数理解析研究所講究録 第2103巻 2019年 28-42



# 等質開凸錐に付随するゼータ関数の関数等式

名古屋大学 多元数理科学研究科　中島 秀斗*
Hideto Nakashima
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Abstract

ゼータ関数の研究において，関数等式は重要な役割を果たす．概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数は，一変数の場合は佐藤幹夫・新谷卓郎両氏によって，多変数の場合は佐藤文広氏によって基礎理論が構築されており，特に関数等式を満たすことが示されている．本稿では，等質開凸錐に付随する可解な概均質ベクトル空間の多変数ゼータ関数を考察し，その関数等式を，等質開凸錐の構造情報を用いて明示的に記述する．

## 序文.

佐藤文広氏は，概均質ベクトル空間に付随する多変数ゼータ関数の理論を構成し ([8, 9])，その具体例への応用として，正定値対称行列全体のなす開凸錐 $\mathcal{P}_r^+ \subset \mathrm{Sym}(r,\mathbb{R})$ に付随する多変数ゼータ関数を詳しく調べた ([10])．その中の一つに，左上からの主小行列式 $P_j(x) := \det^{[j]}(x)$ $(j=1,\dots,r)$ を用いて定義される多変数ゼータ関数

$$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(L;\underline{s}) = \sum_{x\in\Gamma\backslash L\cap\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \frac{1}{|P_1(x)|^{s_1}\cdots|P_r(x)|^{s_r}} \quad (\underline{s}\in\mathbb{C}^r;\, \boldsymbol{\varepsilon}\in\mathcal{I}_r := \{\pm1\}^r)$$

がある．ただし，$\Gamma$ は $GL(r,\mathbb{R})$ のある離散部分群，$L=\mathrm{Sym}(r,\mathbb{Z})$ であり，$\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathcal{I}_r$ は連結開軌道 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (式 (1.1) 参照) に対応するパラメータである．[10] においてこの多変数ゼータ関数は，descending chain という手法を通して簡約 Lie 群が作用する空間のゼータ関数として考察され，式 (1.2) の関数等式など詳しく解析がなされている．一方で，この多変数ゼータ関数は下三角行列のなす可解 Lie 群が作用する空間のゼータ関数とみることも可能である．本稿では，後者の視点からこの多変数ゼータ関数を一般化する．すなわち，等質開凸錐という可解 Lie 群が作用する等質空間を考察し，それに付随する多変数ゼータ関数の関数等式を明示的に与える．

さて，$V$ を有限次元の実ベクトル空間とし，$\Omega\subset V$ を直線を含まない階数 $r$ の等質開凸錐とする．このとき，$\Omega$ に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群 $H$ が存在する．本稿では，$V$, $\Omega$ および $H$ は $N$ 次正方行列のなす空間に実現されているとする (cf. (2.1))．$\Omega$ 上の関

---

* 日本学術振興会特別研究員 (PD); h-nakashima@math.nagoya-u.ac.jp
本研究は JSPS 科研費 (18J00379) の助成を受けたものである．

数 $f$ が，$H$ のある 1 次元有理表現 $\chi(h)$ に対して $f(\rho(h)x) = \chi(h)f(h)$ $(h \in H,\ x \in V)$ を満たすとき，$f$ は $H$-相対不変であるという．ここで，$\rho$ は $H$ の $V$ 上の作用である．$H$-相対不変な既約多項式は丁度 $r$ 個存在し，それらを $P_1(x), \ldots, P_r(x)$ と表せば，$\Omega$ はそれらの正値集合

$$\Omega = \{x \in V;\ P_1(x) > 0, \ldots, P_r(x) > 0\}$$

として記述される (cf. Ishi-Nomura [5])．この $P_1(x), \ldots, P_r(x)$ を $\Omega$ の基本相対不変式と呼ぶ．本稿では，各 $P_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ は単位行列 $I_N$ において $P_j(I_N) = 1$ と正規化されていると仮定する．特異点集合は $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^{r} \{x \in V;\ P_j(x) = 0\}$ であり，$V \setminus \mathcal{S}$ は $2^r$ 個の $\rho(H)$-軌道 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ $(\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{I}_r := \{\pm 1\}^r)$ に分解される (cf. Gindikin [2, p. 77])．また，各基本相対不変式 $P_j(x)$ に対応する 1 次元有理表現は $\chi_j(h) = h_1^{2\sigma_{j1}} \cdots h_r^{2\sigma_{jr}}$ のように書け $(h_1, \ldots, h_r$ は $h$ の対角成分$)$，それらの冪を並べて正方行列 $\sigma = (\sigma_{jk})$ を構成する．$\sigma$ は，$\Omega$ の構造情報を用いて明示的に計算できる (cf. [6])．さらに，$V$ の内積は適当に定義しておき (式 (2.2) 参照)，この内積を通して $\Omega$ の双対錐 $\Omega^*$ を定義する．本稿では，$\Omega^*$ に由来するものはアスタリスク $*$ を付与するものとする (e.g. 基本相対不変式は $P_1^*(y), \ldots, P_r^*(y)$ など)．

さて，$\Omega$ は $\mathbb{Q}$ 上定義されていると仮定し，$\Gamma = H_{\mathbb{Z}}$ とする．また，$\Gamma$ の作用で不変な $V_{\mathbb{Q}}$ 内の格子 $L$ をとり，その双対格子を $L^*$ とする．このとき，等質開凸錐 $\Omega$ およびその双対錐 $\Omega^*$ に付随する多変数ゼータ関数を，以下により定義する:

$$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s}) := \sum_{m_1, \ldots, m_r = 1}^{\infty} \frac{M_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{m})}{m_1^{s_1} \cdots m_r^{s_r}}, \quad \zeta_{\boldsymbol{\delta}}^*(\underline{t}) := \sum_{m_1, \ldots, m_r = 1}^{\infty} \frac{M_{\boldsymbol{\delta}}^*(\underline{m})}{m_1^{t_1} \cdots m_r^{t_r}} \quad (\underline{s}, \underline{t} \in \mathbb{C}^r).$$

ただし $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta} \in \mathcal{I}_r$ および $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ であり，$M_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{m})$, $M_{\boldsymbol{\delta}}^*(\underline{m})$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} M_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{m}) &= \sharp \{x \in \Gamma \backslash L \cap \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}};\ |P_j(x)| = m_j \quad (j = 1, \ldots, r)\}, \\ M_{\boldsymbol{\delta}}^*(\underline{m}) &= \sharp \{y \in \Gamma \backslash L^* \cap \mathcal{O}_{\boldsymbol{\delta}}^*;\ |P_k^*(y)| = m_k \quad (k = 1, \ldots, r)\} \end{aligned}$$

により定義されるものである．このとき，$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})$ は $B := \left\{\underline{s} \in \mathbb{C}^r;\ \mathrm{Re}\,\underline{s} > (\underline{q} + \underline{1})\sigma^{-1}\right\}$ において，$\zeta_{\boldsymbol{\delta}}^*(\underline{t})$ は $B^* := \left\{\underline{t} \in \mathbb{C}^r;\ \mathrm{Re}\,\underline{t} > (\underline{p} + \underline{1})\sigma_*^{-1}\right\}$ において，絶対収束する (cf. Sato [9])．ただし，2 つの実ベクトル $\underline{\alpha}, \underline{\beta}$ に対して $\underline{\alpha} > \underline{\beta}$ とは，すべての $j$ に対して $\alpha_j > \beta_j$ となることであり，$\underline{p}$, $\underline{q}$ は以下により定義されるベクトルである:

$$\underline{p} := (p_1, \ldots, p_r), \quad p_k := \sum_{j<k} \dim \mathcal{V}_{kj}; \quad \underline{q} := (q_1, \ldots, q_r), \quad q_j := \sum_{k>j} \dim \mathcal{V}_{kj}.$$

ここで，$\mathcal{V}_{kj}$ は等質開凸錐 $\Omega$ を行列実現した際の非対角成分である (cf. (2.1))．さらに，$\underline{1} := (1, \ldots, 1)$ として $\underline{d} := \underline{1} + \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$ とおき，さらに $\tau(\underline{s}) := (\underline{d} - \underline{s}\sigma)\sigma_*^{-1}$ とする．本稿の主結果は次のとおりである．$D := \mathrm{Conv}(B \cup \tau^{-1}(B^*))$ とするとき，各ゼータ関数 $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})$ は $D$ 上の有理型関数に解析接続され，次の関数等式

$$\zeta_{\boldsymbol{\delta}}^*((\underline{d} - \underline{s}\sigma)\sigma_*^{-1}) = \left(\int_{V/L} dx\right) \frac{\Gamma_{\Omega^*}(\underline{s}\sigma)}{(2\pi)^{|\underline{s}\sigma|}} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{I}_r} a_{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\underline{s}\sigma)\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s}) \quad (\underline{s} \in D)$$

を満たす．ただし，$\underline{\alpha} \in \mathbb{C}^r$ に対して $|\underline{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ であり，$\Gamma_{\Omega^*}$ は双対錐 $\Omega^*$ のガンマ関数である (式 (3.1) 参照)．また，$a^*_{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}(\underline{\alpha})$ は次の通りである．

$$a^*_{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}(\underline{\alpha}) = \exp\left\{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i\delta_i\left(\alpha_i - \frac{q_i}{2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{j<k} \varepsilon_j\delta_k \dim \mathcal{V}_{kj}\right)\right\}.$$

この関数等式は，[8] で得られたものよりも簡潔な表示になっている．また，$\Omega = \mathcal{P}_r^+$ のとき $\dim \mathcal{V}_{kj} = 1$ $(1 \le j < k \le r)$ であるので，[10] の結果が復元される．

# 1　正定値対称行列

まず [10] において考察された，正定値対称行列全体の集合 $\Omega = \mathcal{P}_r^+ \subset \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ に付随するゼータ関数を扱う．$V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ とする．$\Omega$ は，$G = GL(r, \mathbb{R})$ の作用

$$\rho(g)x := gx\,{}^t g \quad (g \in G,\ x \in V)$$

により等質空間になる．さらに対角成分が正の下三角行列全体からなる $G$ の部分群 $H$ は，$\rho$ によって $\Omega$ 上に単純推移的に作用する．以下，$\Omega$ をこの下三角群 $H$ による等質空間とみる．$x \in V$ の左上からの $j$ 次小行列式を $P_j(x) := \det{}^{[j]}(x)$ で表すと，これらは $H$ の作用に関して相対不変，すなわち次の関係式を満たす:

$$P_j(\rho(h)x) = (h_{11}^2 \cdots h_{jj}^2)\, P_j(x) \quad (x \in V,\ h = (h_{ij}) \in H).$$

さらに $\Omega$ は，次のように $P_j(x)$ を用いて記述できる．

$$\Omega = \{x \in V;\ P_j(x) > 0 \quad (j = 1, \ldots, r)\}.$$

$P_j(x)$ $(j = 1, \ldots, r)$ は $\Omega$ の基本相対不変式である．$\mathcal{S} := \bigcup_{j=1}^{r} \{x \in V;\ P_j(x) = 0\}$ とおけば，$\mathcal{I}_r := \{1, -1\}^r$ とするとき，$V \setminus \mathcal{S}$ は

$$V \setminus \mathcal{S} = \bigsqcup_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{I}_r} \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}} := \rho(H)\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_r \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \mathcal{I}_r) \tag{1.1}$$

のように軌道分解されるので，$(H, \rho, V)$ は実概均質ベクトル空間の構造を持つ．この $\mathcal{S}$ を $V$ の特異点集合という．また $L = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{Z})$ とし，$\Gamma = H \cap GL(r, \mathbb{Z})$ とすれば，$L$ は $\Gamma$ の作用で不変である．このとき，各軌道 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ごとに，$\Omega$ に付随する多変数ゼータ関数を

$$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s}) := \sum_{x \in \Gamma\backslash L \cap \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \frac{1}{|P_1(x)|^{s_1} \cdots |P_r(x)|^{s_r}} = \sum_{m_1, \ldots, m_r = 1}^{\infty} \frac{M_{\boldsymbol{\varepsilon}}(m_1, \ldots, m_r)}{m_1^{s_1} \cdots m_r^{s_r}} \quad (\underline{s} \in \mathbb{C}^r)$$

により定義する．ただし $\Gamma\backslash L \cap \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は $L \cap \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ の $\rho(\Gamma)$ に関する代表系の集合であり，最右辺は $|P_j(x)| = m_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ として $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})$ を Dirichlet 級数の形に書き直したもので，

$$M_{\boldsymbol{\varepsilon}}(m_1, \ldots, m_r) = \sharp\{x \in \Gamma\backslash L \cap \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}};\ |P_j(x)| = m_j \quad (j = 1, \ldots, r)\}$$

である．このゼータ関数は，次の領域において絶対収束する (Sato [10]):

$$B = \{\underline{s} \in \mathbb{C}^r;\ \mathrm{Re}\, s_j > 1 \quad (j = 1, \ldots, r)\}.$$

**注意** 1.1　すなわち，$\Omega$ に付随する多変数ゼータ関数は，$\underline{m} \in \mathbb{N}^r$ に対する連立不定方程式

$$|P_j(x)| = m_j \quad (j = 1, \ldots, r)$$

の解の個数に関する母関数である．一般の概均質ベクトル空間の多変数ゼータ関数は，この連立不定方程式の解の密度に関する母関数として実現される (cf. Sato [8])．また [9] では，概均質ベクトル空間の多変数ゼータ関数が，ある領域で絶対収束するための一つの十分条件が与えられている．

さて，$V$ の内積を $\langle x\,|\,y\rangle := \mathrm{tr}(xy)$ $(x, y \in V)$ により定義し，この内積を通して，$V$ とその双対ベクトル空間 $V^*$ とを同一視する．$\Omega$ の双対錐は

$$\Omega^* = \left\{y \in V;\ \langle x\,|\,y\rangle > 0 \quad \text{for all } x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\right\}$$

により定義され，$\rho$ の反傾表現 $\rho^*(h)y := {}^t\!h^{-1} y h^{-1}$ により，$H$ が単純推移的に作用する．$\Omega^*$ は，集合としては $\Omega$ と一致するが，その基本相対不変式は右下からの主小行列式 $P_k^*(y) := \det_{[r-k+1]}(y)$ $(k = 1, \ldots, r)$ である．ここで，$P_1^*(y) = \det y$ となるように基本相対不変式の番号を定めている．特異点集合は $\mathcal{S}^* = \bigcup_{k=1}^r \{y \in V;\ P_k^*(y) = 0\}$ であり，$V \setminus \mathcal{S}^*$ は

$$V \setminus \mathcal{S}^* = \bigsqcup_{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{I}_r} \mathcal{O}_{\boldsymbol{\delta}}^*, \quad \mathcal{O}_{\boldsymbol{\delta}}^* := \rho^*(H) \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_r \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{I}_r)$$

と軌道分解される．双対錐 $\Omega^*$ に付随する多変数ゼータ関数は，基本相対不変式 $P_k^*(y)$ および $L$ の双対格子 $L^* = \{y \in V;\ \langle x\,|\,y\rangle \in \mathbb{Z} \text{ for all } x \in L\}$ を用いて，

$$\zeta_{\boldsymbol{\delta}}^*(\underline{t}) := \sum_{m_1, \ldots, m_r = 1}^{\infty} \frac{M_{\boldsymbol{\delta}}^*(m_1, \ldots, m_r)}{m_1^{t_1} \cdots m_r^{t_r}} \quad (\underline{t} = (t_1, \ldots, t_r) \in \mathbb{C}^r)$$

により定義される．ただし，

$$M_{\boldsymbol{\delta}}^*(m_1, \ldots, m_r) = \sharp\left\{y \in \Gamma\backslash L^* \cap \mathcal{O}_{\boldsymbol{\delta}}^*;\ |P_k^*(y)| = m_k \quad (k = 1, \ldots, r)\right\}$$

である．このゼータ関数も領域 $B$ 上で絶対収束する (Sato [10])．

**定理** 1.2（Sato [10, Theorem 8 (3)]）　$\tau(\underline{s}) := (\frac{r+1}{2} - s_1 - \cdots - s_r,\ -s_1, \ldots, -s_{r-1})$ とし，$D$ を $B \cup \tau^{-1}(B)$ の凸包 $D = \mathrm{Conv}(B \cup \tau^{-1}(B))$ とする．このとき，$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})$ は $D$ 上の有理型関数に解析接続され，次の関数等式

$$\zeta_{\boldsymbol{\delta}}^*(\tau(\underline{s})) = v(L)\, \frac{\pi^{\frac{r(r-1)}{4}} \prod_{i=1}^r \Gamma(s_i + \cdots + s_r - \frac{r-i}{2})}{(2\pi)^{s_1 + 2s_2 + \cdots + rs_r}} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{I}_r} a_{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\underline{s})\, \zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s}) \qquad (1.2)$$

を満たす．ただし $v(L) := \int_{V/L} dx$ であり，$a^*_{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}(\underline{s})$ は以下で定義される関数である．

$$a^*_{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}(\underline{s}) := \exp\left\{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{r}\varepsilon_i\delta_i\left(s_i+\cdots+s_r-\frac{r-i}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{j<k}\varepsilon_j\delta_k\right)\right\}.$$

## 2　等質開凸錐

この節では，正定値対称行列のなす開凸錐を，その等質性に着目して一般化する．$V$ を有限次元の実ベクトル空間とし，$\Omega \subset V$ を開凸錐で直線を含まないものとする．線形自己同型群 $G(\Omega) := \{g \in GL(V);\ g\Omega = \Omega\}$ が $\Omega$ に推移的に作用するとき，開凸錐 $\Omega$ は等質であるという．等質開凸錐の一般理論は Vinberg [12] により与えられている．前節で扱った正定値対称行列のなす開凸錐 $\mathcal{P}_r^+$ は等質開凸錐である．

**例** 2.1　以下のように定義される 5 次元の開凸錐を考える．

$$\Omega := \left\{\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix}\right);\ \begin{array}{l} x_1,\ldots,x_5 \in \mathbb{R}, \\ x_1>0,\ x_1x_3-x_2^2>0,\ x_1x_5-x_4^2>0 \end{array}\right\}.$$

$\Omega$ には次の群が (単純) 推移的に作用しており，したがって等質開凸錐になる．

$$H := \left\{\left(\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ h_2 & h_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ h_4 & h_5 \end{pmatrix}\right);\ \begin{array}{l} h_1,\ldots,h_5 \in \mathbb{R}, \\ h_1,h_3,h_5>0 \end{array}\right\}.$$

その作用は，$(X,Y) \in \Omega$, $(g,h) \in H$ としたとき，$\rho(g,h)(X,Y) := (gX\,{}^tg,\ hY\,{}^th)$ である．

例 2.1 の等質開凸錐は，

$$\left\{x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_4 \\ 0 & 0 & x_4 & x_5 \end{pmatrix};\ \begin{array}{l} x_1,\ldots,x_5 \in \mathbb{R} \\ x \gg 0 \end{array}\right\} \cong \left\{x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_4 \\ x_2 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix};\ \begin{array}{l} x_1,\ldots,x_5 \in \mathbb{R} \\ x \gg 0 \end{array}\right\}$$

のように行列空間に実現することもできる．実は任意の等質開凸錐は，次のように上式右辺の形の行列空間に実現できることが知られている (cf. Ishi [4])．自然数 $N$ を $r$ 個に分割し，$N = n_1+\cdots+n_r$ とする．次の条件を満たす行列空間の族 $\mathcal{V}_{kj} \subset M(n_k,n_j;\mathbb{R})$ をとる．

(V1) $A \in \mathcal{V}_{kj}$, $B \in \mathcal{V}_{ji} \Rightarrow AB \in \mathcal{V}_{ki}$ $(1 \le i < j < k \le r)$,
(V2) $A \in \mathcal{V}_{kj}$, $B \in \mathcal{V}_{ki} \Rightarrow A\,{}^tB \in \mathcal{V}_{ji}$ $(1 \le i < j < k \le r)$,
(V3) $A \in \mathcal{V}_{kj} \Rightarrow A\,{}^tA \in \mathbb{R}I_{n_k}$ $(1 \le j < k \le r)$.

これらを用いて，$\mathrm{Sym}(N,\mathbb{R})$ の部分空間 $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ を

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{V}} := \left\{x = \begin{pmatrix} x_1I_{n_1} & {}^tX_{21} & \cdots & {}^tX_{r1} \\ X_{21} & x_2I_{n_2} & & {}^tX_{r2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_{r1} & X_{r2} & \cdots & x_rI_{n_r} \end{pmatrix};\ \begin{array}{l} x_1,\ldots,x_r \in \mathbb{R}, \\ X_{kj} \in \mathcal{V}_{kj}\ (j<k) \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

により定義する．$\mathcal{P}_{\mathcal{V}} := \mathcal{Z}_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{P}_N^+$ とすれば，$\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ は開凸錐である．さらに，

$$H_{\mathcal{V}} := \left\{ h = \begin{pmatrix} h_1 I_{n_1} & & & \\ T_{21} & h_2 I_{n_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & \cdots & h_r I_{n_r} \end{pmatrix};\ \begin{array}{l} h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{R}^+, \\ T_{kj} \in \mathcal{V}_{kj}\ (j < k) \end{array} \right\}$$

とおけば，作用 $\rho(h)x := hx\,{}^t h\ (h \in H_{\mathcal{V}},\ x \in \mathcal{P}_{\mathcal{V}})$ により $H_{\mathcal{V}}$ が $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ に単純推移的に作用する．よって，このように定義された $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ は等質開凸錐になる．

**定理** 2.2（Ishi [4]）　任意の等質開凸錐 $\Omega$ に対して，上記の方法で構成される $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ で，$\Omega$ と線形同型であるようなものが存在する．このとき，$\Omega$ に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群 $H$ は，対応する $H_{\mathcal{V}}$ と同型である．

この行列実現は一意的に定まるわけではないが，どの実現も互いに線形同型である．また，Yamasaki–Nomura [13] では，ある意味での最小の行列実現が与えられている．以下，等質開凸錐は上記のように行列実現されていると仮定する．

**定義** 2.3　$p_k := \sum_{j<k} \dim \mathcal{V}_{kj}\ (k = 1, \ldots, r)$ および $q_j := \sum_{k>j} \dim \mathcal{V}_{kj}\ (j = 1, \ldots, r)$ とおく．また，$\underline{1} := (1, \ldots, 1)$ を用いて，ベクトル $\underline{p}$, $\underline{q}$, $\underline{d}$ を次のように定義する:

$$\underline{p} := (p_1, \ldots, p_r), \quad \underline{q} := (q_1, \ldots, q_r), \quad \underline{d} := \underline{1} + \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}).$$

$V$ 上の関数 $f$ が，$H$ のある 1 次元有理表現 $\chi\colon H \to \mathbb{R}^\times$ に対して $f(\rho(h)x) = \chi(h)f(x)$ $(h \in H,\ x \in V)$ を満たすとき，$H$-相対不変であるという．Ishi [3] により，$H$-相対不変な既約多項式は丁度 $r$ 個存在し，それを $P_1(x), \ldots, P_r(x)$ と表せば，$\Omega$ は

$$\Omega = \{x \in V;\ P_1(x) > 0, \ldots, P_r(x) > 0\}$$

と記述できる．$P_1(x), \ldots, P_r(x)$ は $\Omega$ の基本相対不変式と呼ばれる．以下，各 $P_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ は単位行列 $I_N$ において $P_j(I_N) = 1$ と正規化されているとする．ここで，$\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^r \{x \in V;\ P_j(x) = 0\}$ とすれば，$V \setminus \mathcal{S}$ は

$$V \setminus \mathcal{S} = \bigsqcup_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{I}_r} \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}} := \rho(H) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_r I_{n_r} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{I}_r)$$

と軌道分解される (cf. Gindikin[2, p. 77]) ので，$(H, \rho, V)$ は実概均質ベクトル空間である．さて，$H$ は三角群であることより $H$ の 1 次元有理表現は対角成分の冪積で書けるので，各基本相対不変式 $P_j(x)$ に対応する 1 次元有理表現 $\chi_j(h)$ は適当な非負整数 $\sigma_{jk}$ を用いて

$$\chi_j(h) = h_1^{2\sigma_{j1}} \cdots h_r^{2\sigma_{jr}} \quad (h \in H)$$

と表せる．これらの非負整数を並べて正方行列 $\sigma := (\sigma_{jk})$ を構成し，本稿では multiplier matrix と呼ぶ．基本相対不変式の順番を適切に定めると，$\sigma$ は下三角行列で対角成分はすべて 1 であるようにすることができる (cf. Ishi [3])．さらに，次が知られている．

**命題** 2.4（Nakashima [6]）　$\sigma$ は $\dim \mathcal{V}_{kj}$ の情報から明示的に計算可能である．

**注意** 2.5　$\sigma_{jk}$ は $P_j(x)$ の対角成分に関する項の冪数として現れる．例えば $\Omega = \mathcal{P}_3^+$ とすれば，$P_1(x) = x_{11}$, $P_2(x) = x_{11}x_{22} - x_{21}^2$, $P_3(x) = \det x$ であるので，$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ となる．

$V$ の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は以下で定義されるものとする．

$$\langle x | y \rangle := \sum_{i=1}^{r} x_i y_i + 2 \sum_{j<k} \langle X_{kj} | Y_{kj} \rangle_{kj}, \quad X_{kj} {}^t Y_{kj} = \langle X_{kj} | Y_{kj} \rangle_{kj} I_{n_k}. \tag{2.2}$$

この内積を通して，$V$ とその双対ベクトル空間 $V^*$ とを同一視し，さらに $\Omega$ の双対錐を

$$\Omega^* = \left\{ y \in V;\ \langle x | y \rangle > 0 \quad \text{for all } x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \right\}$$

により定義する．$\Omega^*$ には，$\rho$ の反傾表現 $\rho^*$ によって $H$ が単純推移的に作用しており，したがって等質開凸錐になる．一般には，$\Omega$ と $\Omega^*$ とは，線形同型になるとは限らない．$\Omega^*$ の基本相対不変式を $P_1^*(y), \ldots, P_r^*(y)$ とすれば，特異点集合は $\mathcal{S}^* = \bigcup_{k=1}^{r} \{ y \in V;\ P_k^*(y) = 0 \}$ であり，$V \setminus \mathcal{S}^*$ は

$$V \setminus \mathcal{S}^* = \bigsqcup_{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{I}_r} \mathcal{O}_{\boldsymbol{\delta}}^*, \quad \mathcal{O}_{\boldsymbol{\delta}}^* := \rho^*(H) \begin{pmatrix} \delta_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_r I_{n_r} \end{pmatrix}$$

のように軌道分解される (cf. Gindikin[2, p. 77])．また，$\Omega^*$ の multiplier matrix を $\sigma_*$ で表す．

**注意** 2.6　$P_1^*(y), \ldots, P_r^*(y)$ の順番を適切に定めることにより，$\sigma_*$ を上三角行列で対角成分がすべて 1 になるようにすることができる．例えば，$\Omega = \mathcal{P}_3^+$ のとき，$\Omega^* = \mathcal{P}_3^+$ の基本相対不変式を $P_1^*(y) = \det y$, $P_2^*(y) = y_{22}y_{33} - y_{32}^2$, $P_3^*(y) = y_{33}$ のように並べれば，$\sigma_* = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ と上三角行列になる．

## 3　等質開凸錐に付随するゼータ関数とその関数等式

前節に引き続き，等質開凸錐 $\Omega$ は行列実現されていると仮定する．加えて，$\Omega$ は $\mathbb{Q}$ 上で定義されていることも仮定する．すなわち，$\mathcal{V}_{kj}$ の基底 $\{X_{kj}^{\alpha}\}_{\alpha}$ に関して，$X_{kj}^{\alpha} X_{ji}^{\beta} = \sum_{\gamma} c_{\gamma}^{\alpha\beta} X_{ki}^{\gamma}$ のように表したとき，$c_{\gamma}^{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ であることを仮定する．他の 2 条件に関しても同様とする (cf. [7, §2])．$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ or $\mathbb{Z}$ としたとき，上記の基底に関する $\mathbb{K}$ 係数ベクトル空間を $V_{\mathbb{K}}$ で表す．$H_{\mathbb{K}}$ も同様に定義する．さて，$\Gamma = H_{\mathbb{Z}}$ とし，$\Gamma$ 不変な格子 $L \subset V_{\mathbb{Q}}$ をとる．また，$L$ の双対格子を $L^*$ で表す．このとき，等質開凸錐 $\Omega$ およびその双対錐 $\Omega^*$ に付随する多変数ゼータ関数を

$$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s}) := \sum_{m_1, \ldots, m_r = 1}^{\infty} \frac{M_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{m})}{m_1^{s_1} \cdots m_r^{s_r}}, \quad \zeta_{\boldsymbol{\delta}}^*(\underline{t}) := \sum_{m_1, \ldots, m_r = 1}^{\infty} \frac{M_{\boldsymbol{\delta}}^*(\underline{m})}{m_1^{t_1} \cdots m_r^{t_r}} \quad (\underline{s}, \underline{t} \in \mathbb{C}^r)$$

によって定義する．ただし $\underline{m}=(m_1,\dots,m_r)$ であり，$M_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{m})$, $M^*_{\boldsymbol{\delta}}(\underline{m})$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}M_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{m}) &= \sharp\left\{x\in\Gamma\backslash L\cap\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}};\ |P_j(x)|=m_j \quad (j=1,\dots,r)\right\},\\ M^*_{\boldsymbol{\delta}}(\underline{m}) &= \sharp\left\{y\in\Gamma\backslash L^*\cap\mathcal{O}^*_{\boldsymbol{\delta}};\ |P^*_k(y)|=m_k \quad (k=1,\dots,r)\right\}\end{aligned}$$

により定義されるものである．さて，2 つの実ベクトル $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ が任意の $j$ について $\alpha_j>\beta_j$ を満たすとき $\underline{\alpha}>\underline{\beta}$ と書くことにして，$\mathbb{C}^r$ の領域 $B$ および $B^*$ を次で定義する．

$$B:=\left\{\underline{s}\in\mathbb{C}^r;\ \mathrm{Re}\,\underline{s}>(\underline{q}+\underline{1})\sigma^{-1}\right\},\quad B^*:=\left\{\underline{t}\in\mathbb{C}^r;\ \mathrm{Re}\,\underline{t}>(\underline{p}+\underline{1})\sigma_*^{-1}\right\}.$$

**命題** 3.1（Nakashima [7]; cf. Sato [8]）　等質開凸錐 $\Omega$ に付随するゼータ関数 $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})$ は $B$ において，双対錐 $\Omega^*$ に付随するゼータ関数 $\zeta^*_{\boldsymbol{\delta}}(\underline{t})$ は $B^*$ において，絶対収束する．

$H$ が $\rho^*$ を通して $\Omega^*$ 上に単純推移的に作用していることを踏まえ，$\underline{\alpha}\in\mathbb{C}^r$ に対して，

$$|P^*(\rho^*(h)I_N)|_{\underline{\alpha}}=h_1^{-2\alpha_1}\cdots h_r^{-2\alpha_r}\quad(h\in H)$$

によって，$\Omega^*$ 上の関数 $|P^*(y)|_{\underline{\alpha}}$ を定義する．双対錐 $\Omega^*$ 上の $H$-不変測度 $d\mu^*$ は，$d\mu^*(y)=|P^*(y)|_{-\underline{d}}\,dy$ ($dy$ はユークリッド測度) により与えられる．また，$\Omega^*$ のガンマ関数を，

$$\Gamma_{\Omega^*}(\underline{\alpha}):=\int_{\Omega^*}|P^*(y)|_{\underline{\alpha}}\,e^{-\langle I_N\,|\,y\rangle}\,d\mu^*(y)=(2\pi)^{\frac{n-r}{2}}\prod_{k=1}^{r}\Gamma\left(\alpha_k-\frac{q_k}{2}\right)\quad(\underline{\alpha}\in\mathbb{C}^r)\quad(3.1)$$

によって定義する (cf. Gindikin [2])．ここで $n=\dim V$ であり，$\Gamma(s)$ は通常のガンマ関数である．$\Gamma_{\Omega^*}(\underline{\alpha})$ は $\mathrm{Re}\,\underline{\alpha}>\frac{1}{2}\underline{q}$ で絶対収束し，$\mathbb{C}^r$ 上の有理型関数に解析接続される．さて，$\tau(\underline{s}):=(\underline{d}-\underline{s}\sigma)\sigma_*^{-1}$ とおく．本稿の主結果は次のとおりである．

**定理** 3.2（Nakashima [7]; cf. Sato [8]）　$D:=\mathrm{Conv}(B\cup\tau^{-1}(B^*))$ とおくとき，$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})$ は $D$ 上の有理型関数に解析接続され，次の関数等式

$$\zeta^*_{\boldsymbol{\delta}}((\underline{d}-\underline{s}\sigma)\sigma_*^{-1})=v(L)\,\frac{\Gamma_{\Omega^*}(\underline{s}\sigma)}{(2\pi)^{|\underline{s}\sigma|}}\sum_{\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathcal{I}_r}a^*_{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}(\underline{s}\sigma)\zeta(\underline{s})\quad(\underline{s}\in D)$$

が成立する．ただし，$v(L)=\int_{V/L}dx$ である．また，$\underline{\alpha}\in\mathbb{C}^r$ に対して $|\underline{\alpha}|=\alpha_1+\cdots+\alpha_r$ であり，$a^*_{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}(\underline{\alpha})$ は次の通りである．

$$a^*_{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}(\underline{\alpha})=\exp\left\{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{r}\varepsilon_i\delta_i\left(\alpha_i-\frac{q_i}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{j<k}\varepsilon_j\delta_k\dim\mathcal{V}_{kj}\right)\right\}.$$

**注意** 3.3　この定理より等質開凸錐に付随する多変数ゼータ関数は凸集合 $D$ まで解析接続されるが，この領域 $D$ は全空間 $\mathbb{C}^r$ と一致しない (第 5 節参照)．一方で, §2 で扱った $\mathcal{P}_r^+$ に付随する多変数ゼータ関数は [10] において全空間 $\mathbb{C}^r$ まで解析接続されている．これは簡約な概均質ベクトル空間に付随する多変数ゼータ関数として得られることからの帰結であり，同様の技法が対称錐 $\mathrm{Herm}(r,\mathbb{K})^+$ $(\mathbb{K}=\mathbb{C},\mathbb{H})$ に対しても適用できるので，これらに付随する多変数ゼータ関数も全空間 $\mathbb{C}^r$ まで解析接続される事がわかる．

各基本相対不変式は斉次多項式であるので，$|P_j(-x)| = |P_j(x)|$ となる．これより特に，$\zeta_{-\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s}) = \zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})$ であるので，

$$s_{\boldsymbol{\varepsilon\delta}}(\underline{\alpha}) := \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \delta_i \alpha_i, \quad N_{\boldsymbol{\varepsilon\delta}} := \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \delta_i q_i - \sum_{j<k} \varepsilon_j \delta_k \dim \mathcal{V}_{kj}\right)$$

とおけば，$a^*_{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}(\underline{\alpha}) + a^*_{\boldsymbol{\delta},-\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\alpha}) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(s_{\boldsymbol{\varepsilon\delta}}(\underline{\alpha}) - N_{\boldsymbol{\varepsilon\delta}})\right)$ となる．したがって，上記の関数等式は次のように書き換えられる．

**定理** 3.4　$\underline{s} \in D$ において，次の関数等式が成立する．

$$\zeta^*_{\boldsymbol{\delta}}(\tau(\underline{s})) = 2v(L)\, \frac{\Gamma_{\Omega^*}(\underline{s}\sigma)}{(2\pi)^{|\underline{s}\sigma|}} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{I}_r/\{\pm 1\}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(s_{\boldsymbol{\varepsilon\delta}}(\underline{s}\sigma) - N_{\boldsymbol{\varepsilon\delta}}\right)\right) \zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s}).$$

**注意** 3.5　この関数等式は [8] による一般論を等質開凸錐に適用したものであるが，等質開凸錐の構造情報を用いて明示的に公式が得られていることから，[8] で得られるものよりも詳しい形に書き表されている．§5 の (4.1) とその下の議論を参照のこと．

# 4　証明のスケッチ

前節までの記号を踏襲する．また，証明のアイデアは [8] による．$\mathscr{S}(V)$ は $V$ 上の急減少関数全体のなす Schwartz 空間とし，$f \in \mathscr{S}(V)$ および $\underline{s} \in \mathbb{C}^r$ に対して，次の 2 種類の関数を導入する．

$$Z(f;\, \underline{s}) := \int_{H/\Gamma} |P(\rho(h)I_N)|_{\underline{s}\sigma} \sum_{x \in L \setminus \mathcal{S}} f(\rho(h)x)\, dh \quad (\text{ゼータ積分}),$$
$$\Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}}(f;\, \underline{s}) := \int_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} |P(x)|_{\underline{s}\sigma} f(x)\, d\mu(x) \quad (\text{局所ゼータ関数}).$$

ここで $dh$ は Lie 群 $H$ の右不変測度であり，$d\mu(x) = |P(x)|_{-\underline{d}}\, dx$ は $H$ の作用で不変な $V \setminus \mathcal{S}$ 上の測度である．ただし $|P(\rho(h)I_N)|_{\underline{s}} := h_1^{2s_1} \cdots h_r^{2s_r}$ である．Bernstein–Gel’fand [1] より，局所ゼータ関数 $\Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}}(f;\, \underline{s})$ は $\mathrm{Re}\, \underline{s} > \underline{d}\sigma^{-1}$ で絶対収束し，$\underline{s}$ の有理型関数として全空間 $\mathbb{C}^r$ まで解析接続される．同様に，$f^* \in \mathscr{S}(V)$ および $\underline{t} \in \mathbb{C}^r$ に対して，

$$Z^*(f^*;\, \underline{t}) := \int_{H/\Gamma} |P^*(\rho^*(h)I_N)|_{-\underline{t}\sigma_*} \sum_{y \in L^* \setminus \mathcal{S}^*} f^*(\rho^*(h)y)\, dh,$$
$$\Phi^*_{\boldsymbol{\delta}}(f^*;\, \underline{t}) := \int_{\mathcal{O}^*_{\boldsymbol{\delta}}} |P^*(y)|_{\underline{t}\sigma_*} f^*(y)\, d\mu^*(y)$$

と定義する．先程と同様に，局所ゼータ関数 $\Phi^*_{\boldsymbol{\delta}}(f^*;\, \underline{t})$ は $\mathrm{Re}\, \underline{t} > \underline{d}\sigma_*^{-1}$ で絶対収束し，$\underline{t}$ の有理型関数として全空間 $\mathbb{C}^r$ まで解析接続される．関数等式の証明は，ゼータ関数とこれらの関数の間の関係式を調べることにより与えられる．簡単のため，$\underline{u} := \frac{1}{2}(\underline{p} - \underline{q})$ とおく．

**命題** 4.1（Nakashima [7]; cf. Sato [8]）　$\underline{s}, \underline{t} \in B$ および $f, f^* \in \mathscr{S}(V)$ に対して，

$$(1) \qquad Z(f;\, \underline{s}) = \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{I}_r} \zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(L;\, \underline{s})\, \Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}}(f;\, \underline{s} + \underline{u}\sigma^{-1}),$$

$$(2) \quad Z^*(f^*;\, \underline{t}) = \sum_{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{I}_r} \zeta^*_{\boldsymbol{\delta}}(L^*;\, \underline{t})\, \Phi^*_{\boldsymbol{\delta}}(f^*;\, \underline{t} - \underline{u}\sigma_*^{-1}).$$

この命題より，ゼータ積分 $Z(f;\, \underline{s})$ および $Z^*(f^*;\, \underline{t})$ はそれぞれ $B$ および $B^*$ で絶対収束することがわかる．$\mathsf{e}[a] := \exp(2\pi\sqrt{-1}\, a)$ とおく．$f \in \mathscr{S}(V)$ の Fourier 変換を

$$\mathcal{F}[f](y) := \int_V f(x)\, \mathsf{e}[\langle x \,|\, y \rangle]\, dy \quad (y \in V)$$

により定義する．また，$\Omega$ のガンマ関数 $\Gamma_\Omega(\underline{\alpha})$ は，$\Gamma_{\Omega^*}(\underline{\alpha})$ と同様に定義される．

$$\Gamma_\Omega(\underline{\alpha}) = \int_\Omega |P(x)|_{\underline{\alpha}}\, e^{-\langle x \,|\, I_N \rangle}\, d\mu(x) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^r \Gamma\left(\alpha_j - \frac{p_j}{2}\right) \quad (\underline{\alpha} \in \mathbb{C}^r).$$

これは $\mathrm{Re}\, \underline{\alpha} > \frac{1}{2}\underline{p}$ で絶対収束し，$\mathbb{C}^r$ 上の有理型関数に解析接続される (cf. Gindikin [2])．

**命題** 4.2（Nakashima [7]; cf. Sato [8]）　$\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta} \in \mathcal{I}_r$ とする．このとき，$\underline{s}, \underline{t} \in \mathbb{C}^r$ および $f, f^* \in \mathscr{S}(V)$ に対して，次が成り立つ．

$$(1) \quad \Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathcal{F}[f^*];\, \underline{s}) = \frac{\Gamma_\Omega(\underline{s}\sigma)}{(2\pi)^{|\underline{s}\sigma|}} \sum_{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{I}_r} a_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}}(\underline{s}\sigma)\, \Phi^*_{\boldsymbol{\delta}}(f^*;\, (\underline{d} - \underline{s}\sigma)\sigma_*^{-1}).$$

$$(2) \qquad \Phi^*_{\boldsymbol{\delta}}(\mathcal{F}[f];\, \underline{t}) = \frac{\Gamma_{\Omega^*}(\underline{t}\sigma_*)}{(2\pi)^{|\underline{t}\sigma_*|}} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{I}_r} a^*_{\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{t}\sigma_*)\, \Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}}(f;\, (\underline{d} - \underline{t}\sigma_*)\sigma^{-1}).$$

ここで，$a_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}}(\underline{\alpha})$ は以下のようにして定義される関数である．

$$a_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}}(\underline{\alpha}) = \exp\left\{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^r \varepsilon_i\delta_i\left(\alpha_i - \frac{p_i}{2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{j<k} \varepsilon_j\delta_k \dim \mathcal{V}_{kj}\right)\right\}.$$

また，ゼータ積分に関しては次の関係式がある．

**命題** 4.3（Nakashima [7]; cf. Sato [8]）　$\underline{s} \in D$ において，次の関係式が成り立つ．

$$Z(\mathcal{F}[f^*];\, \underline{s}) = v(L)^{-1} Z^*(f^*;\, \tau(\underline{s})).$$

**定理 3.2 の証明のスケッチ．** まず，コンパクトな台を持つ $\mathcal{O}^*_{\boldsymbol{\delta}}$ 上のなめらかな関数 $f^*$ に対して，命題 4.1 と命題 4.2 より，

$$Z(\mathcal{F}[f^*];\, \underline{s}) = \frac{\Gamma_\Omega(\underline{s}\sigma + \underline{u})}{(2\pi)^{|\underline{s}\sigma + \underline{u}|}} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{I}_r} a_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}}(\underline{s}\sigma + \underline{u}) \Phi^*_{\boldsymbol{\delta}}(f^*;\, \tau(\underline{s} - \underline{u}\sigma_*^{-1})),$$

$$Z^*(f^*;\, \tau(\underline{s})) = \zeta^*_{\boldsymbol{\delta}}(L^*;\, \tau(\underline{s}))\Phi^*_{\boldsymbol{\delta}}(f^*;\, \tau(\underline{s}) - \underline{u}\sigma_*^{-1})$$

が成り立つ．ここで $|\underline{u}|=0$ であることに注意して，命題 4.3 を用いると

$$\frac{\Gamma_\Omega(\underline{s}\sigma+\underline{u})}{(2\pi)^{|\underline{s}\sigma|}}\sum_{\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathcal{I}_r}\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})\,a_{\boldsymbol{\varepsilon\delta}}(\underline{s}\sigma+\underline{u})\,\Phi^*_{\boldsymbol{\delta}}(f^*;\,\underline{s}')=v(L)^{-1}\zeta^*_{\boldsymbol{\delta}}(\tau(\underline{s}))\,\Phi^*_{\boldsymbol{\delta}}(f^*;\,\underline{s}')$$

となる（$\underline{s}':=\tau(\underline{s})-\underline{u}\sigma_*^{-1}$ とおいた）．ここで，$\Phi^*_{\boldsymbol{\delta}}(f^*;\,\underline{s}')$ は恒等的に零ではないから

$$\zeta^*_{\boldsymbol{\delta}}(\tau(\underline{s}))=v(L)\,\frac{\Gamma_\Omega(\underline{s}\sigma+\underline{u})}{(2\pi)^{|\underline{s}\sigma|}}\sum_{\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathcal{I}_r}a_{\boldsymbol{\varepsilon\delta}}(\underline{s}\sigma+\underline{u})\,\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s}) \tag{4.1}$$

を得る．この等式が [8] で与えられた関数等式であるが，今の等質開凸錐の場合においては，

$$a_{\boldsymbol{\varepsilon\delta}}(\underline{s}\sigma+\underline{u})=a^*_{\boldsymbol{\delta\varepsilon}}(\underline{s}\sigma),\quad \Gamma_\Omega(\underline{s}\sigma+\underline{u})=\Gamma_{\Omega^*}(\underline{s}\sigma)$$

という関係式が成り立つので，定理 3.2 の形にまで変形できる．

## 5　Vinberg 錐

本節では，最小次元の非対称な等質錐である Vinberg 錐に，主定理を適用する．まず $V$ を以下で定義される 5 次元のベクトル空間とする:

$$V=\left\{x=\begin{pmatrix}x_1&0&x_2&0\\0&x_1&0&x_4\\x_2&0&x_3&0\\0&x_4&0&x_5\end{pmatrix};\ x_1,\dots,x_5\in\mathbb{R}\right\}.$$

このとき，Vinberg 錐 $\Omega$ およびその双対錐 $\Omega^*$ は

$$\begin{aligned}\Omega&=V\cap\mathcal{P}_4^+=\{x\in V;\ P_1(x)>0,\ P_2(x)>0,\ P_3(x)>0\}\,,\\ \Omega^*&=\{y\in V;\ P_1^*(y)>0,\ P_2^*(y)>0,\ P_3^*(y)>0\}\end{aligned}$$

により定義される．ただし，$P_j(x)$, $P_j^*(y)$ $(j=1,2,3)$ はそれぞれ

$$\begin{gathered}P_1(x)=x_1,\quad P_2(x)=x_1x_3-x_2^2,\quad P_3(x)=x_1x_5-x_4^2,\\ P_1^*(y)=y_1y_3y_5-y_2^2y_5-y_3y_4^2,\quad P_2^*(y)=y_3,\quad P_3^*(y)=y_5\end{gathered}$$

で与えられる $\Omega$ および $\Omega^*$ の基本相対不変式である．その構造情報は

$$\left\{\begin{aligned}\underline{p}&=(0,1,1),\\ \underline{q}&=(2,0,0),\\ \underline{d}&=(2,\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2})\end{aligned}\right.\qquad\text{および}\quad \sigma=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad \sigma_*=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

であるので，$\underline{s}\in\mathbb{C}^3$ に対して

$$\left\{\begin{aligned}&\underline{s}\sigma=(s_1+s_2+s_3,\ s_2,\ s_3),\\ &\tau(\underline{s})=(2-s_1-s_2-s_3,\ -\tfrac{1}{2}+s_1+s_3,\ -\tfrac{1}{2}+s_1+s_2)\end{aligned}\right.$$

である．格子を $L=V\cap \mathrm{Sym}(4,\mathbb{Z})$ とすれば，$L$ は $\Gamma=H\cap GL(4,\mathbb{Z})$ の作用で不変となる．$M_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{m})=\sharp\{x\in\Gamma\backslash L\cap\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}};\ |P_1(x)|=m_1,\ |P_2(x)|=m_2,\ |P_3(x)|=m_3\}$ を計算しよう．$x,x'\in L$ が同じ $\Gamma$ 軌道に属するための必要十分条件は

$$P_j(x)=P_j(x')\quad (j=1,2,3),\qquad \frac{x_2-x_2'}{x_1}\in\mathbb{Z},\qquad \frac{x_4-x_4'}{x_1}\in\mathbb{Z}$$

であるので，$|x_1|=m_1$ より $x_2,x_4=0,1,\dots,m_1-1$ としてよい．また，$x\in\mathcal{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}=\rho(H)\mathrm{diag}(\varepsilon_1 I_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ であるための必要十分条件は，符号関数 $\mathrm{sgn}\,x:=x/|x|\ (x\neq 0)$ を用いて

$$\mathrm{sgn}\,P_1(x)=\varepsilon_1,\quad \mathrm{sgn}\,P_2(x)=\varepsilon_1\varepsilon_2,\quad \mathrm{sgn}\,P_3(x)=\varepsilon_1\varepsilon_3$$

となるので，$\varepsilon_1\varepsilon_2 m_2=P_2(x)=x_1x_3-x_2^2$ より

$$x_3=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 m_2+x_2^2}{x_1}=\varepsilon_1\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 m_2+x_2^2}{m_1}\in\mathbb{Z},\quad \text{同様に}\quad x_5=\varepsilon_1\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3 m_3+x_4^2}{m_1}\in\mathbb{Z}.$$

これより，$n,m\in\mathbb{N}$ および $\varepsilon=\pm1$ に対して

$$M_{\boldsymbol{\varepsilon}}(n,m):=\sharp\left\{x\in\mathbb{Z};\ (\varepsilon m+x^2)n^{-1}\in\mathbb{Z},\ x=0,1,\dots,n-1\right\}$$

と定義すれば，Vinberg 錐 $\Omega$ に付随する多変数ゼータ関数 $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})$ は

$$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})=\frac{1}{8}\sum_{m_1,m_2,m_3=1}^{+\infty}\frac{M_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(m_1,m_2)M_{\varepsilon_1\varepsilon_3}(m_1,m_3)}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}m_3^{s_3}}$$

により与えられる．$(\underline{q}+\underline{1})\sigma^{-1}=(1,1,1)$ であるので，各 $\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})$ は領域

$$B=\left\{\underline{s}\in\mathbb{C}^3;\ \mathrm{Re}\,s_j>1\quad (j=1,2,3)\right\}$$

において絶対収束する．同様の議論を $\Omega^*$ に対しても実行することにより，双対錐 $\Omega^*$ に付随する多変数ゼータ関数 $\zeta^*_{\boldsymbol{\delta}}(\underline{t})$ は

$$\zeta^*_{\boldsymbol{\delta}}(\underline{t})=\frac{1}{8}\sum_{m_1,m_2,m_3=1}^{+\infty}\frac{M^*_{\delta}(m_1,m_2,m_3)}{m_1^{t_1}m_2^{t_2}m_3^{t_3}}$$

で与えられることがわかる．ただし，

$$M^*_{\boldsymbol{\delta}}(m_1,m_2,m_3)=\sharp\left\{(y,z);\quad \begin{matrix}(4\delta_1m_1+\delta_3m_2y^2+\delta_2m_3z^2)(4m_2m_3)^{-1}\in\mathbb{Z}\\ y,z=0,1,2,\dots,2m_1-1\end{matrix}\quad\right\}$$

である．また，$(\underline{p}+\underline{1})\sigma_*^{-1}=(1,1,1)$ であるので，各 $\zeta^*_{\boldsymbol{\delta}}(\underline{t})$ は領域

$$B^*=\left\{\underline{t}\in\mathbb{C}^3;\ \mathrm{Re}\,t_j>1\quad (j=1,2,3)\right\}$$

で絶対収束する．さて，線形独立な実ベクトルの組 $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ で生成される開凸錐を

$$\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle_+ := \{\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c};\ \alpha, \beta, \gamma > 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

で表す．$\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ とすれば，$B$ の元 $\underline{s}$ は $\mathrm{Re}\,\underline{v} \in \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle_+$ となる $\underline{v} \in \mathbb{C}^3$ を用いて $\underline{s} = \underline{1} + \underline{v}$ と書ける．また $\tau^{-1}(\underline{t}) = (t_1+t_2+t_3-1,\ \frac{3}{2}-t_1-t_2,\ \frac{3}{2}-t_1-t_3)$ であるので，$t_j = r_j + 1\ (r_j > 0)$ と考えることにより，

$$\tau^{-1}(B^*) = \left\{(2, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) + \underline{v} \in \mathbb{C}^3;\ \mathrm{Re}\,\underline{v} \in \left\langle \underline{e}_1 - \underline{e}_2 - \underline{e}_3,\ \underline{e}_1 - \underline{e}_2,\ \underline{e}_1 - \underline{e}_3 \right\rangle_+ \right\}$$

と表わせることがわかる．ここで，$B$ および $\tau^{-1}(B^*)$ の第二成分，第三成分を比較すると互いに異符号であるので，$B \cap \tau^{-1}(B^*) = \emptyset$ である．定理 3.2 より，$\zeta_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{s})$ はこれら 2 つの開凸錐上の管状領域に関する凸包 $D = \mathrm{Conv}(B \cup \tau^{-1}(B^*))$ 上まで解析接続される．また，$B$, $\tau^{-1}(B^*)$ 共に第一成分に関して実部が正であるので，$D \neq \mathbb{C}^3$ であることがわかる．

以下，これらのゼータ関数を結ぶ関数等式を記述する．$\varepsilon_1 = \delta_1 = 1$ としてよい．まず，

$$N_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \delta_i q_i - \sum_{j<k} \varepsilon_j \delta_k \dim \mathcal{V}_{kj}\Big) = \frac{2 - \delta_2 - \delta_3}{2},$$
$$N^*_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}} := \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \delta_i p_i - \sum_{j<k} \varepsilon_j \delta_k \dim \mathcal{V}_{kj}\Big) = \frac{\varepsilon_2 - 1}{2} \cdot \delta_2 + \frac{\varepsilon_3 - 1}{2} \cdot \delta_3$$

とおく．$N$ の値に応じて，$\cos \frac{\pi}{2}(s+N)$ は $\pm \sin \frac{\pi s}{2}$ または $\pm \cos \frac{\pi s}{2}$ のいずれかになる．以下は $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}$ に応じた $N_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}}$, $N^*_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}}$ の表である．ここで上段は $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ の値であり，左列は $(\delta_2, \delta_3)$ の値である．また，例えば上段の $-+$ は $(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = (-1, 1)$ を表している．

| $N_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}}$ | $++$ | $+-$ | $-+$ | $--$ |
|---|---|---|---|---|
| $++$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $+-$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $-+$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $--$ | 2 | 2 | 2 | 2 |

| $N^*_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\delta}}$ | $++$ | $+-$ | $-+$ | $--$ |
|---|---|---|---|---|
| $++$ | 0 | $-1$ | $-1$ | $-2$ |
| $+-$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 |
| $-+$ | 0 | $-1$ | 1 | 0 |
| $--$ | 0 | 1 | 1 | 2 |

ゼータ関数に関して，$\varepsilon_2, \varepsilon_3$ の符号に応じて $\zeta_{(1,1,-1)}(\underline{s}) = \zeta_{+-}(\underline{s})$ などのように記述することにする．$\zeta^*_{\boldsymbol{\delta}}(\underline{t})$ に関しても同様とする．このとき，定理 3.2 より，関数等式

$$\begin{pmatrix} \zeta^*_{++}(\tau(\underline{s})) \\ \zeta^*_{+-}(\tau(\underline{s})) \\ \zeta^*_{-+}(\tau(\underline{s})) \\ \zeta^*_{--}(\tau(\underline{s})) \end{pmatrix} = 2\pi \cdot \frac{\Gamma(s_1+s_2+s_3-1)\Gamma(s_2)\Gamma(s_3)}{(2\pi)^{s_1+2s_2+2s_3}} A(\underline{s}) \begin{pmatrix} \zeta_{++}(\underline{s}) \\ \zeta_{+-}(\underline{s}) \\ \zeta_{-+}(\underline{s}) \\ \zeta_{--}(\underline{s}) \end{pmatrix} \quad (\underline{s} \in D)$$

が成立する．ただし $A(\underline{s})$ は，$\widetilde{s}(a) := \sin \frac{\pi a}{2}$, $\widetilde{c}(a) := \cos \frac{\pi a}{2}$ を用いて

$$A(\underline{s}) = \begin{pmatrix} \widetilde{c}(S_1) & \widetilde{c}(S_2) & \widetilde{c}(S_3) & \widetilde{c}(S_4) \\ -\widetilde{s}(S_2) & -\widetilde{s}(S_1) & -\widetilde{s}(S_4) & -\widetilde{s}(S_3) \\ -\widetilde{s}(S_3) & -\widetilde{s}(S_4) & -\widetilde{s}(S_1) & -\widetilde{s}(S_2) \\ -\widetilde{c}(S_4) & -\widetilde{c}(S_3) & -\widetilde{c}(S_2) & -\widetilde{c}(S_1) \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} S_1 = s_1 + 2s_2 + 2s_3, \\ S_2 = s_1 + 2s_2, \\ S_3 = s_1 + 2s_3, \\ S_4 = s_1 \end{cases}$$

で与えられる 4 次正方行列である．同様に双対錐 $\Omega^*$ を起点に関数等式を構成すれば，

$$\begin{pmatrix} \zeta_{++}(\tau^{-1}(\underline{t})) \\ \zeta_{+-}(\tau^{-1}(\underline{t})) \\ \zeta_{-+}(\tau^{-1}(\underline{t})) \\ \zeta_{--}(\tau^{-1}(\underline{t})) \end{pmatrix} = 8\pi \cdot \frac{\Gamma(t_1)\Gamma(t_1+t_2-\frac{1}{2})\Gamma(t_1+t_3-\frac{1}{2})}{(2\pi)^{3t_1+t_2+t_3}} A^*(\underline{t}) \begin{pmatrix} \zeta^*_{++}(\underline{t}) \\ \zeta^*_{+-}(\underline{t}) \\ \zeta^*_{-+}(\underline{t}) \\ \zeta^*_{--}(\underline{t}) \end{pmatrix}.$$

ただし，$\underline{t} \in \tau(D)$ であり，$A^*(\underline{t})$ は以下で定義される 4 次の正方行列である．

$$A^*(\underline{t}) = \begin{pmatrix} -\widetilde{c}(T_1) & \widetilde{c}(T_2) & \widetilde{c}(T_3) & -\widetilde{c}(T_4) \\ \widetilde{s}(T_2) & -\widetilde{s}(T_1) & \widetilde{s}(T_4) & -\widetilde{s}(T_3) \\ \widetilde{s}(T_3) & \widetilde{s}(T_4) & -\widetilde{s}(T_1) & -\widetilde{s}(T_2) \\ \widetilde{c}(T_4) & \widetilde{c}(T_3) & \widetilde{c}(T_2) & \widetilde{c}(T_1) \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} T_1 = 3t_1 + t_2 + t_3, \\ T_2 = t_1 + t_2 - t_3, \\ T_3 = t_1 - t_2 + t_3, \\ T_4 = -t_1 - t_2 - t_3. \end{cases}$$

**注意** 5.1　Vinberg 錐およびその双対錐から 2 つの関数等式が得られたが，これら 2 つの関数等式は実質的には等しいものである．すなわち，第一の関数等式において $\underline{t} = \tau(\underline{s})$ として，右辺にある係数および係数行列を左辺に移項し，式を整理すれば第二の関数等式と一致する．また，一般の場合においても同様である．それを確認するために必要になるのは，ガンマ関数の相反公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ と余弦関数の和積公式

$$\sum_{\varepsilon \in \mathcal{I}_r/\{\pm 1\}} \cos\Bigl(\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j \alpha_j\Bigr) = 2^{r-1} \prod_{j=1}^{r} \cos \alpha_j$$

である．この件に関して指摘してくださった九州大学の落合啓之氏に，この場を借りて感謝いたします．

## 参考文献


[1] I. N. Bernstein and S. I. Gel'fand, *Meromorphic property of the function* $P^\lambda$, Functional Anal. Appl., **3** (1969), 68–69.

[2] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys, **19** (1964), 1–89.

[3] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.

[4] H. Ishi, *On symplectic representations of normal* $j$*-algebras and their application to Xu's realizations of Siegel domains*, Differ. Geom. Appl., **24** (2006), 588–612.

[5] H. Ishi and T. Nomura, *Tube domain and an orbit of a complex triangular group*, Math. Z., **259** (2008), 697–711.

[6] H. Nakashima, *Basic relative invariants of homogeneous cones*, J. Lie Theory, **24** (2014), 1013–1032.

[7] H. Nakashima, *Functional equations of zeta functions associated with homogeneous cones*, submitted.

[8] F. Sato, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: functional equations*, Tôhoku Math. Journ., **34** (1982), 437–483.

[9] F. Sato, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces II: a convergence criterion*, Tôhoku Math. Journ., **35** (1983), 77–99.

[10] F. Sato, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces III: Eisenstein series for indefinite quadratic forms*, Anal. Math., **116** (1982), 177–212.

[11] M. Sato and T. Shintani, *On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces*, Ann. of Math., **100** (1974), 131–170.

[12] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[13] T. Yamasaki and T. Nomura, *Realization of homogeneous cones through oriented graphs*, Kyushu J. Math., **69** (2015), 11–48.