数理解析研究所講究録 第2103巻 2019年 137-146

ユニタリ鏡映群の 同変シューベルト・カルキュラスに向けて*

山梨大学 大学院総合研究部　成瀬　弘
Hiroshi Naruse
Graduate Faculty of Interdisciplinary Research, University of Yamanashi

Abstract

ここでは、ユニタリ鏡映群に付随する同変シューベルト・カルキュラスについて、その可能性を示唆するとともに、具体的な例として複素鏡映群 $G(r,1,n)$ と $G(r,r,n)$ についてて、グラスマン多様体に対応する場合においては、シューベルト多項式の類似物をHall-Littlewood 函数の変形を使って作ることができたという結果について報告する。

1　はじめに

筆者は、これまで古典群のシューベルト・カルキュラスを中心に、その同変コホモロジー版や同変 K 理論、さらに一般コホモロジーにおける（同変）コホモロジーでのシューベルト・カルキュラスについて考察を進めてきた。特に、シューベルト多項式と呼ばれるシューベルト多様体に対応して定まる“良い基底”を作るということをいくつか試みてきた。簡約代数群やコンパクト群では、Weyl 群が重要な役割を果たしているが、Weyl 群はユニタリ鏡映群の特殊なものと見ることができる。一般のユニタリー鏡映群に対しても同様なシューベルト・カルキュラスにあたるものがないかというのは自然な疑問である。トポロジーの分野では、素数 p に対して、p-コンパクト群という数学的な対象についてそのコホモロジーを調べるということがされていて、その中で $\mathbb{Q}_p$- 鏡映群というものが登場し、それらはユニタリ鏡映群がほぼ対応している。（例えば、文献 [Gr] を参照のこと。）そこで、ユニタリ鏡映群についても同変シューベルト・カルキュラスという枠組みを考えることができるだろうと期待される。実際、O.Oritz は [Or] で、複素鏡映群 $G(r,1,n)$ に対して、GKM 条件を一般化して同変余不変式環のシューベルト基底にあたるものを構成している。しかし n ごとに異なる形の多項式となり、ここで求めようとしている良い基底とはなっていない。一方で、C. McDaniel は [Mc] において、可換環の枠組みで一般のユニタリ鏡映群の同変余不変式環を（別の）GKM 条件の類似で特徴付けた。しかしながら、シューベルト多項式にあたる良い基底を見つけるということについては、まだ、未解決であり今後の課題となっている。

---

* 2018.06.22(金) RIMS 共同研究（公開型）「表現論と代数、幾何、解析をめぐる諸問題」の講演報告集原稿

2 同変コホモロジー環

$G \supset P \supset B \supset T$ を $\mathbb{C}$ 上の reductive 代数群、パラボリック部分群、Borel 部分群、極大トーラスとする。T が代数多様体 X に作用するとき、T-同変のコホモロジー $H_T^*(X)$ を考えることができる。特に、同変シューベルト・カルキュラスでは、旗多様体 G/B や部分旗多様体 G/P に対して、T-同変コホモロジーを考える。$H_T^*(G/B)$ および $H_T^*(G/P)$ には、次に述べる 2 通りの表示が知られている。

2.1 Borel description

$W = N_G(T)/T$ を Weyl 群とする。このとき、G/B の T 同変コホモロジー環 $H_T^*(G/B)_{\mathbb{Q}}$ は、次で表示される。

定理 2.1 (Borel [Bor])

$$H_T^*(G/B)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]/ < f(x) - f(y); f(x) \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]^W >$$

これは、同変余不変式環(equivariant coinvariant algebra) とも呼ばれる。一般の部分旗多様体 G/P の場合の T 同変コホモロジー環 $H_T^*(G/P)_{\mathbb{Q}}$ は P の Weyl 群を W_P として、上記の W_P 不変式の全体になる。すなわち次の同一視ができる。

$$H_T^*(G/P)_{\mathbb{Q}} = H_T^*(G/B)_{\mathbb{Q}}^{W_P}$$

2.2 GKM description

次に、Goresky-Kottwitz-MacPherson による同変コホモロジー環の局所化による特徴付けを述べる。G/B の T-固定点は、W の元 v に対する $e_v = vB/B$ と表される。

標準包含写像を $i_v : e_v \to G/B$ とし、同変コホモロジー環の引き戻し写像を

$$i_v^* : H_T^*(G/B) \to H_T^*(e_v)$$

とする。すべての固定点に対するこの写像の直和 $\Psi := \bigoplus_{v \in W} i_v^*$ を取ると

$$\Psi : H_T^*(G/B) \to \bigoplus_{v \in W} H_T^*(e_v)$$

が作れる。

R^+ を G の正ルートの集合とし、$\alpha \in R^+$ に対する鏡映を $s_\alpha \in W$ とする。

定理 2.2 (Goresky-Kottwitz-MacPherson, [GKM])
Ψ は単射で、像は次で特徴付けられる

$$Im(\Psi) = \{(f_v)_{v\in W} \mid \forall \alpha \in R^+, \forall v \in W,\ \alpha | (f_v - f_{s_\alpha v})\}$$

この右辺の条件を GKM 条件という。この定理により $H_T^*(G/B)$ は、GKM 条件を満たす多項式系 $(f_v)_{v\in W}$ からなる $\bigoplus_{v\in W} H_T^*(e_v)$ の部分環とみなすことができる。

$H_T^*(G/P)$ については、W_P-不変という条件は、$\forall v \in W, \forall x \in W_P, f_v = f_{vx}$ という条件になる。

3 ユニタリ鏡映群

ユニタリ鏡映群については、[LT] に詳しく書かれている。

3.1 Shephard-Todd classification

Shephard-Todd による分類では、既約な有限ユニタリ鏡映群は G_1 から G_{37} に類別される。それぞれ鏡映として作用するベクトル空間 V が定められていて、$\dim V$ をその複素鏡映群のランクという。系列になっているのは、

$G_1 = W(A_n).\ V = \mathbb{C}^n$

$G_2 = G(r,p,n)$ (p は r の約数), $V = \mathbb{C}^n$

$G_3 = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (位数 m の巡回群), $V = \mathbb{C}$

であり、この論文では $W_{r,n} := G(r,1,n) \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$ を主として扱う。$r = 2$ のときは、B_n 型 Weyl 群となる。(C_n 型 Weyl 群とも見れる。) $W_{r,r,n} := G(r,r,n) \simeq (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$ は、$r = 2$ のときは、D_n 型 Weyl 群となる。Schur の P 函数、Q 函数は $r = 2$ のとき P. Pragacz[Pr] により、極大グラスマン多様体のシューベルト多項式となることが知られている。一般の r の場合は、B.Totaro [Tot] により Hall-Littlewood の Q 函数が $W_{r,n}$ の場合に $t = \zeta_r$(1 の原始 r 乗根) とおくことで、ある種のシューベルト多項式の役割を持つだろうという結果がある。本論文の 4 節では、その同変版にあたる内容を定式化してその根拠を示すことが目標となる。

系列になっていないユニタリ鏡映群については、良い基底という意味が不明で、多項式代表としては一意とは限らないが、同変シューベルト・カルキュラスを行うための道具は、McDaniel[Mc] によって得られているので、今後、具体的な多項式代表の構成や交差係数についての公式などを得るための計算や考察が比較的容易になったものと考えられる。

3.2 $G(r,1,n)$ と $G(r,r,n)$

ここでは、主として複素鏡映群 $G(r,1,n)$ について説明する。$G(r,1,n)$ の生成元は、$s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ で、$s_1, \ldots, s_{n-1}$ は、通常の n 次対称群 S_n の生成元と同一視される。s_0 は、位数 r の複素鏡映で、$s_0^r = 1$, $s_0 s_1 s_0 s_1 = s_1 s_0 s_1 s_0$, $s_0 s_i = s_i s_0$ for $i > 1$ を満たす。便宜的に、$t_i, i = 1, 2, \cdots, n$ を、$t_1 = s_0$, $t_i = s_{i-1} t_{i-1} s_{i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ で帰納的に定める。このとき、$w \in G(r,1,n)$ は、$w = t_1^{e_1} \cdots t_n^{e_n} \sigma$ $(0 \leq e_i < r, \sigma \in S_n)$ と一意的に表すことができる。鏡映群としては、$V = \oplus_{i=1}^n \mathbb{C} e_i$ に、自然に作用する形で実現される。すなわち、対称群 S_n は、標準基底 e_i たちの置換で作用し、t_i は、$t_i e_j = e_j$ $(j \neq i)$, $t_i e_i = \zeta_r e_i$ で作用する。($\zeta_r \in \mathbb{C}$ は 1 の原始 r 乗根)$G(r,1,n)$ の複素鏡映 (pseudo-reflection とも言う) は次の 2 種類ある。

(1) t_i^k $(1 \leq i \leq n, 1 \leq k < r)$ 、位数は $\frac{r}{GCD(k,r)}$ (short root e_i が対応)
(2) $t_i^{-k} t_j^k s_{i,j}$ $(1 \leq i < j \leq n, 0 \leq k < r)$、位数は 2 (long root $e_i - \zeta_r^k e_j$ が対応)

ただし、$s_{i,j}$ は i と j の互換とする。

$G(r,r,n)$ は、$G(r,1,n)$ の指数 r の部分群で、$w = t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n} \sigma$ $(0 \leq e_i < r, \sigma \in S_n)$ のうち $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \equiv 0 \mod r$ であるものの全体である。$G(r,r,n)$ の複素鏡映は、(2) の型のみである。

3.3 GKM description for $G(r,1,n)$

O.Ortiz は、[Or] において、複素鏡映群に対する GKM 条件にあたるものを次のように定め、これが同変余不変式環を特徴づけることを示した。

$W := G(r,1,n)$, $S_X := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n], S_Y := \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$, とし、$S(W)$ を、W の複素鏡映全体の集合とする。複素鏡映 s の位数を $|s|$ と表し、s に対応するルートを α_s とする。

$$Z_W := \left\{ F : W \to S_Y \;\middle|\; \sum_{j=0}^{|s|-1} \frac{F(s^j x)}{\zeta^{ij}} \in (\alpha_s)^i S_Y, \quad \begin{array}{l} \text{for } \forall x \in W, \forall s \in S(W), \\ 1 \leq \forall i \leq |s| - 1, \\ \zeta : \text{ primitive } |s|\text{-th root of unity} \end{array} \right\}$$

と定める。

$|s| = 2$ のときは、$\zeta = -1$ なので丁度 GKM 条件に一致していて、これは GKM 条件の自然な拡張であることがわかる。

このとき、次が成立する。

定理 3.1 (Ortiz[Or, Theorem 6.1]) $W = G(r,1,n)$ のとき、次の同型が示される。

$$H_T(W) := S_X \otimes S_Y / < f_X - f_Y \mid f \in S_X^W > \simeq Z_W$$

ここで、f_X は f に $(x_1, \ldots, x_n)$ を代入した多項式、f_Y は f に $(y_1, \ldots, y_n)$ を代入した多項式である。

GKM グラフの一般化として、GKM 超グラフ (hyper graph) を考えることができる。

4 Factorial Hall-Littlewood 函数

以下、$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots)$ を不定元の列とする。

定義 4.1 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ を、正整数列とする。整数 $m \geq \ell$ に対して、

$$HP_\lambda(x_1, \ldots, x_m; t|\mathbf{b}) := \sum_{w \in S_m/(S_1^\ell \times S_{m-\ell})} w \left((x_1|\mathbf{b})^{\lambda_1} \cdots (x_\ell|\mathbf{b})^{\lambda_\ell} \prod_{1 \leq i \leq \ell,\ i<j \leq m} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$HQ_\lambda(x_1, \ldots, x_m; t|\mathbf{b}) := \sum_{w \in S_m/(S_1^\ell \times S_{m-\ell})} w \left((x_1|\mathbf{b})^{[\lambda_1]} \cdots (x_\ell|\mathbf{b})^{[\lambda_\ell]} \prod_{1 \leq i \leq \ell,\ i<j \leq m} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right)$$

と定める。ただし、
$(x|\mathbf{b})^k = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_k)$, $(x|\mathbf{b})^{[k]} = (x - tx)(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_{k-1})$
とする。また、m 次対称群 S_m は、変数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ に、変数の置換で作用するものとする。m 変数であることを、

$$HP_\lambda^{(m)}(\mathbf{x}; t|\mathbf{b}) = HP_\lambda(x_1, \ldots, x_m; t|\mathbf{b}), HQ_\lambda^{(m)}(\mathbf{x}; t|\mathbf{b}) = HQ_\lambda(x_1, \ldots, x_m; t|\mathbf{b})$$

と略記することもある。これらを factorial Hall-Littlewood 函数と呼ぶ。cf. [NN],[N]

定義から、$HQ_\lambda^{(m)}(\mathbf{x}; t|\mathbf{b})$ は、$(1-t)^\ell$ で割り切れて、

$$HQ_\lambda^{(m)}(\mathbf{x}; t|\mathbf{b}) = (1-t)^\ell HP_\lambda^{(m)}(\mathbf{x}; t|0, \mathbf{b})$$

となっていることがわかる。また、$HQ_\lambda^{(m)}(\mathbf{x}; t|\mathbf{b})$ は、変数 x の増加に関して stable である。すなわち $HQ_\lambda(x_1, \ldots, x_m, 0; t|\mathbf{b}) = HQ_\lambda(x_1, \ldots, x_m; t|\mathbf{b})$ が成立して、極限

$$HQ_\lambda(\mathbf{x}; t|\mathbf{b}) = \lim_{m \to \infty} HQ_\lambda^{(m)}(\mathbf{x}; t|\mathbf{b})$$

を定めることができる。しかし、$HP_\lambda^{(m)}(\mathbf{x}; t|\mathbf{b})$ については、注意が必要で $\mathbf{b}$ が付いたままでは、安易に極限は取れない。

例 s_λ をシューア函数とする。

$HP_1(x_1,\dots,x_m;t|\mathbf{b}) = s_1 - \frac{1-t^m}{1-t}b_1$

$HP_{11}(x_1,\dots,x_m;t|\mathbf{b}) = (1+t)\left(s_{11} - b_1\frac{1-t^{m-1}}{1-t}s_1 + b_1^2\frac{1-t^{m-1}}{1-t}\frac{1-t^m}{1-t^2}\right)$

$b_1 = b_2 = \cdots = 0$ のときは、変数 x の個数を無限にできて単に $HP_\lambda(\mathbf{x};t), HQ_\lambda(\mathbf{x};t)$ と表すことができる。$HQ_\lambda(\mathbf{x};t)$ は通常の Hall-Littlewood Q-函数であるが、$HP_\lambda(\mathbf{x};t)$ は通常の Hall-Littlewood P-函数とは異なる。（一般には、分割 λ の成分の重複度に対応する t の多項式が掛かっている。）

4.1　母函数

$A_m(z) := \displaystyle\prod_{k=1}^{m}\frac{z-tx_k}{z-x_k}$ と定める。また、これを用いて

$A_m(z|\mathbf{b})^{(k)} := A_m(z)\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(1-\frac{b_j}{z})$, $\tilde{A}_m^p(z|\mathbf{b})^{(k)} := \frac{t^m}{1-t} + \frac{1}{1-t}(A_m(z)-t^m)\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(1-\frac{b_j}{z})$

とおく。$(A_m(z|\mathbf{b})^{(0)} = A_m(z)$ である)。この時、m 変数の Factorial Hall-Littlewood 函数 $HQ_\lambda^{(m)}(\mathbf{x};t|\mathbf{b})$, $HP_\lambda^{(m)}(\mathbf{x};t|\mathbf{b})$ は次の母函数表示を持つ。

定理 4.2　([NN],[N],[N18+])

$m \geq \ell$ で $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)$ を正整数列とすると、

$$HQ_\lambda(x_1,\dots,x_m;t|\mathbf{b}) = [z^{-\lambda}]\left(A_m(z_1|\mathbf{b})^{(\lambda_1-1)}\cdots A_m(z_\ell|\mathbf{b})^{(\lambda_\ell-1)}\prod_{1\leq i<j\leq \ell}\frac{z_j-z_i}{z_j-tz_i}\right),$$

$$HP_\lambda(x_1,\dots,x_m;t|\mathbf{b}) = [z^{-\lambda}]\left(\tilde{A}_m(z_1|\mathbf{b})^{(\lambda_1)}\cdots \tilde{A}_m(z_\ell|\mathbf{b})^{(\lambda_\ell)}\prod_{1\leq i<j\leq \ell}\frac{z_j-z_i}{z_j-tz_i}\right).$$

ここで、$z^{-\lambda} = z_1^{-\lambda_1}\cdots z_\ell^{\lambda_\ell}$ で、$[z^{-\lambda}]\,(f(z_1,\dots,z_r))$ は、形式 Laurent べき級数 $f(z_1,\dots,z_\ell)$ の $z^{-\lambda}$ の係数を取り出すことを表す。

この定理からすぐわかるように、$HQ_\lambda^{(m)}(\mathbf{x};t|\mathbf{b})$, $HP_\lambda^{(m)}(\mathbf{x};t|\mathbf{b})$ は、t に 1 の原始 r 乗根 ζ_r を代入するとr-cancellableの性質を持つ。すなわち、任意の a に対して次を満たす。

$$HQ_\lambda(a^r(\zeta_r),x_{r+1},\dots,x_m;\zeta_r|\mathbf{b}) = HQ_\lambda(0^r(\zeta_r),x_{r+1},\dots,,x_m;\zeta_r|\mathbf{b})$$
$$HP_\lambda(a^r(\zeta_r),x_{r+1},\dots,x_m;\zeta_r|\mathbf{b}) = HP_\lambda(0^r(\zeta_r),x_{r+1},\dots,,x_m;\zeta_r|\mathbf{b})$$

この性質を使うと、$t=\zeta_r$ のときは $HP_\lambda^{(m)}(\mathbf{x};t|\mathbf{b}))$ について x 変数の個数を r ずつ増やして無限大にできる。

$$HP_\lambda(\mathbf{x};\zeta_r|\mathbf{b})) := \lim_{k\to\infty} HP_\lambda^{(kr)}(\mathbf{x};\zeta_r|\mathbf{b}))$$

x が無限変数のとき、$p_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$ をべき和対称関数として、

$$\Gamma_{(r)} := \mathbb{C}[p_k]_{k\in\{1,2,3,\ldots\}\setminus\{r,2r,3r,\ldots\}} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \ldots p_{r-1}, p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_{2r-1}, p_{2r+1}, \ldots]$$

と定めると、$\{HP_\lambda(\mathbf{x};\zeta_r)\}_{\lambda\in P_{(r)}}$ および $\{HQ_\lambda(\mathbf{x};\zeta_r)\}_{\lambda\in P_{(r)}}$ は $\mathbb{C}$ 上の基底になることが知られている。ここで、$P_{(r)}$ は、r-regular な分割全体の集合であり、分割 λ が r-regular であるとは、成分の重複度が全て r 未満となっていることである。[Mac, P.249, Example 7]

4.2 vanishing property

定義 4.3 分割 ν に対して、$m_i(\nu)$ は、分割 ν の中の成分が i に等しいものの個数 (重複度) とする。この時、

$$\mathbf{b}_\nu(t) = (\mathbf{b}_{\nu_1}^{m_{\nu_1}(\nu)}(t), \ldots, \mathbf{b}_2^{m_2(\nu)}(t), \mathbf{b}_1^{m_1(\nu)}(t))$$

と定める。ただし、$\mathbf{b}_i^j(t) = (b_i, tb_i, \ldots, t^{j-1}b_i)$ とする。$j=0$ の時は、$\mathbf{b}_i^0(t) = ()$ とする。

例）$\mu = (5,5,5,4,1,1)$ の時、
$\mathbf{b}_\mu(t) = (b_5, tb_5, t^3b_5, b_4, b_1, tb_1), \mathbf{b}_{\mu+1^7}(t) = (b_6, tb_6, t^2b_6, b_5, b_2, tb_2, b_1)$ である。

命題 4.4 λ, μ を長さが m 以下の分割とし、$\hat{\mu} = \mu + 1^m = (\mu_1+1, \mu_2+1, \ldots, \mu_m+1)$ とおく。x が m 変数の factorial Hall-Littlewood 関数 $HQ_\lambda^{(m)}(\mathbf{x};t|\mathbf{b})$ と $HP_\lambda^{(m)}(\mathbf{x};t|\mathbf{b})$ は、次の性質を持つ。

(1) $\mu \not\supset \lambda$ のとき、$HQ_\lambda^{(m)}(\mathbf{b}_\mu(t), 0, \ldots, 0; t|\mathbf{b}) = 0, HP_\lambda^{(m)}(\mathbf{b}_{\hat{\mu}}(t); t|\mathbf{b}) = 0$ である。

(2) $\mu = \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ のとき、

$$HQ_\lambda^{(m)}(\mathbf{b}_\lambda(t), 0, \ldots, 0; t|\mathbf{b}) = \prod_{j=1}^{\lambda_1} \prod_{k=1}^{m_j(\lambda)} \left(\prod_{\ell=1}^{j} (t^{k-1}b_j - t^{m_\ell(\lambda)}b_\ell) \right),$$

$$HP_\lambda^{(m)}(\mathbf{b}_{\hat{\lambda}}(t); t|\mathbf{b}) = \prod_{j=2}^{\hat{\lambda}_1} \prod_{k=1}^{m_j(\hat{\lambda})} \left(\frac{1-t^k}{1-t} \prod_{\ell=1}^{j-1} (t^{k-1}b_j - t^{m_j(\hat{\lambda})}b_\ell) \right)$$ である。

証明は、[IN, Prop. 7.1] などと同様に、定義式から簡単に示すことができる。cf.[N18+]

4.3 代数的局所化写像

ここでは、代数的局所化写像を定める。我々は、安定な多項式で Schubert 類にあたるものを記述したい。そのために、古典 Lie 群の場合で考えたの ([IMN],[IN]) と同様に、n を無限大にした状況で局所化写像を作る。

$W_\infty^C = G(r,1,\infty) = \bigcup_n G(r,1,n)$, $W_\infty^D = G(r,r,\infty) = \bigcup_n G(r,r,n)$ とおく。また、$S_\infty := \bigcup_n S_n$, $R_\infty := \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_n, \ldots]$ とし、$\zeta = \zeta_r$ を 1 の原始 r 乗根とする。

R_∞-limear な写像（代数的局所化写像）Φ^C および Φ^D を、以下で定める。

$$\Phi^C : \Gamma_{(r)} \otimes R_\infty \to \bigoplus_{v \in W^C_\infty / S_\infty} R_\infty, \;\; \Phi^D : \Gamma_{(r)} \otimes R_\infty \to \bigoplus_{v \in W^D_\infty / S_\infty} R_\infty$$

Φ^C は $v \in W^C_\infty/S_\infty$ において $f \in \Gamma^{(r)}$ に対して、$\Phi^C_v(f(x_1, x_2 \ldots,)) = f(\mathbf{b}_v(\zeta), 0, 0, \ldots)$,
Φ^D は $v \in W^D_\infty/S_\infty$ において $f \in \Gamma^{(r)}$ に対して、$\Phi^D_v(f(x_1, x_2 \ldots,)) = f(\mathbf{b}_v(\zeta), 0, 0, \ldots)$
で定める。ここで、$v = t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots t_n^{m_n} \in W^C_\infty/S_\infty$, $(0 \le m_i < r)$ のとき、

$$\mathbf{b}_v(\zeta) = (\mathbf{b}_1^{m_1}(\zeta), \mathbf{b}_2^{m_2}(\zeta), \cdots, \mathbf{b}_n^{m_n}(\zeta))$$

と定める。ただし、$\mathbf{b}_i^k(\zeta) = (b_i, b_i\zeta, \cdots, b_i\zeta^{k-1})$ とする。$\mathbf{b}_i^0(\zeta) = ()$ である。

Φ^D は Φ^C を部分群に制限したものといっても良い。ここでは、どちらも天下り的に代数的局所化として定義したが、幾何学的な根拠もある程度は説明できるはずのものである。

定理 4.5　Φ^C および Φ^D は、単射で、それらの像は、Ortiz の GKM 条件を満たす多項式系の全体と一致する。

証明は、基本的に [IMN] や [IN] で行ったのと同様の議論により示す。像が GKM 条件を満たすことは写像が環準同型 (R_∞-代数の準同型) ということから、$\Gamma_{(r)}$ の生成元であるべき和対称式の像が GKM 条件を満たすことを各 type(1),(2) の複素鏡映について確認すればよい。あるいは、$HP_\lambda(\mathbf{x};\zeta)$ や $HQ_\lambda(\mathbf{x};\zeta)$ の母函数表示から、1 行の場合 ($A_\infty(z)_{t=\zeta}$の各 z^{-k} の係数) について確認することでも示せる。像が Ortiz の GKM 条件を満たす多項式系の全体に一致する事は、命題 4.4 の vanishing property を用いて、分割の包含に関する半順序に従って帰納的に GKM 条件を満たす全空間を張ることを示す。

この代数的局所化写像を用いることで、factorial HP,HQ が Grassmann にあたる場合のシューベルト多項式の類似物となることがわかる。

4.4　r-regular partition と coset の対応、主定理

$P^{(n)}_{(r)}$ を最大の成分が n 以下であるような r-regular partition の全体の集合とする。すなわち、$\lambda \in P^{(n)}_{(r)}$ なら $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell) = (n^{m_n}, (n-1)^{m_{n-1}}, \ldots, 1^{m_1})$ で、$0 \le m_i < r$, $(1 \le i \le n)$ となっている。ただし、$k^j = (k, k, \ldots, k)$ で長さ j で成分が全て k の列とし $k^0 = ()$ は、空列とみなす。

この集合 $P^{(n)}_{(r)}$ は自然に、coset 集合 $G(r,1,n)/S_n$ とのの間に 1 対 1 の対応がつく。

$$v = t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots t_n^{m_n} \in G(r,1,n)/S_n \text{ に対して、 } \lambda(v) = (n^{m_n}, (n-1)^{m_{n-1}}, \ldots, 1^{m_1})$$

$G(r,r,n)$ については、coset 集合 $G(r,r,n)/S_n$ は、$P^{(n-1)}_{(r)}$ に、1 対 1 の対応がつく。

$v = t_1^{m_1} t_2^{m_2} \cdots t_n^{m_n} \in G(r,r,n)/S_n$ なら $m := m_1 + m_2 + \cdots m_n$ は r の倍数であり、

$\check{\lambda}(v) = ((n-1)^{m_n}, (n-2)^{m_{n-1}}, \ldots, 0^{m_1})$ を対応させる。以下、これらの同一視をする。

定理 4.6　$m \geq (r-1)n$ とする。($G(r,r,n+1)$ のときは、さらに m は r の倍数とする。)

(1) $\{HQ^{(m)}_\lambda(\mathbf{x};\zeta_r|\mathbf{b})\}_{\lambda \in P^{(n)}_{(r)}}$ は、同変余不変式環 $H_T(W_{r,n})^{S_n}$ の基底とみなせる。

(2) $\{HP^{(m)}_\lambda(\mathbf{x};\zeta_r|\mathbf{b})\}_{\lambda \in P^{(n)}_{(r)}}$ は、同変余不変式環 $H_T(W_{r,r,n+1})^{S_{n+1}}$ の基底とみなせる。

証明は、定理 4.5 を用いて有限の n の $G(r,1,n)/S_n, G(r,r,n+1)/S_{n+1}$ に落とすことで示される。vanishing property により、(定数倍を除いて) シューベルト基底と考えて良い。

5　p-compact 群

p-compact 群は、ホモトピー Lie 群とも呼ばれ、素数 p に対して定まる。分類結果として、連結 p-compact 群は、p 進整数環上の root data と 1 対 1 に対応する。極大トーラス T や Weyl 群 W にあたるものも考えられている。有限 H 空間として考えられたもので、有限 CW 複体とホモトピー同値な空間である。例えば、$G(r,1,n)$ を Weyl 群とする p-compact 群は、1972 年に D.Quillen によって作られた。cf.[Gr]

6　今後の課題等

今回の結果は、シューベルト・カルキュラスという特殊なテーマが主となったが、この内容は、ユニタリー鏡映群や小池-有木代数の表現論とも関連している。また、Calogero-Sutherland 系や Cherednik 代数などとの関係もあるはずである。ここで、説明した結果や手法が別の問題解決などへと発展できる可能性もあると思われる。一方、シューベルト・カルキュラスの枠組みとしては、まず一般コホモロジーの場合に拡張することが考えられる。これについては、ほぼ自然に一般化される見込みで、さらにトポロジー的な視点から説明なども含めて中川氏との共同研究として進めてゆく予定である。グラスマン多様体にあたる場合 W/W_P の場合は、係数を $\mathbb{Z}[\zeta_r]$ に落とせる可能性がある。(ただし、HP_λ は、修正が必要。) また、W の全ての要素に対する両側シューベルト多項式を作る課題については、[IMN] に類似の方法で実現できる可能性が見えてきた。(少なくとも予想の定式化はほぼできている。) これらついては、準備中の論文 [N18+] に詳しく書く予定である。

謝辞

p-compact 群などのトポロジーの分野に関係する事について筆者に教示して頂いた、岡山大学の中川征樹氏に深く感謝致します。本研究は JSPS 科研費 JP16H03921 の助成を受けたものです。

参考文献

[Bor] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math. 57(2) (1953) 115–207.

[GKM] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem, Invent. Math. 131 (1998), 25–83.

[Gr] J. Grodal, The Classification of p-compact Groups and Homotopical Group Theory, Proc. Intl. Congress of Mathematicians 2010 (Hyderabad, 2010), Volume II, 973–1001.

[IMN] T. Ikeda, L. Mihalcea and H. Naruse , Double Schubert polynomials for the classical groups, Adv. Math. 226 (2011), no. 1, 840–886.

[IN] T. Ikeda and H. Naruse, K-theoretic analogues of factorialSchur P- and Q- functions, Adv. Math. 243 (2013), no. 1, 22–66.

[LT] G.I. Lehrer and D.E. Taylor, Unitary Reflection Groups, Cambridge UP,2009.

[Mac] I.G. MacDonald, Symmetric functions and Hall polynomials, second ed. Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[Mc] C. McDaniel, A GKM description of the equivariant coinvariant ring of a pseudo reflection group, arXiv:1609.00849v1.

[NN] M. Nakagawa and H. Naruse, Generating functions for the universal Hall-Littlewood P- and Q-functions, arXiv:1705.04791v2 Sun, 22 Jul 2018.

[N] H. Naruse, Elementary proof and application of the generating function for generalized Hall-Littlewood functions, J. Algebra 516 (2018), 197–209.

[N18+] H. Naruse, Doube Schubert polynomials for the complex reflection groups, in preparation.

[Or] O. Ortiz, GKM theory for p-compact groups, J. Algebra 427 (2015), 426–454.

[Pr] P. Pragacz, Algebro-geometric applications of Schur S- and Q- polynomials, in Séminaire d' Algèbre Dubreil-Malliavin 1989–1990, Springer Lecture Notes in Math. 1478 (1991), 130–191.

[ST] G.C. Shephard and J.A. Todd, Finite unitary reflection groups, Canadian J. Math. 6 (1954), 274–304.

[Tot] B. Totaro, Towards a Schubert calculus for complex reflection groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 134 (2003), 83–93.