_{p+i} \partial_{y_{p+j}} & \text{if } X = X_{p+i,p+j}^+; \\ i(x_i y_{p+j} + \partial_{x_i} \partial_{y_{p+j}}) & \text{if } X = X_{i,j}^- \end{cases}$$

となる.

■正準量子化その2 上と同一のラグランジュ部分空間 V に対応する正準量子化として

$$\begin{aligned} \hat{x}_i^\# &= x_i, & \hat{y}_i^\# &= -i \partial_{x_i}, & (i = 1, \dots, p); \\ \hat{x}_{p+j}^\# &= y_{p+j}, & \hat{y}_{p+j}^\# &= i \partial_{y_{p+j}} & (j = 1, \dots, q) \end{aligned} \quad (2.5)$$

とする. これらもすべて $\mathcal{PD}(V)$ の元として実現されていることに注意. これに対応する量子化された運動量写像 $\hat{\mu}^\#$ は

$$\hat{\mu}^\# = i \begin{bmatrix} x'{}^t \partial_{x'} - \partial_{x'}{}^t x' & x'{}^t \partial_{y''} + \partial_{x'}{}^t y'' \\ y''{}^t \partial_{x'} + \partial_{y''}{}^t x' & y''{}^t \partial_{y''} - \partial_{y''}{}^t y'' \end{bmatrix}$$

となる. 定理 2.2 と同様, $\pi^\#(X) = i\langle \hat{\mu}^\#, X \rangle$ とおけば

$$\pi^\#(X) = \begin{cases} -x_j \partial_{x_i} + x_i \partial_{x_j} & \text{if } X = X_{i,j}^+; \\ -y_{p+j} \partial_{y_{p+i}} + y_{p+i} \partial_{y_{p+j}} & \text{if } X = X_{p+i,p+j}^+; \\ -(x_i \partial_{y_{p+j}} + y_{p+j} \partial_{x_i}) & \text{if } X = X_{i,j}^- \end{cases} \quad (2.6)$$

となり, これは [2] で与えられた \mathfrak{g} の表現に一致する.

■いくつかの注意

注意 2.3. (1) $\hat{x}_{p+j}^\#$ および $\hat{y}_{p+j}^\#$ は, 次のように \hat{x}_{p+j} および \hat{y}_{p+j} に対応している:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{p+j} = -i \partial_{y_{p+j}} &\longleftrightarrow \hat{x}_{p+j}^\# = y_{p+j} \\ \hat{y}_{p+j} = y_{p+j} &\longleftrightarrow \hat{y}_{p+j}^\# = i \partial_{y_{p+j}} \end{aligned} \quad (j = 1, \dots, q).$$

これは y_{p+1}, \dots, y_{p+q} に関する部分的フーリエ変換 (*partial Fourier transform*) に他ならない. つまり, 我々の表現 π は $\pi^\#$ とこの部分的フーリエ変換により関係している.

(2) 対応 $(x', i y'') \leftrightarrow (x', y'')$ の下で V を \mathbb{R}^{p+q} と同一視することにより, G を V に作用させるとき, (2.6) で与えられる $\pi^\#$ は, $C^\infty(V)$ 上の G の正則表現の微分表現に一致する. したがって, 特に, $\pi|_{\mathfrak{k}} = \pi^\#|_{\mathfrak{k}}$ であることから, $\pi|_{\mathfrak{k}}$ は K の表現に持ち上がる.

3 好一対 ($O(p, q), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$)

■好一対 ($O(p, q), \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$) これより以降, \mathfrak{g} の表現としては π のみを考え, また, 記号を簡単にするため,

$$x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_p), \quad y = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_q)$$

とかくことにする.

さて, よく知られているように, ($O(p, q), \mathfrak{Sp}(m, \mathbb{R})$) は $\mathfrak{Sp}(m(p+q), \mathbb{R})$ において好一対をなすが, $m=1$ として好一対 ($O(p, q), \mathfrak{SL}_2(\mathbb{R})$) を得る. そこで, いささか天下りではあるが,

$$H = -E_x - \frac{p}{2} + E_y + \frac{q}{2}, \quad X^+ = -\frac{1}{2}(\Delta_x + r_x^2), \quad X^- = \frac{1}{2}(r_x^2 + \Delta_y)$$

とおく. ただし,

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{i=1}^p x_i \partial_{x_i}, & r_x^2 &= \sum_{i=1}^p x_i^2, & \Delta_x &= \sum_{i=1}^p \partial_{x_i}^2, \\ E_y &= \sum_{j=1}^q y_j \partial_{y_j}, & r_y^2 &= \sum_{j=1}^q y_j^2, & \Delta_y &= \sum_{j=1}^q \partial_{y_j}^2. \end{aligned}$$

このとき, 簡単な計算により, 次の命題が成り立つことを確かめることができる.

命題 3.1. $\mathfrak{g}' := \mathbb{C}\text{-span}\{H, X^+, X^-\} \subset \mathcal{PD}(V)$ とおけば, $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{sl}_2$ である. さらに $\mathfrak{g}' \subset \mathcal{PD}(V)^{\mathfrak{g}}$ が成り立つ. ただし, $\mathcal{PD}(V)^{\mathfrak{g}} := \{D \in \mathcal{PD}(V); D\pi(X) = \pi(X)D \ (X \in \mathfrak{g})\}$ とする.

■最高ウェイトベクトルと最低ウェイトベクトル \mathfrak{g} の作用と可換な $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{sl}_2$ の作用がわかったので, 次に, \mathfrak{g}' の作用に関する最高ウェイトベクトル (または最低ウェイトベクトル), すなわち, ある複素数 λ に対して

$$Hf = \lambda f \quad \text{かつ} \quad X^+f = 0 \quad (\text{または} \quad X^-f = 0) \quad (3.1)$$

を満たす V 上の関数を求めよう.

今, \mathbb{R}^n 上の斉次 d 次の調和多項式を $\mathcal{H}^d(\mathbb{R}^n)$ とかくことにすると, これが $O(n)$ の既約表現になっていることはよく知られている. さらに V 上の多項式全体のなす空間 $\mathcal{P}(V)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(V) &\simeq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_p] \otimes \mathbb{C}[y_1, \dots, y_q] \\ &\simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\mathbb{C}[r_x^2] \otimes \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p)) \otimes \bigoplus_{l=0}^{\infty} (\mathbb{C}[r_y^2] \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q)) \\ &\simeq \bigoplus_{k, l=0}^{\infty} \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q) \otimes \mathbb{C}[r_x^2, r_y^2] \end{aligned}$$

であることに注意して, (3.1) を満たす最高ウェイトベクトル (または最低ウェイトベクトル) f を $\mathcal{P}(V)$ の中で探してみるとうまくいかないことがわかる. そこで, 今, f が

$$f(x, y) = h_1(x)h_2(y)\phi(r_x^2, r_y^2)$$

の形をしていると仮定する. ただし

$$h_1 \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p), h_2 \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q), \phi(s, t) \in \mathbb{C}[[s, t]]$$

とする. つまり, 次の関数空間 $\tilde{\mathcal{E}}$ の中で探すことにする:

$$\tilde{\mathcal{E}} = \bigoplus_{k, l=0}^{\infty} \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q) \otimes \mathbb{C}[[r_x^2, r_y^2]].$$

このとき, 微分方程式 (3.1) を解けば, 次の命題を得る.

命題 3.2. $h_1 \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p), h_2 \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q)$ が与えられたとき, $(\kappa_+ := k + p/2, \kappa_- := l + q/2)$.

(1) $f = h_1(x)h_2(y)\phi(r_x^2, r_y^2)$ が $Hf = \lambda f$ および $X^+f = 0$ を満たすならば, f は

$$f(x, y) = h_1(x)h_2(y)r_y^{2\mu_-}\psi_{\kappa_+}$$

で与えられる. ただし $\mu_- = (\lambda + \kappa_+ - \kappa_-)/2 \in \mathbb{N}$.

(2) $f = h_1(x)h_2(y)\phi(r_x^2, r_y^2)$ が $Hf = \lambda f$ および $X^-f = 0$ を満たすならば, f は

$$f(x, y) = h_1(x)h_2(y)r_x^{2\mu_+}\psi_{\kappa_-}$$

で与えられる. ただし $\mu_+ = -(\lambda + \kappa_+ - \kappa_-)/2 \in \mathbb{N}$.

ここで $\psi_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\alpha)_n} \left(\frac{r_x^2 r_y^2}{4}\right)^n$ とおいた.

■いくつかの注意 (2)

注意 3.3. (1) 上の命題 3.2 で現れた関数

$$\psi_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\alpha)_n} \left(\frac{r_x^2 r_y^2}{4}\right)^n$$

は, 第 1 種の ν 次ベッセル関数 J_ν

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

を用いて表すことができる. 実際,

$$\psi_\alpha = \Gamma(\alpha) \left(\frac{r_x r_y}{2}\right)^{-(\alpha-1)} J_{\alpha-1}(r_x r_y)$$

という関係が成り立つ。よく知られているように、 J_ν はベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2 J_\nu}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dJ_\nu}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) J_\nu = 0$$

を満たすが、これを ψ_α の言葉に翻訳すれば

$$\frac{r_x^2 r_y^2}{4} \psi_{\alpha+2} = \alpha(\alpha+1)(\psi_{\alpha+1} - \psi_\alpha) \quad (3.2)$$

となる。(3.2) は、以下で見るように、いくつかの場面で鍵となる役割を果たす。

(2) 補題 2.3 に述べたように、二つの表現 π と $\pi^\#$ の間には

$$\begin{array}{ccc} \pi & & \pi^\# \\ -i\partial_{y_j} & \longleftrightarrow & y_j \\ y_j & \longleftrightarrow & i\partial_{y_j} \end{array} \quad (j = 1, \dots, q)$$

のような関係がある。この対応の下で、 \mathfrak{g}' の表現作用素 H および X^+ はそれぞれ、定数倍を除いて、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{p,q} &= \sum_{i=1}^p x_i \partial_{x_i} + \sum_{j=1}^q y_j \partial_{y_j} + \frac{p-q}{2}, \\ \square_{p,q} &= \sum_{i=1}^p \partial_{x_i}^2 - \sum_{j=1}^q \partial_{y_j}^2 \end{aligned}$$

に対応する。したがって、(3.1) を満たす最高ウェイトベクトル f は、微分方程式

$$\square_{p,q} \tilde{f} = 0$$

の斉次解 \tilde{f} に対応する。

命題 3.2 から、 $\tilde{\mathcal{E}}$ の元である最高ウェイトベクトル (または最低ウェイトベクトル) f は、その K タイプが決まれば、 r_x^2 (または r_y^2) の冪とベッセル関数の次数は一意的に定まることがわかる。

■ $\mathfrak{g}' = \mathfrak{sl}_2$ と \mathfrak{p} の \mathcal{E} への作用 本節の最後に、 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{sl}_2$ と、 $X \in \mathfrak{p}$ に対して $\pi(X)$ の \mathcal{E} への作用を掲げておこう。

$\rho_x = r_x^2/2, \rho_y = r_y^2/2$ とおけば表示が簡単になるので、以下、そうする。また、これまでの議論から、我々の関数は、とりあえず、以下の (3.3) で与えられる関数空間 $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{E}}$ に棲んでいるものとする：

$$\mathcal{E} := \mathbb{C}\text{-span} \left\{ h_1(x) h_2(y) \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha ; \begin{array}{l} h_1 \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p), h_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^q), \\ a, b \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}) \end{array} \right\}. \quad (3.3)$$

命題 3.4. $h_1 = h_1(x) \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p), h_2 = h_2(y) \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q)$ ($\kappa_+ = k + p/2, \kappa_- = l + q/2$) に対し,

$$\begin{aligned} H(h_1 h_2 \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha) &= (-\kappa_+ + \kappa_- - 2a + 2b) h_1 h_2 \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha, \\ X^+(h_1 h_2 \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha) &= h_1 h_2 \left(-a(\kappa_+ + a - 1) \rho_x^{a-1} \rho_y^b \psi_\alpha + \frac{\kappa_+ + 2a - \alpha}{\alpha} \rho_x^a \rho_y^{b+1} \psi_{\alpha+1} \right), \\ X^-(h_1 h_2 \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha) &= h_1 h_2 \left(b(\kappa_- + b - 1) \rho_x^a \rho_y^{b-1} \psi_\alpha - \frac{\kappa_- + 2b - \alpha}{\alpha} \rho_x^{a+1} \rho_y^b \psi_{\alpha+1} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

が成り立つ。したがって、 \mathfrak{sl}_2 の作用は \mathcal{E} の各元の K タイプを保つ。

さらに、 \mathbb{R}^n 上の次数 d の斉次多項式関数 P に対し

$$P^\dagger := P - \frac{r^2}{4(d + n/2 - 2)} \Delta P$$

とかくことにする (ただし、 $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$)。このとき、 $\Delta^2 P = 0$ ならば $\Delta P^\dagger = 0$ 、つまり、 $P^\dagger \in \mathcal{H}^d(\mathbb{R}^n)$ となることに注意。

命題 3.5. $h_1 = h_1(x) \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p), h_2 = h_2(y) \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q)$ ($\kappa_+ = k + p/2, \kappa_- = l + q/2$) に対し,

$$\begin{aligned} & -i\pi(X_{i,j}^-)(h_1 h_2 \rho_x^a \rho_y^b \psi_\alpha) \\ &= (\partial_{x_i} h_1)(\partial_{y_j} h_2) \rho_x^a \rho_y^b \left(\frac{(\kappa_+ + a - \alpha)(\kappa_- + b - \alpha)}{(\kappa_+ - 1)(\kappa_- - 1)} \psi_\alpha + \frac{(\alpha - 1)(\kappa_+ + \kappa_- + a + b - \alpha - 1)}{(\kappa_+ - 1)(\kappa_- - 1)} \psi_{\alpha-1} \right) \\ &+ (\partial_{x_i} h_1)(y_j h_2)^\dagger \left(-\frac{\kappa_+ + a + b - \alpha}{\alpha(\kappa_+ - 1)} \rho_x^{a+1} \rho_y^b \psi_{\alpha+1} + \frac{b(\kappa_+ + a - 1)}{\kappa_+ - 1} \rho_x^a \rho_y^{b-1} \psi_\alpha \right) \\ &+ (x_i h_1)^\dagger (\partial_{y_j} h_2) \left(-\frac{\kappa_- + a + b - \alpha}{\alpha(\kappa_- - 1)} \rho_x^a \rho_y^{b+1} \psi_{\alpha+1} + \frac{a(\kappa_- + b - 1)}{\kappa_- - 1} \rho_x^{a-1} \rho_y^b \psi_\alpha \right) \\ &+ (x_i h_1)^\dagger (y_j h_2)^\dagger \left(-\frac{a+b+1-\alpha}{\alpha} \rho_x^a \rho_y^b \psi_{\alpha+1} + ab \rho_x^{a-1} \rho_y^{b-1} \psi_\alpha \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

が成り立つ。

いずれの命題 3.4 および 3.5 の証明においても (3.2) が鍵となる。

4 主結果

■ \mathfrak{sl}_2 の有限次元表現に付随する (\mathfrak{g}, K) 加群 \mathfrak{sl}_2 の表現論により、非負整数 $m \in \mathbb{N}$ に対し、 $Hf = \lambda f, X^\pm f = 0, (X^\mp)^{m+1} f = 0$ ならば $\lambda = \pm m$ であることから、以下のような対象を導入する。

定義 4.1 (cf. [5]). 与えられた非負整数 $m \in \mathbb{N}$ に対し、

$$\begin{aligned} M^+(m) &:= \left\{ f \in \mathcal{E}; \begin{array}{l} Hf = m f, \quad X^+ f = 0 \\ (X^-)^j f \neq 0 \ (1 \leq j \leq m), \ (X^-)^{m+1} f = 0 \end{array} \right\}, \\ M^-(m) &:= \left\{ f \in \mathcal{E}; \begin{array}{l} Hf = -m f, \quad X^- f = 0 \\ (X^+)^j f \neq 0 \ (1 \leq j \leq m), \ (X^+)^{m+1} f = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

と定義する.

定義により $M^+(0) = M^-(0)$ であるが, さらに $M^+(m)$ と $M^-(m)$ について次が成り立つ.

命題 4.2. $M^+(m)$ と $M^-(m)$ は互いに同型な (\mathfrak{g}, K) 加群である.

実際, $(X^+)^m (X^-)^m v = (m!)^2 v$ ($v \in M^+(m)$) であるから,

$$(X^-)^m : M^+(m) \xrightarrow{\sim} M^-(m).$$

が同型を与える.

■ K タイプ公式 次に本研究の主結果を述べる.

定理 4.3. 正整数 p と q のパリティが同一 (すなわち $p+q \in 2\mathbb{N}$) とし, 非負整数 $m \in \mathbb{N}$ が $m+3 \leq (p+q)/2$ を満たすと仮定する. このとき, 次が成り立つ.

(1) $M^\pm(m)$ の K タイプ公式は

$$M^\pm(m)|_K \simeq \bigoplus_{\substack{k, l \geq 0 \\ k-l + \frac{p-q}{2} \in \Lambda_m}} \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q),$$

で与えられる. ただし $\Lambda_m = \{-m, -m+2, -m+4, \dots, m-2, m\}$ とする.

(2) さらに $p, q \geq 2$ ならば, $M^\pm(m)$ は既約である.

命題 3.2 より, $m \in \mathbb{N}$ に対し, $f = h_1 h_2 \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+ p/2} \in M^+(m)$ (または $f = h_1 h_2 \rho_x^{\mu_+} \psi_{l+q/2} \in M^-(m)$) ならば

$$\pm m = -k + l - \frac{p-q}{2} \pm 2\mu_\mp \in \mathbb{Z}$$

なので, $f \neq 0$ ならば $(p+q)/2 \in \mathbb{Z}$ でなければならないことに注意する.

また, 定理より, $M^+(0) = M^-(0)$ は $O(p, q)$ の極小表現に対応することがわかる (cf. [1, 4, 3]).

証明には次の補題を用いる.

補題 4.4. $h_1 = h_1(x) \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p)$ および $h_2 = h_2(y) \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q)$ ($\kappa_+ = k + p/2$, $\kappa_- = l + q/2$) とする.

(1) $f = h_1 h_2 \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+}$ が最高ウェイトベクトルで, ウェイトが $\lambda = -\kappa_+ + \kappa_- + 2\mu_-$ ならば

$$(X^-)^v f = h_1 h_2 \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} \frac{(-\lambda + v - 1)_i^- (\mu_-)_{v-i}^- (\kappa_- + \mu_- - 1)_{v-i}^-}{(\kappa_+)_i} \rho_x^i \rho_y^{\mu_- - v + i} \psi_{\kappa_+ + i}.$$

(2) $f = h_1 h_2 \rho_x^{\mu_+} \psi_{\kappa_-}$ が最低ウェイトベクトルで, ウェイトが $\lambda = -\kappa_+ + \kappa_- - 2\mu_+$ ならば

$$(X^+)^v f = (-1)^v h_1 h_2 \sum_{i=0}^v \binom{v}{i} \frac{(\lambda + v - 1)_i^- (\mu_+)_{v-i}^- (\kappa_+ + \mu_+ - 1)_{v-i}^-}{(\kappa_-)_i} \rho_x^{\mu_+ - v + i} \rho_y^i \psi_{\kappa_- + i}.$$

ただし, $\nu = 0, 1, 2, \dots$ で, $\binom{\nu}{i}$ は二項係数を表す.

証明は, 命題 3.4 を $a = 0$ または $b = 0$ の場合に適用して ν に関する帰納法を用いる.

定理の証明 (概略) (1) $M^+(m)$ について示す. $M^-(m)$ についても全く同様である. 補題より $f = h_1 h_2 \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+} \in M^+(m)$ ($\kappa_+ = k + p/2, \kappa_- = l + q/2$) に対し,

$$\begin{aligned} (X^-)^{m+1} f &= h_1 h_2 \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} \frac{(0)_i^- (\mu_-)_{m+1-i}^- (\kappa_- + \mu_- - 1)_{m+1-i}^-}{(\kappa_+)_i} \rho_x^i \rho_y^{\mu_- - m - 1 + i} \psi_{\kappa_+ + i} \\ &= (\mu_-)_{m+1}^- (\kappa_- + \mu_- - 1)_{m+1}^- h_1 h_2 \rho_y^{\mu_- - m - 1} \psi_{\kappa_+}. \end{aligned}$$

したがって, $(X^-)^{m+1} f = 0$ のとき

$$\begin{aligned} \mu_- &= 0, 1, \dots, m, \quad \text{or} \\ \mu_- &= -\kappa_- + 1, -\kappa_- + 2, \dots, -\kappa_- + m + 1 \end{aligned}$$

となるが, p, q, m に関する仮定から後者は除外される. したがって $m = -\kappa_+ + \kappa_- + 2\mu_-$ より

$$\kappa_+ - \kappa_- = -m + 2\mu_- = -m, -m + 2, \dots, m$$

を得る.

(2) 命題 3.5 より, $f = h_1 h_2 \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+}$ ($\kappa_+ = k + p/2, \kappa_- = l + q/2$) に対し,

$$\begin{aligned} -i \pi (X_{i,j}^-) f &= \frac{\kappa_- + \mu_- - 1}{\kappa_- - 1} (\partial_{x_i} h_1) (\partial_{y_j} h_2) \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+ - 1} \\ &\quad + \mu_- (\partial_{x_i} h_1) (y_j h_2)^\dagger \rho_y^{\mu_- - 1} \psi_{\kappa_+ - 1} \\ &\quad + \frac{\kappa_+ - \mu_- - \kappa_-}{\kappa_+ (\kappa_- - 1)} (x_i h_1)^\dagger (\partial_{y_j} h_2) \rho_y^{\mu_- + 1} \psi_{\kappa_+ + 1} \\ &\quad + \frac{\kappa_+ - \mu_- - 1}{\kappa_+} (x_i h_1)^\dagger (y_j h_2)^\dagger \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+ + 1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

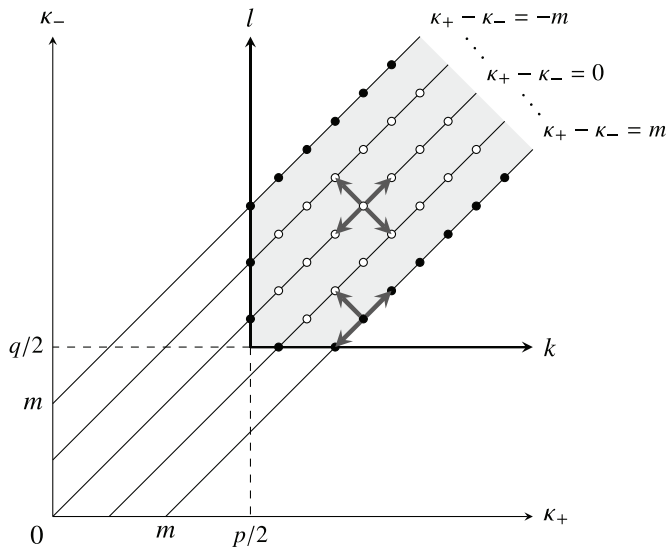
となるが, (4.1) の右辺の各項の係数を調べると, 任意に K タイプを決めたとき, そこからそれに隣合うすべての K タイプに移れることがわかる (図 1 を参照). \square

■ Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数 有限生成 $U(\mathfrak{g})$ 加群 M に対し, その Gelfand-Kirillov 次元, Bernstein 次数をそれぞれ $\text{Dim } M, \text{Deg } M$ と記すことにする.

系 4.5. $p, q \geq 3, p + q \in 2\mathbb{N}, m + 3 \leq (p + q)/2$ ならば

$$\begin{aligned} \text{Dim } M^\pm(m) &= p + q - 3, \\ \text{Deg } M^\pm(m) &= \frac{4(m+1)(p+q-4)!}{(p-2)!(q-2)!} \end{aligned}$$

である.



白丸 (○), 黒丸 (●) ともに K タイプを表す. 白黒の別は, 単に, 内部にあるか境界上にあるかを区別している. 白丸からは北東 (↗), 北西 (↖), 南東 (↘), 南西 (↙) のいずれの方向にも進める. 一方, 黒丸からは, 4つの方向のうち, 内部または境界上にあるドットにしか進めない.

図 1

系より

$$\text{Deg } M^\pm(m) = (m + 1) \text{Deg } M^\pm(0)$$

となる.

証明 $p \geq q$ と仮定してもよい. まず

$$\dim \mathcal{H}^d(\mathbb{R}^n) = \binom{d+n-1}{n-1} - \binom{d+n-3}{n-1}$$

であることを思い出そう.

いま, M_0 を

$$M_0 := \bigoplus_{\substack{(\kappa_+, \kappa_-) \in \Sigma_m \\ \kappa_+ + \kappa_- \leq c}} \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^q) \rho_y^{\mu_-} \psi_{\kappa_+} \tag{4.2}$$

と選ぶ. ただし, $c = \max\{m+p, m+q\}$ であり, μ_- は $\mu_- = (\kappa_+ - \kappa_- + m)/2$ により決まる.

次に、いつものように $M_n := U_n(\mathfrak{g})M_0$ ($M_{-1} := 0$) とおけば、

$$\begin{aligned} \dim(M_n/M_{n-1}) &= \sum_{j=0}^m \dim(\mathcal{H}^{n+j}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{H}^{n+m-j+\frac{p-q}{2}}(\mathbb{R}^q)) \\ &= \frac{4(m+1)}{(p-2)!(q-2)!} n^{p+q-4} + (\text{lower order terms in } n) \\ &= \frac{4(m+1)(p+q-4)!}{(p-2)!(q-2)!} \frac{n^{p+q-4}}{(p+q-4)!} + \dots \end{aligned}$$

となる (図 2 を参照)。これから直ちに系が従う。

□

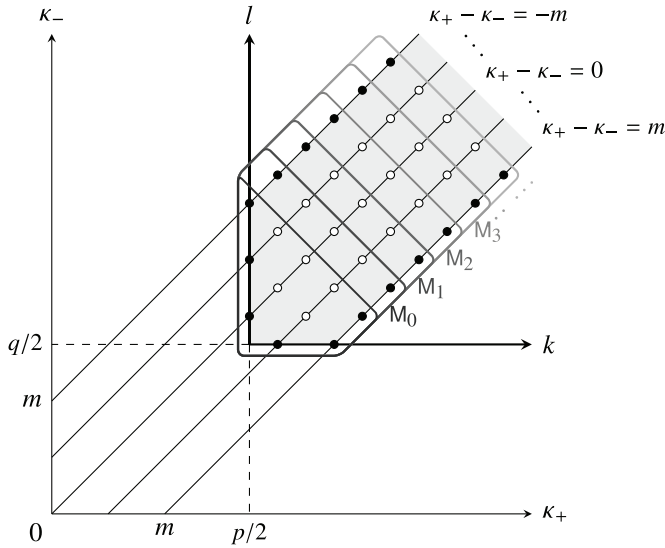


図 2

Acknowledgements

本研究は科研費 (課題番号 23540203, 26400014) の助成を受けて行われました。

参考文献

- [1] B. Binegar and R. Zierau, *Unitarization of a singular representation of $SO(p, q)$* , *Comm. Math. Phys.* **138** (1991), no. 2, 245–258. MR 1108044

- [2] Roger E. Howe and Eng-Chye Tan, *Homogeneous functions on light cones: the infinitesimal structure of some degenerate principal series representations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **28** (1993), no. 1, 1–74. MR 1172839 (93j:22027)
- [3] T. Kobayashi and G. Mano, *The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p, q)$* , Memoirs of the American Mathematical Society, American Mathematical Society, 2011.
- [4] Toshiyuki Kobayashi and Bent Ørsted, *Analysis on the minimal representation of $O(p, q)$. I, II, III*, Adv. Math. **180** (2003), no. 2, 486–512, 513–550, 551–595. MR 2020550 (2004k:22018a)
- [5] Stephen Rallis and Gérard Schiffmann, *Weil representation. I. Intertwining distributions and discrete spectrum*, Mem. Amer. Math. Soc. **25** (1980), no. 231, iii+203. MR 567800 (81j:22007)

Takashi Hashimoto

University Education Center, Tottori University,
4-101, Koyama-Minami, Tottori, 680-8550, JAPAN.

e-mail: thashi@tottori-u.ac.jp