数理解析研究所講究録 第2103巻 2019年 76-85

The orbit decomposition of a flag variety over real and complex numbers

東京大学 数理科学研究科　田内 大渡 *†
Taito Tauchi
Graduate School of Mathematical Sciences,
the University of Tokyo

概要

G を実簡約群、H を G の閉部分群、P を G の極小放物型部分群とする。この論文では G/P 上の H 軌道は有限個しか存在しないがその複素化 $H_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ 上に無限個の軌道を持つ例を構成する方法を与える．具体的には H として P の冪単根基 N をとる．するとブリュワー分解より G/P 上の N 軌道の個数は有限であるが、もし P の Levi 部分群のリー環が非可換であれば、その複素化 $N_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ 上に無限個の軌道を持つことを幾何学的に証明する．また別証明として表現論を用いた証明も与える．

Abstract

Let P be a minimal parabolic subgroup of a real simple Lie group G and $G_{\mathbb{C}}, P_{\mathbb{C}}$ complexifications of G, P, respectively. In this article, we give a subgroup H of G such that a complexification $H_{\mathbb{C}}$ of H has infinite orbits on $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ although the number of H-orbits on G/P is finite. More precisely, let $P = MAN$ be its Langlands decomposition. Then $\#(AN\backslash G/P) < \infty$ by Bruhat decomposition. However If the Lie algebra of M is not abelian, $\#(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) = \infty$ holds. We give two proofs of this theorem. One is a representation theoretic proof and another is a geometric proof.

1　導入

G を実簡約リー群, H をその代数部分群とする．このとき次の重複度の有限性に関する判定法が小林-大島により証明された．

事実 1.1 ([9, Theorem A])**.** 組み (G, H) に関する次の二条件は同値である．

(i) 任意の $(\pi, \tau) \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{f}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^{\infty}(G/H, \tau)) < \infty$.
(ii) G/H が実球多様体である．

ここで G の滑らかな既約許容表現の同値類全体を $\hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ で, H の有限次元既約表現の

* 本研究は JSPS 科研費 17J00596 の助成を受けたものである．
† E-mail address: taito@ms.u-tokyo.ac.jp.

同値類全体を $\hat{H}_{\mathrm{f}}$ で表した. さらに $C^\infty(G/H,\tau)$ は同変ベクトル束 $G\times_H\tau\to G/H$ の可微分な切断全体の成す Fréchet 空間を表す. また実球多様体 (real spherical manifold/variety) という用語は, 群の表現論が有効に使える大域解析の枠組みを求める中で小林 [7] により導入された.

定義 1.2 ([9])**.** 実簡約リー群 G の極小放物型部分群 P が, 等質多様体 G/H に開軌道を持つとき, G/H を実球多様体であるという.

注釈 1.3. 松木の実ランク 1 に帰着させる方法 [11] と Kimelfeld の実ランク 1 での分類 [4] を合わせることにより G/H が実球多様体であることと $\#(H\backslash G/P)<\infty$ であることが同値なことが 1990 年代の前半に示されている [1].

さらに $G_{\mathbb{C}}$ と $H_{\mathbb{C}}$ をそれぞれ G と H の複素化としたとき, 小林・大島は次の重複度の一様有界性に関する判定法も証明している。

事実 1.4 ([9, Theorem B])**.** 組み (G,H) に関する次の二条件は同値である.

(1) $\displaystyle\sup_{\tau\in\hat{H}_{\mathrm{f}}}\ \sup_{\pi\in\hat{G}_{\mathrm{smooth}}}\frac{1}{\dim\tau}\dim\mathrm{Hom}_G(\pi,C^\infty(G/H,\tau))<\infty.$
(2) $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が球多様体である.

ここで $G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群 B が $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に開軌道を持つとき等質多様体 $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ を球多様体であるという.

注釈 1.5. [2] や [13, Theorem 1] により $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ か球多様体であることと $\#(B\backslash G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}})<\infty$ が同値であることが知られている. また [11] における議論からも従う.

これらにみたように G/P 上の H による軌道分解、またはその複素化の軌道分解は G/H 上の大域解析に関する豊富な情報を持っていると考えられる.
以上を踏まえこの論文では $\#(H\backslash G/P)<\infty$ であるが $\#(H_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}})=\infty$ を満たす例を構成する方法を与える. 具体的には次を証明する.

定理 1.6. P を単純リー群 G の極小放物型部分群とし, $P=MAN$ をその Langlands 分解とする. このとき M のリー環 $\mathfrak{m}$ が非可換であることと $\#(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}})=\infty$ であることは同値である.

注釈 1.7. 事実 1.4 と定理 1.6 では $G_{\mathbb{C}}/B$ と $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ の $H_{\mathbb{C}}$ による軌道分解をそれぞれ考えているが $\mathfrak{m}$ が可換であることと $P_{\mathbb{C}}=B$ が成り立つことが同値であることを注意しておく.

実単純リー環の分類をみることで直ちに次の系がわかる.

系 1.8. P を単純リー群 G の極小放物型部分群とし, $P = MAN$ をその Langlands 分解とする. このとき $\#(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) = \infty$ であることと $\mathfrak{g}$ が次のいずれかであることは同値である (記号は [6] に従った).

$$\begin{aligned}&\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}), \quad \mathfrak{su}(p,q)\ (|p-q| \geq 2),\\ &\mathfrak{so}(p,q)\ (|p-q| \geq 3), \quad \mathfrak{sp}(p,q), \quad \mathfrak{so}^*(2n)\ (n \geq 2),\\ &\mathrm{EIII}, \mathrm{EIV}, \mathrm{EVI}, \mathrm{EVII}, \mathrm{EIX}, \mathrm{FII}.\end{aligned}$$

注釈 1.9. 任意の実簡約リー群（あるいは単純リー群）において Bruhat 分解 (例えば [6, Theorem 7.40]) より $\#(AN\backslash G/P) < \infty$ が成り立つ.

注釈 1.10. G を不定値ユニタリ群 $SU(1,n)$ とする. このとき $n \geq 3$ ならば $\#(N_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) = \infty$ が成り立つことを松木は [11, Remark 7] において指摘している.

注釈 1.11. 定理 1.6 において G が単純であるということは弱めることができる. 実際この仮定は $s_\alpha(\beta) \neq \beta$ を満たす $\alpha \in \Pi\backslash\Pi_{\mathfrak{m}}$ と $\beta \in \Pi_{\mathfrak{m}}$ (記号は 2 章参照) の存在にしか用いない. このような α と β が存在するならば G を実簡約群としても定理 1.6 は成り立つ.

以下, 定理 1.6 の証明について述べる. もし $\mathfrak{m}$ が可換であれば注釈 1.7 と Bruhat 分解より $\#(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) < \infty$ が成り立つ. 従って定理 1.6 のためにはその逆を証明すればよい. すなわち $\mathfrak{m}$ が非可換であれば $\#(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) = \infty$ であることを示せばよい. この論文では幾何学的な手法と表現論的な手法との二通りでこれを証明する。

2　幾何学的証明

この 2 章では定理 1.6 に幾何学的手法を用いた証明を与える. $\mathfrak{p}$ を実単純リー環 $\mathfrak{g}$ の極小放物型部分リー環とし $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ をその Langlands 分解とする. $\mathfrak{m}$ の極大可換部分リー環 $\mathfrak{t}$ をとり $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のカルタン部分環 $\mathfrak{j}$ を $\mathfrak{j} := \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ で定める. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分環 $\mathfrak{b} = \mathfrak{j} + \mathfrak{n}_B$ を $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{n}_B$ となるようにとる. ここで $\mathfrak{n}_B$ は $\mathfrak{b}$ の冪零根基である. Δ を $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j})$ に関するルート系とし, $\mathfrak{n}_B$ に対応するルートが正になるように順序を定める. Δ^+ を正のルートの集合とし $\Pi \subset \Delta^+$ を単純系とする. 同様に $\Delta_{\mathfrak{m}}$ を $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ に関するルート系として $\Delta_{\mathfrak{m}}^+ \subset \Delta^+$, $\Pi_{\mathfrak{m}} \subset \Pi$ が成り立つように正のルート $\Delta_{\mathfrak{m}}^+$ と単純系 $\Pi_{\mathfrak{m}}$ を定める. $\mathfrak{m}$ が非可換なので $\Pi_{\mathfrak{m}} \neq \emptyset$ である. $\gamma \in \Delta$ に対して γ に対応する $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のルート空間を $\mathfrak{g}_\gamma$ と表すことにして $N_M := \exp(\sum_{\gamma \in \Delta_{\mathfrak{m}}^+} \mathfrak{g}_\gamma)$ とおく. また W と W_M をそれぞれ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ の Weyl 群とする.

一般 Bruhat 分解により次が成り立つ.

$$G_{\mathbb{C}} = \coprod_{w \in W/W_M} BwP_{\mathbb{C}} = \coprod_{w \in W/W_M} N_B w P_{\mathbb{C}}$$

$A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}$ が N_B を正規化することに注意すれば各 $w \in W/W_M$ に対して $A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}$ は $N_BwP_{\mathbb{C}}$ に作用する。よって $\#(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) = \infty$ を言うにはある $w_0 \in W/W_M$ が存在して $\#(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}\backslash N_Bw_0P_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) = \infty$ を言えば十分である．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が単純なのである $\alpha \in \Pi\backslash\Pi_{\mathfrak{m}}$ と $\beta \in \Pi_{\mathfrak{m}}$ が存在してこれらは非直交であるとしてよい．すなわち s_α を α に関する鏡映として $s_\alpha(\beta) \neq \beta$ としてよい．$w_0 = s_\beta s_\alpha$ とおく．

ルート系の一般論 (例えば [6, Lemma 2.61]) から任意の $\gamma \in \Pi$ にたいして $s_\gamma(\Delta^+\backslash\{\gamma\}) = \Delta^+\backslash\{\gamma\}$ と $s_\gamma(\gamma) = -\gamma$ が成り立つことに注意する．$N_M \subset M_{\mathbb{C}}$ より N_M は $A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}$ を正規化するので任意の $n_M \in N_M$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}n_M s_\beta s_\alpha P_{\mathbb{C}} &= n_M A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}} s_\beta s_\alpha P_{\mathbb{C}} \\ &= n_B N_{\mathbb{C}} s_\beta s_\alpha P_{\mathbb{C}} \\ &= n_B s_\beta N_{\mathbb{C}} s_\alpha P_{\mathbb{C}} \\ &= n_B s_\beta s_\alpha \exp(\mathfrak{g}_{-\alpha}) P_{\mathbb{C}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

三個目の等式では $s_\beta^{-1}N_{\mathbb{C}}s_\beta = N_{\mathbb{C}}$ であることを用いた．これは $s_\beta \cdot \Delta^+_{\mathfrak{m}} = \{-\beta\} \cup (\Delta^+_{\mathfrak{m}}\backslash\{\beta\})$ と $s_\beta \cdot \Delta^+ = \{-\beta\} \cup (\Delta^+\backslash\{\beta\})$ であることから従う．よって $N_B = N_{\mathbb{C}}N_M$ より $N_Bw_0P_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ 上のすべての $A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}$ 軌道の次元は 1 である。一方 $((s_\beta s_\alpha)^{-1} \cdot \Delta^+) \cap (-(\Delta^+\backslash\Delta^+_{\mathfrak{m}})) = \{-\alpha, -s_\alpha(\beta)\}$ より $N_Bw_0P_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}} = w_0\exp(\mathfrak{g}_{-\alpha} + \mathfrak{g}_{-s_\alpha(\beta)})P_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ となるので $N_Bw_0P_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ の次元は 2 である (α と β が非直交なので $s_\alpha(\beta) \notin \Delta^+_{\mathfrak{m}}$ である)．よって $\#(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}\backslash N_Bw_0P_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) = \infty$ が従い定理 1.6 が示された．

注釈 2.1. 一般に w を W/W_M の元としたとき $N_BwP_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ 上の任意の $A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}$ 軌道の次元は $\#\{\gamma \in \Delta^+\backslash\Delta^+_{\mathfrak{m}} \mid w^{-1} \cdot \gamma \in -(\Delta^+\backslash\Delta^+_{\mathfrak{m}})\}$ となることが (2.1) と同様にしてわかる．また $\dim N_BwP_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}} = \#\{\gamma \in \Delta^+ \mid w^{-1} \cdot \gamma \in -(\Delta^+\backslash\Delta^+_{\mathfrak{m}})\}$ である．よって w を $w^{-1} \cdot \gamma_0 \in -(\Delta^+\backslash\Delta^+_{\mathfrak{m}})$ となる $\gamma_0 \in \Delta^+_{\mathfrak{m}}$ が存在する W/W_M の元とすれば ($w_0 = s_\beta s_\alpha$ は $\gamma_0 = \beta$ としてこれをみたす), 軌道の次元をみることにより $\#(A_{\mathbb{C}}N_{\mathbb{C}}\backslash N_BwP_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}) = \infty$ となることがわかる．

3　表現論的証明

表現論的証明には次の事実を用いる．

事実 3.1 ([12, Theorem 2.2])**.** Q を実簡約リー群 G の放物型部分群とし H を G の閉部分群とする．このとき $\#(H_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/Q_{\mathbb{C}}) < \infty$ であれば次が成り立つ．

$$\sup_{(\eta,\tau)\in\hat{Q}_{\mathrm{f}}\times\hat{H}_{\mathrm{f}}} \frac{1}{\dim\eta\cdot\dim\tau} \dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\eta), C^\infty(G/H,\tau)) < \infty.$$

注釈 3.2. 上記の事実 3.1 の仮定 $\#(H_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/Q_{\mathbb{C}}) < \infty$ は事実 1.4 の仮定 $\#(H_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/B) <$

∞ より弱いが, G/Q 上に実現される表現に関しての重複度を一様に抑えるにはこれで十分であることを主張している. ただし事実 3.1 では $\eta \in \hat{Q}_{\mathrm{f}}$ の次元と $\tau \in \hat{H}_{\mathrm{f}}$ の次元の積で割った値を一様に抑えられることしか保証していないため, $\tau \in \hat{H}_{\mathrm{f}}$ の次元でのみ割った値を一様に抑えられることを保証する事実 1.4 の主張よりは一般に弱い.

この事実 3.1 により, 次の命題を示せば定理 1.6 が従う.

命題 3.3 P の一次元表現の列 $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ と AN の一次元表現の列 $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ であって次を満たすものが存在する.

$$\lim_{k\to\infty} \dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P,\eta_k), C^\infty(G/AN,\tau_k)) = \infty.$$

注釈 3.4. 定理 1.6 を命題 3.3 に帰着させるには, 事実 3.1 の代わりに事実 1.4 を用いることもできる.

以下, 実際に微分作用素として実現される絡作用素を構成することでこの命題 3.3 を証明する. 記号は 2 章のものをそのまま用いる. 特に $\alpha \in \Pi\backslash\Pi_{\mathfrak{m}}, \beta \in \Pi_{\mathfrak{m}}$ であり $s_\alpha(\beta) \neq \beta$ である. また $X_0 \in \mathfrak{g}_\alpha, Y_0 \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, H_0 \in \mathfrak{j}$ を $\{H_0, X_0, Y_0\}$ が $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ トリプルをなすようにとる. すなわち次が成り立つようにとる.

$$[H_0, X_0] = 2X_0, \quad [H_0, Y_0] = -2Y_0, \quad [X_0, Y_0] = H_0. \tag{3.1}$$

任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_k(H_0) = -(k-1)$ となるような $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ の元 λ_k を任意に一つとり固定する. ここで $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{j} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ より $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \subset \mathfrak{j}^*$ とみた. $H_0 \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ 成分が 0 でないのでこのような元 $\lambda_k \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ は存在する.

G の $C^\infty(G)$ 上への右正則表現の微分を $R : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(C^\infty(G))$ で表す. すなわち $X \in \mathfrak{g}$ と $f \in C^\infty(G)$ に対して $R(X)f \in C^\infty(G)$ を次で定める.

$$(R(X)f)(x) := \left.\frac{d}{dt} f(xe^{tX})\right|_{t=0}.$$

このとき R は自然に $: U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(C^\infty(G))$ にのびる. ただしここで $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環である. また $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して, A の一次元表現 $(\chi_\lambda, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}_\lambda$ を

$$\chi_\lambda(e^H) := e^{\lambda(H)} \qquad \text{for } H \in \mathfrak{a}$$

で定める. この表現に M と N を自明に作用させることにより $P = MAN$ の一次元表現を得るがこれも $\mathbb{C}_\lambda$ で表すことにする. すなわち P の一次元表現 $\mathbb{C}_\lambda$ を次で定める.

$$\chi_\lambda(me^H n) := e^{\lambda(H)} \qquad \text{for } m \in M, H \in \mathfrak{a}, n \in N.$$

またこの表現の AN への制限も $\mathbb{C}_\lambda$ で表すことにする. このとき次の同型が成り立つ.

$$C^\infty(G/P,\mathbb{C}_\lambda) \simeq \{f \in C^\infty(G) \mid f(gp) = \chi_\lambda(p^{-1})f(g) \text{ for } g \in G, p \in P\}.$$
$$C^\infty(G/AN,\mathbb{C}_\lambda) \simeq \{f \in C^\infty(G) \mid f(gan) = \chi_\lambda(a^{-1})f(g) \text{ for } g \in G, a \in A, n \in N\}$$

命題 3.5 $R(Y_0^k) \in \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{\lambda_k}), C^\infty(G/AN, \mathbb{C}_{\lambda_k+k\alpha}))$ が任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し成り立つ.

任意の $f \in C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{\lambda_k})$ に対して $R(Y_0^k)f$ が $C^\infty(G/AN, \mathbb{C}_{\lambda_k+k\alpha})$ の元であることを証明する. すなわち次が成り立つことを示せばよい.

$$R(Y_0^k)f(ga) = \chi_{\lambda_k+k\alpha}(a^{-1})R(Y_0^k)f(g) \qquad \text{for any } a \in A, g \in G, \tag{3.2}$$
$$R(XY_0^k)f = 0 \qquad \text{for any } X \in \mathfrak{n}. \tag{3.3}$$

(3.2) は次の等式から従う.

$$\begin{aligned}
R(Y_0^k)f(ga) &= \frac{d}{dt_1}\cdots\frac{d}{dt_k}f(gae^{t_1Y_0}\cdots e^{t_kY_0})\Big|_{t_1=\cdots=t_k=0} \\
&= \frac{d}{dt_1}\cdots\frac{d}{dt_k}f(g(ae^{t_1Y_0}a^{-1})\cdots(ae^{t_kY_0}a^{-1})a)\Big|_{t_1=\cdots=t_k=0} \\
&= \chi_{\lambda_k}(a^{-1})\,\frac{d}{dt_1}\cdots\frac{d}{dt_k}f(ge^{\mathrm{Ad}(a)(t_1Y_0)}\cdots e^{\mathrm{Ad}(a)(t_kY_0)})\Big|_{t_1=\cdots=t_k=0} \\
&= \chi_{\lambda_k}(a^{-1})\chi_{k\alpha}(a^{-1})R(Y_0^k)f(g).
\end{aligned}$$

ここで Ad は G の $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上の随伴表現を表す. (3.3) に対してはより強く次を示す.

$$R(XY_0^k)f = 0 \qquad \text{for any } X \in \mathfrak{n}_B \tag{3.4}$$

任意の $X \in \mathfrak{n}_B$ と $f \in C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{\lambda_k})$ に対して $R(X)f = 0$ となることに注意すれば $[X, Y_0^k] = XY_0^k - Y_0^kX$ により (3.4) は次と同値である.

$$R([X, Y_0^k])f = 0 \qquad \text{for any } X \in \mathfrak{n}_B \tag{3.5}$$

リー環 $\mathfrak{n}_B$ は $\{\mathfrak{g}_\gamma \mid \gamma \in \Pi\}$ により生成されるのでさらにこれは次と同値である.

$$R([X_\gamma, Y_0^k])f = 0 \qquad \text{for any } X_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma, \text{ any } \gamma \in \Pi \tag{3.6}$$

しかし $\gamma \in \Pi\backslash\{\alpha\}$ に対しては $-\alpha+\gamma \notin \Delta$ より $[X_\gamma, Y_0^k] = 0$ となるので $\gamma \in \Pi\backslash\{\alpha\}$ のとき (3.6) は正しい. 以上より命題 3.5 の証明には任意の $f \in C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{\lambda_k})$ に対して次を示せばよい.

$$R([X_0, Y_0^k])f = 0 \tag{3.7}$$

(3.7) の証明のために補題を用意する.

補題 3.6 $U(\mathfrak{g})$ の元として次の等式が成り立つ.

$$[X_0, Y_0^k] = kY_0^{k-1}(H_0 - (k-1)) \tag{3.8}$$

証明　数学的帰納法で示す．$k=1$ のとき (3.1) より正しい．$k=\ell$ で (3.8) が正しいと仮定する．このとき

$$\begin{aligned}[X_0, Y_0^{\ell+1}] &= [X_0, Y_0]Y_0^{\ell} + Y_0[X_0, Y_0^{\ell}] \\ &= H_0Y_0^{\ell} + Y_0(\ell Y_0^{\ell-1}(H_0 - (\ell-1))) \\ &= [H_0, Y_0^{\ell}] + Y_0^{\ell}H_0 + \ell Y_0^{\ell}(H_0 - (\ell-1)) \\ &= -2\ell Y_0^{\ell} + Y_0^{\ell}H_0 + \ell Y_0^{\ell}H_0 - \ell(\ell-1)Y_0^{\ell} \\ &= (\ell+1)Y_0^{\ell}(H_0 - \ell)\end{aligned}$$

となり $k=\ell+1$ でも正しい．よって数学的帰納法が走り題意が従う．　□

命題 *3.5* の証明　(3.7) を示せばよい．補題 3.8 と λ_k の定義より

$$\begin{aligned}R([X_0, Y_0^k])f &= kR(Y_0^{k-1})(R(H_0) - (k-1))f \\ &= kR(Y_0^{k-1})(-\lambda_k(H_0) - (k-1))f \\ &= 0\end{aligned}$$

となるので示された．　□

G の $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の随伴表現 Ad を $U(\mathfrak{g})$ 上の表現へと伸ばしたものも同じく Ad と表すことにする．

命題 3.7　$R(\mathrm{Ad}(m)(Y_0^k)) \in \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{\lambda_k}), C^\infty(G/AN, \mathbb{C}_{\lambda_k+k\alpha}))$ が任意の $m \in M$ に対して成り立つ．

証明　一般に $f \in C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{\lambda_k})$ と $g \in G$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}R(\mathrm{Ad}(m)(Y_0^k))f(g) &= \frac{d}{dt_1}\cdots\frac{d}{dt_k}f(ge^{\mathrm{Ad}(m)(t_1Y_0)}\cdots e^{\mathrm{Ad}(m)(t_kY_0)})\Big|_{t_1=\cdots=t_k=0} \\ &= \frac{d}{dt_1}\cdots\frac{d}{dt_k}f(g(me^{t_1Y_0}m^{-1})\dots(me^{t_kY_0}m^{-1}))\Big|_{t_1=\cdots=t_k=0} \\ &= \frac{d}{dt_1}\cdots\frac{d}{dt_k}f(gme^{t_1Y_0}\dots e^{t_kY_0})\Big|_{t_1=\cdots=t_k=0} \\ &= R(Y_0^k)f(gm). \end{aligned} \tag{3.9}$$

よって命題 3.5 より $R(Y_0^k) \in \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{\lambda_k}), C^\infty(G/AN, \mathbb{C}_{\lambda_k+k\alpha}))$ であること，

また M が A を中心化し N を正規化することに注意すれば次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
R(\mathrm{Ad}(m)(Y_0^k))f(ga) &= R(Y_0^k)f(gam) \\
&= R(Y_0^k)f(gma) \\
&= \chi_{\lambda_k+k\alpha}(a^{-1})R(Y_0^k)f(gm) \\
&= \chi_{\lambda_k+k\alpha}(a^{-1})R(\mathrm{Ad}(m)(Y_0^k))f(g) \\
R(\mathrm{Ad}(m)(Y_0^k))f(gn) &= R(Y_0^k)f(gnm) \\
&= R(Y_0^k)f(gmn') \qquad \text{for some } n' \in N \\
&= R(Y_0^k)f(gm) \\
&= R(\mathrm{Ad}(m)(Y_0^k))f(g)
\end{aligned}$$

よって題意が従った. □

注釈 3.8. [8, Proposition 3.2] により次が成り立つ.

$$\mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{\lambda_k}), C^\infty(G/AN, \mathbb{C}_{\lambda_k+k\alpha})) \simeq \tag{3.10}$$

$$(\mathcal{D}'(G/P, \mathbb{C}_{-\lambda_k} \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \otimes \mathbb{C}_{\lambda_k+k\alpha})^{AN} \tag{3.11}$$

またこの右辺は M が AN を正規化することにより M の表現空間となる.

命題 *3.3* の証明　M の作用により Y_0^k で生成される $U(\mathfrak{g})$ の部分空間を V_k とするとこれは M の有限次元既約表現となる. また命題 3.7 より $R(V_k) \subset \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{\lambda_k}), C^\infty(G/AN, \mathbb{C}_{\lambda_k+k\alpha}))$ が成り立つ. さらに α の取り方より α の $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ への制限 $\alpha|_{\mathfrak{t}_\mathbb{C}}$ は 0 ではないのでこれを $\Phi \in \mathfrak{t}_\mathbb{C}^*$ とおく. $Y_0^k \in V_k$ は V_k の $k\Phi$ ウエイト空間に属し、かつ零でない. よって V_k の最高ウエイトは $k\Phi$ より大きい. これより $\mathfrak{m}$ が非可換なことに注意すれば $k \to \infty$ のとき $\dim V_k \to \infty$ である. 従って

$$R(V_k) \subset \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{\lambda_k}), C^\infty(G/AN, \mathbb{C}_{\lambda_k+k\alpha}))$$

であることに気をつければ R が V_k 上単射であるので特に次が成り立つ.

$$\lim_{k\to\infty} \dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{\lambda_k}), C^\infty(G/AN, \mathbb{C}_{\lambda_k+k\alpha})) = \infty.$$

これが示すべきことであった □

注釈 3.9. $\lambda \in \mathfrak{j}^*$ に対して Verma 加群の理論 (例えば [6, Lemma 5.18]) からもし $k := \lambda(H_0) + 1$ が非負整数であれば

$$\begin{gathered}
U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda-k\alpha} \hookrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda \\
1 \otimes 1 \mapsto Y_0^k \otimes 1
\end{gathered}$$

という単射が存在する．$\lambda|_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*} = 0$ であればこれは特に

$$\begin{aligned} \iota : U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} (V_k \otimes \mathbb{C}_\lambda) &\hookrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda \\ 1 \otimes (Y_0^k \otimes 1) &\mapsto Y_0^k \otimes 1 \end{aligned} \tag{3.12}$$

という射を誘導する．また次のような同型が存在する．

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} (V_k \otimes \mathbb{C}_\lambda), U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda) \\ \simeq &\mathrm{Hom}_{\mathfrak{p}}(V_k \otimes \mathbb{C}_\lambda, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda) \\ \simeq &\mathrm{Hom}_{\mathfrak{m}}(V_k, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}+\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}_{\lambda-k\alpha}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda)) \end{aligned}$$

この同型により $\iota \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} (V_k \otimes \mathbb{C}_\lambda), U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda)$ は次に対応する．

$$\begin{array}{ccc} V_k & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}+\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}_{\lambda-k\alpha}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda) \\ \Cup & & \Cup \\ v & \longmapsto & f_v := (1 \mapsto v \otimes 1) \end{array}$$

よって $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}+\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}_{\lambda-k\alpha}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda) = \dim V_k$ である．また次の同型が存在する．

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}+\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}_{\lambda-k\alpha}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda) &\simeq ((U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda) \otimes \mathbb{C}_{-\lambda+k\alpha})^{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}+\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}} \\ &\simeq (\mathcal{D}'_{\{eP\}}(G/P, \mathbb{C}_\lambda \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \otimes \mathbb{C}_{-\lambda+k\alpha})^{AN} \\ &\subset \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/P, \mathbb{C}_{-\lambda}), C^\infty(G/AN, \mathbb{C}_{-\lambda+k\alpha})) \end{aligned}$$

ここで二つ目の等号は [10, Lemma 2.20] による． また $\mathcal{D}'_{\{eP\}}(G/P, \mathbb{C}_\lambda \otimes \mathbb{C}_{2\rho})$ は $\mathcal{D}'(G/P, \mathbb{C}_\lambda \otimes \mathbb{C}_{2\rho})$ の元で台が $\{eP\} \subset G/P$ に含まれる元全体が成す部分空間を表す．$\lambda = -\lambda_k$ のときこの同型で命題 3.5 の $Y_0^k \in (\mathcal{D}'_{\{eP\}}(G/P, \mathbb{C}_\lambda \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \otimes \mathbb{C}_{-\lambda+k\alpha})^{AN}$ に対応する $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}+\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}_{\lambda-k\alpha}, U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda)$ の元が $f_{Y_0^k}$ である．

参考文献

[1] F. Bien, Orbit, multiplicities, and differential operators, Contemp. Math. **145** (1993), Amer. Math. Soc. 199–227.

[2] M. Brion, Spherical varieties, Progr. Math., **295**, Birkhäuser/Springer, New York, 2012.

[3] W. Casselman, Jacquet modules for real reductive groups. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978), Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, 557–563.

[4] B. Kimelfeld, Homogeneous domains in flag manifolds of rank 1, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 506–588.

[5] M. Kashiwara, Systems of Microdifferential Equations, Progr. Math. **34** (1983), Birkhäuser, xv+159 pp.

[6] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Second edition, Progr. Math. **140** (2002), Birkhäuser, xviii+812 pp.

[7] T. Kobayashi, Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces, Proceedings of the 3rd Summer School on Number Theory "Homogeneous Spaces and Automorphic Forms" in Nagano (F. Sato, ed.), 1995, 22–41 (in Japanese).

[8] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups, Mem. Amer. Math. Soc. **238** (2015), 118 pp.

[9] T. Kobayashi, T. Oshima, Finite multiplicity theorems for induction and restriction, Adv. Math. **248** (2013), 921–944.

[10] T. Kobayashi, M. Pevzner, Differential symmetry breaking operators: I. General theory and F-method, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 2, 801–845.

[11] T. Matsuki, Orbits on flag manifolds, Proceedings of the InternationalCongress of Mathematicians, Kyoto 1990, Vol. II (1991), Springer-Verlag, 807–813.

[12] T. Tauchi, On a uniformly bounded multiplicity theorem, in preparation.

[13] È. B. Vinberg, Complexity of action of reductive groups, Func. Anal. Appl. **20** (1986), 1–11.