数理解析研究所講究録 第2104巻 2019年 29-37

複数の零点を指定した場合の最近接多項式
—2重根を持つ場合—
The nearest polynomial with two or more given zeros
—The case where a double root is given—

北見 宗士
SOSHI KITAMI
東京理科大学大学院
GRADUATE SCHOOL, TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE *

関川 浩
HIROSHI SEKIGAWA
東京理科大学
TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE †

Abstract

与えられた 1 変数実係数多項式 f と実数 z に対し, z を 2 重根として持つ最近接多項式 $\tilde{f}$ の構成法および f と $\tilde{f}$ の間の距離を表す式を与える．ただし，距離は 2 ノルムで測るものとする．

Abstract

For a given real univariate polynomial f and a real number z, we give a construction method of the nearest polynomial $\tilde{f}$ with a double root at z and a distance formula between f and $\tilde{f}$, where the distance is measured by 2-norm.

1 はじめに

最近接多項式とは, ある性質を満たす多項式の中で, 与えられた多項式に最も近いものである. 観測データや計算の誤差などによって係数がずれ, 本来の性質をみたさなくなった多項式を復元するときなどに利用される. 注目する性質は, 与えられた点で零点をもつこと, 重複零点をもつこと, 多項式が 2 本以上の場合に最大公約多項式が 1 次以上であること, などが挙げられる [1]. 本論文では, 重複零点をもつ, という性質を取り上げ, 相異なる 2 つの零点を指定した場合にすでに知られている結果を, 重複零点を指定した場合に拡張する.

本論文の構成は次の通りである. 第 2 章では最近接多項式の定義をし, 先行研究である零点を 1 つ指定した場合の Stetter の定理, 相異なる零点を 2 つ指定した場合の櫻井の結果, そして櫻井の結果を簡潔に表現した朝田の結果について説明する. 第 3 章ではまず, 櫻井の方法を重複零点の場合に拡張し, 与えられた多項式と最近接多項式との距離を表す式 (以後, 距離公式と呼ぶ) を導出する. 次に, 櫻井の距離公式において 1 つの零点を他方の零点に近づけた際の極限を考える. その結果, 導出した距離公式と極限値が一致することを述べる. また, 導出した距離公式をより簡潔な表現に改める. 最後にまとめと今後の課題について述べる.

*1416604@alumni.tus.ac.jp
†sekigawa@rs.tus.ac.jp

2　先行研究

この章では, 先行研究である Stetter の定理, 櫻井および朝田の結果について説明する.

2.1　最近接多項式の定義

以下, K は複素数体 $\mathbb{C}$ または実数体 $\mathbb{R}$ とする. $\mathbb{P}_n$ を高々n 次の K 係数 1 変数多項式全体がなす K 上の線形空間 ($n+1$ 次元) とし, 多項式 $f=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{P}_n$ に対する $\mathbb{P}_n$ 上のノルム $\|f\|$ は, 係数ベクトル $(a_0,\ldots,a_n)$ のノルム $\|(a_0,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}\|$ とする. ただし, $(a_0,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}$ は $(a_0,\ldots,a_n)$ の転置を表す. このとき, 最近接多項式を以下で定義する.

定義 1 (最近接多項式)
相異なる z_j を重複度 m_j 以上の零点とする多項式のうち ($j=1,\ldots,s$), $\|\tilde{f}-f\|$ が最小となる $\tilde{f}\in\mathbb{P}_n$ を零点 $z_1,\ldots,z_s$, 重複度 $m_1,\ldots,m_s$ に関する $f\in\mathbb{P}_n$ の最近接多項式という.

この設定のもとで最近接多項式は必ず存在することに注意. ただし, 一意性は保証されない.

例 1
ノルムは ∞ ノルムとし (定義 3 参照), $n\geq 2$ とする. $\tilde{f}\in\mathbb{P}_n$ が, 零点 0, 重複度 2 に関する $f=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\in\mathbb{P}_n$ の最近接多項式のとき, $\|\tilde{f}-f\|_\infty=\max(|a_0|,|a_1|)$ である (この値を d とおく). よって, $(a_0,a_1)\neq(0,0)$ のとき $g=\sum_{j=2}^{n} b_j x_j\in\mathbb{P}_n$ ($|b_j-a_j|\leq d$) は 0 を重複度 2 以上の零点としてもち, $\|g-f\|_\infty=d$ だから, g も f の最近接多項式である. すなわち, この場合, 最近接多項式は無限に存在する.

2.2　Stetter の定理

零点を 1 つ指定した場合, 最近接多項式について Stetter の定理が知られている. まず双対ノルムを定義する.

定義 2 (双対ノルム)
$\|\cdot\|$ を K^m 上のノルム, $\boldsymbol{v}\in K^m$ とする. 以下の $\|\cdot\|^*$ を $\|\cdot\|$ の双対ノルムという.

$$\|\boldsymbol{v}\|^* := \sup_{\boldsymbol{u}\in K^m,\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}} \frac{|\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}|}{\|\boldsymbol{u}\|} = \sup_{\boldsymbol{u}\in K^m,\|\boldsymbol{u}\|=1} |\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}|$$

双対ノルムの双対はもとのノルムにもどることに注意 ($\|\boldsymbol{u}\|^{**} := \sup_{\boldsymbol{v}\in K^m,\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}} \frac{|\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}|}{\|\boldsymbol{v}\|^*} = \|\boldsymbol{u}\|$).

定義 3 (p ノルム)
$1\leq p\leq\infty$ をみたす p に対し, K^m 上の p ノルム $\|\cdot\|_p$ を以下のように定義する.

$$\|(x_1,\ldots,x_m)^{\mathrm{T}}\|_p := \begin{cases} \sqrt[p]{|x_1|^p+\cdots+|x_m|^p} & (1\leq p<\infty) \\ \max(|x_1|,\ldots,|x_m|) & (p=\infty) \end{cases}$$

p と q の関係を $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ($1\leq p,q\leq\infty$) とするとき, $(\|\cdot\|_p)^*=\|\cdot\|_q$ が成立する. ただし, $\dfrac{1}{\infty}=0$, $\dfrac{1}{0}=\infty$ とみなす.

与えられた多項式を $f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}_n$ とする. 多項式 $g(x)=\sum_{j=0}^{n}(a_j+\Delta a_j)x^j=(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}_n$ に対して, $s=1$, $m_1=1$ の場合, 以下の定理が成り立つ. ただし, $\boldsymbol{a}=(a_0,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}$, $\Delta\boldsymbol{a}=(\Delta a_0,\ldots,\Delta a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}=(1,x,x^2,\ldots,x^n)^{\mathrm{T}}$ とする.

定理 1 (Stetter の定理 [1])
$f \in \mathbb{P}_n$ と定数 $z \in K$ が与えられたとき, $g \in \mathbb{P}_n$ が $g(z)=0$ をみたすならば以下の不等式が成立する.

$$\|\Delta \boldsymbol{a}\| \geq \frac{|f(z)|}{\|\mathbf{z}\|^*}$$

ただし, $\mathbf{z}=(1, z, z^2, \ldots, z^n)^{\mathrm{T}}$ とする. また, $\|\Delta \boldsymbol{a}\| = \|g-f\|$ となることに注意. さらに, 等号が成立する多項式 $\tilde{f}$ が存在し, これが零点 z, 重複度 1 に関する f の最近接多項式である.

2.3 櫻井の結果

ここでは $K=\mathbb{R}$, 2 ノルムに限定する. なお, 2 ノルムの双対ノルムもまた 2 ノルムになる. 2 ノルムの場合, 最近接多項式が一意であることは容易に示せる. 相異なる 2 つの零点を指定し, 重複度をそれぞれ 1 以上としたとき ($s=2$, $m_1=m_2=1$), 次の定理が成り立つ.

定理 2 (櫻井 [2])
$f \in \mathbb{P}_n$, 定数 $z_1 \neq z_2 (\in \mathbb{R})$ が与えられたとき, $g \in \mathbb{P}_n$, $g(z_1)=g(z_2)=0$ ならば以下の不等式が成り立つ.

$$\|g-f\|_2 \geq \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{n}(z_2^j f(z_1) - z_1^j f(z_2))^2}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}(z_1^j z_2^j (z_1^k - z_2^k))^2}}. \tag{1}$$

g が零点 z_1, z_2, 重複度 1, 1 に関する f の最近接多項式のとき等号が成立する.

2.4 朝田の結果

2.3 と同じ条件のもとで, 櫻井の結果を簡潔な形に表したものが以下の式である.

定理 3 (朝田 [3])
$\mathbf{z}_1=(1, z_1, z_1^2, \ldots, z_1^n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{z}_2=(1, z_2, z_2^2, \ldots, z_2^n)^{\mathrm{T}}$ とし, 零点 z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$, 重複度 1, 1 に関する $f \in \mathbb{P}_n$ の最近接多項式を $\tilde{f}$ とする. このとき次式が成立する.

$$\|\tilde{f}-f\|_2 = \frac{\|f(z_1)\mathbf{z}_2 - f(z_2)\mathbf{z}_1\|_2}{\sqrt{\|\mathbf{z}_1\|_2^2\ \|\mathbf{z}_2\|_2^2 - (\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2)^2}}.$$

ここで, 分母は $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ で決まる平行四辺形の面積であることに注意.

3 主結果

この章では多項式は実係数 ($K=\mathbb{R}$), ノルムは 2 ノルムに限り, 零点 1 つ, 重複度 2 以上の場合を扱う.

3.1 距離公式の導出

高々 n 次の実係数 1 変数多項式全体がなす $n+1$ 次元の実線形空間 $\mathbb{P}_n$ 上で内積を次のように定義する.

定義 4 (内積)
$f(x)=a_n x^n + \cdots + a_0$, $g(x)=b_n x^n + \cdots + b_0 \in \mathbb{P}_n$ に対して, f と g の内積を以下のように定義する.

$$f \cdot g = (a_0, \ldots, a_n) \cdot (b_0, \ldots, b_n) = a_0 b_0 + \cdots + a_n b_n.$$

なお, 2 ノルム $\|\cdot\|_2$ はこの内積から誘導される.

[2] の計算法にそって距離公式を導く. 指定された重複度 2 以上の零点 z_1 を持つような高々 n 次の実係数 1 変数多項式全体は, $\mathbb{P}_n$ の $n-1$ 次元の実線形部分空間をなす. これを V_1 とし, V_2 を V_1 の直交補空間とするとき, $\mathbb{P}_n = V_1 \oplus V_2$ と直和分解で表すことができる. $f \in \mathbb{P}_n$ は $f = f_1 + f_2$ $(f_1 \in V_1,\ f_2 \in V_2)$ と一意に書くことができる. このとき, f_1 は最近接多項式となり, f_2 のノルムを表す式が距離公式となる.

$\mathbb{P}_n, \mathbb{P}_{n-2}$ の基底をそれぞれ $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-2}\}$ ととる. 線形写像 $h \mapsto (x-z_1)^2 h$ $(h \in \mathbb{P}_{n-2})$ によって $\mathbb{P}_{n-2}$ と V_1 は同型であるので, V_1 の基底 $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_{n-1}}\}$ を次のようにとる. なお, 以下では多項式とその係数ベクトルを同一視する.

$$\boldsymbol{v_i} = ((x-z_1)^2 x^{i-1} \text{の係数ベクトル})$$

V_2 の基底を $\{\boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_{n+1}}\}$, $\boldsymbol{v_n} = (s_0, s_1, \ldots, s_n)$, $\boldsymbol{v_{n+1}} = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ とすると, V_1 の基底と直交することから, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対し,

$$\boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{v_n} = s_{i+1} - 2z_1 s_i + z_1^2 s_{i-1} = 0,$$
$$\boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{v_{n+1}} = t_{i+1} - 2z_1 t_i + z_1^2 t_{i-1} = 0.$$

初期値を $s_0 = 0, s_1 = 1$ と $t_0 = -1, t_1 = 0$ として, この関係式より

$$\boldsymbol{v_n} = (0, 1, 2z_1, \ldots, nz_1^{n-1}), \tag{2}$$
$$\boldsymbol{v_{n+1}} = (-1, 0, z_1^2, \ldots, (n-1)z_1^n). \tag{3}$$

が成り立つ.

$f(x)$ を $(x-z_1)^2$ で割り, 商を $q(x)$, 剰余を $sx+t$ とする. つまり, $f(x) = (x-z_1)^2 q(x) + sx + t$. 剰余を $sx + t = g_1 + g_2$ $(g_1 \in V_1,\ g_2 \in V_2)$ と分解すると $f_2 = g_2$ である. f を x について微分すると, $f'(x) = 2(x-z_1)q(x) + (x-z_1)^2 q'(x) + s$ であるから, s, t は

$$s = f'(z_1), \qquad t = f(z_1) - z_1 f'(z_1),$$

である. $sx+t$ の係数ベクトルを $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{n+1}}$ の線形結合で表す.

$$(t, s, 0, \ldots, 0) = c_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + c_{n+1} \boldsymbol{v_{n+1}} \tag{4}$$

このとき, z_1 に関する f の最近接多項式 $\tilde{f} = f - (c_n \boldsymbol{v_n} + c_{n+1} \boldsymbol{v_{n+1}})$ $(= f_1)$ であり, f との距離

$$\|\tilde{f} - f\|_2 = \|c_n \boldsymbol{v_n} + c_{n+1} \boldsymbol{v_{n+1}}\|_2 \ (= \|f_2\|_2) \tag{5}$$

である.

また, (4) 式の両辺と $\boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_{n+1}}$ の内積を取ることにより, c_n, c_{n+1} は以下のように表すことができる.

$$c_n = -\frac{(\boldsymbol{v_{n+1}} \cdot \boldsymbol{v_{n+1}})s + (\boldsymbol{v_n} \cdot \boldsymbol{v_{n+1}})t}{(\boldsymbol{v_n} \cdot \boldsymbol{v_{n+1}})^2 - (\boldsymbol{v_n} \cdot \boldsymbol{v_n})(\boldsymbol{v_{n+1}} \cdot \boldsymbol{v_{n+1}})},$$
$$c_{n+1} = \frac{(\boldsymbol{v_n} \cdot \boldsymbol{v_{n+1}})s + (\boldsymbol{v_n} \cdot \boldsymbol{v_n})t}{(\boldsymbol{v_n} \cdot \boldsymbol{v_{n+1}})^2 - (\boldsymbol{v_n} \cdot \boldsymbol{v_n})(\boldsymbol{v_{n+1}} \cdot \boldsymbol{v_{n+1}})}.$$

c_n, c_{n+1} を上記の距離の式 (5) に代入して以下を得る.

$$\|\tilde{f} - f\|_2 = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^{n} (j z_1^{j-1} f(z_1) - z_1^j f'(z_1))^2}{\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} (k z_1^{2j} z_1^{k-1})^2}}. \tag{6}$$

Mathematica を用いて上記過程の検算および簡略化を行なった (図 1). 以上をまとめて定理 4 が得られる.

定理 4
$\tilde{f}\in\mathbb{P}_n$ を重複度 2 以上の重複零点 $z_1\in\mathbb{R}$ に関する $f\in\mathbb{P}_n$ の最近接多項式とする.

- $z_1\neq\pm1$ のとき

$$\|\tilde{f}-f\|_2=\sqrt{\frac{\nu}{\delta}}.$$

ここで,

$$\begin{aligned}\nu=&(z_1^2-1)((n^2z_1^{2n+4}-(2n^2+2n-1)z_1^{2n+2}+(n+1)^2z_1^{2n}-z_1^2-1)f(z_1)^2\\&-2z_1(z_1^2-1)(nz_1^{2n+2}-(n+1)z_1^{2n}+1)f(z_1)f'(z_1)\\&+(z_1^2-1)^2(z_1^{2n+2}-1)f'(z_1)^2),\\\delta=&((z_1^{2n+2}-1)+(n+1)(z_1^2-1)z_1^n)((z_1^{2n+2}-1)-(n+1)(z_1^2-1)z_1^n).\end{aligned}$$

- $z_1=\pm1$ のとき

$$\|\tilde{f}-f\|_2=\sqrt{\frac{2n(2n+1)f(z_1)^2\mp12nf(z_1)f'(z_1)+12f'(z_1)^2}{n(n+1)(n+2)}}.$$

3.2 極限値

定理 2 で示した (1) 式の右辺において z_2 を z_1 に近づけた極限値が, 定理 4 で示した式と一致することを述べる. そのままでは $\frac{0}{0}$ 形の不定形なので, 極限値を計算するために, (1) 式の右辺根号内の分子, 分母を以下のように変形する.

$$\begin{aligned}(\text{分子})&=\sum_{j=0}^{n}(z_2^jf(z_1)-z_1^jf(z_2))^2\\&=(z_2-z_1)^2\sum_{j=0}^{n}\frac{(z_2^jf(z_1)-f(z_2)z_2^j+f(z_2)z_2^j-z_1^jf(z_2))^2}{(z_2-z_1)^2}\\&=(z_2-z_1)^2\sum_{j=0}^{n}\left(-z_2^j\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}+f(z_2)\frac{z_2^j-z_1^j}{z_2-z_1}\right)^2\\&=(z_2-z_1)^2\sum_{j=0}^{n}\left(-z_2^j\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}+f(z_2)\sum_{l=1}^{j}z_2^{j-l}z_1^{l-1}\right)^2,\\(\text{分母})&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(z_1^jz_2^j(z_1^k-z_2^k)\right)^2\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(z_1^jz_2^j(z_2^k-z_1^k)\right)^2\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(z_1^jz_2^j(z_2-z_1)\sum_{l=1}^{k}z_2^{k-l}z_1^{l-1}\right)^2\\&=(z_2-z_1)^2\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(z_1^jz_2^j\sum_{l=1}^{k}z_2^{k-l}z_1^{l-1}\right)^2,\end{aligned}$$

したがって, z_2 を z_1 に近づけると, $\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}$ が $f'(z_1)$ になることに注意して,

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=0}^{n}\left(-z_2^j\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}+f(z_2)\sum_{l=1}^{j}z_2^{j-l}z_1^{l-1}\right)^2}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(z_1^jz_2^j\sum_{l=1}^{k}z_2^{k-l}z_1^{l-1}\right)^2} &\longrightarrow \frac{\sum_{j=0}^{n}\left(-z_1^jf'(z_1)+f(z_1)\sum_{l=1}^{j}z_1^{j-l}z_1^{l-1}\right)^2}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(z_1^{2j}\sum_{l=1}^{k}z_1^{k-l}z_1^{l-1}\right)^2} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{n}\left(-z_1^jf'(z_1)+f(z_1)\sum_{l=1}^{j}z_1^{j-1}\right)^2}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\left(z_1^{2j}\sum_{l=1}^{k}z_1^{k-1}\right)^2} \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{n}(jz_1^{j-1}f(z_1)-z_1^jf'(z_1))^2}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}(kz_1^{2j}z_1^{k-1})^2}
\end{aligned}
$$

となり, (6) 式の根号内を得る. この式を簡略化したものが定理 4 となることに注意. なお, Mathematica を用いて極限値を計算することもできる (図 2).

3.3 簡潔な距離公式

定理 4 を朝田の方法にそって書き直す. $\mathbf{z}_1=(1,z_1,\dots,z_1^n)$, $\mathbf{z}_1'=(0,1,\dots,nz_1^{n-1})$ とする. 任意の $g\in V_1$ に対し,

$$
g\cdot\mathbf{z}_1=g(z_1)=0,\qquad g\cdot\mathbf{z}_1'=g'(z_1)=0
$$

なので, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_1'\in V_2$ である. ここで, (2), (3) 式より, 以下の式が成り立つ.

$$
\boldsymbol{v_n}=\mathbf{z}_1',\qquad \boldsymbol{v_{n+1}}=z_1\mathbf{z}_1'-\mathbf{z}_1.
$$

これを c_n, c_{n+1} の式に代入し, (5) 式を計算すると, 以下の定理 5 を得る.

定理 5
$\mathbf{z}_1=(1,z_1,z_1^2,\dots,z_1^n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{z}_1'=(0,1,z_1,\dots,nz_1^{n-1})^{\mathrm{T}}$ とし, $\tilde{f}\in\mathbb{P}_n$ が重複度 2 以上の重複零点 $z_1\in\mathbb{R}$ に関する $f\in\mathbb{P}_n$ の最近接多項式のとき, 次式が成立する.

$$
\|\tilde{f}-f\|_2=\frac{\|f'(z_1)\mathbf{z}_1-f(z_1)\mathbf{z}_1'\|_2}{\sqrt{\|\mathbf{z}_1\|_2^2\ \|\mathbf{z}_1'\|_2^2-(\mathbf{z}_1\cdot\mathbf{z}_1')^2}}.
$$

ここで, 分母は $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_1'$ で決まる平行四辺形の面積であることに注意.

4 おわりに

実係数 1 変数多項式, 重複度 2 以上の実零点を指定した場合かつ 2 ノルムの条件下で, 櫻井の結果を拡張することができた. 加えて, 朝田の定理と同様にベクトルを用いた簡潔な表現に改めた.

本研究の今後の課題について述べる. 今回は実係数, 実零点に限って研究を進めてきた. しかし, 複素係数 1 変数多項式や複素零点が与えられた場合がまだ残されている. また, 2 ノルムに限り議論してきたが, Stetter による定理 1 のように, 任意のノルムに対する複数の零点を指定した場合の最近接多項式の考察も残っている. ただし, ∞ ノルムについては一部の結果が Sekigawa によって得られている [4].

謝辞

本研究は科研費 15K00025 の助成を受けたものである.

参 考 文 献

[1] Hans J. Stetter, 1999, The nearest polynomial with a given zero, and similar problems, ACM SIGSAM Bulletin, 33(4):2–4.

[2] 櫻井 優太, 2016, 零点を 2 つ指定した場合の最近接多項式, 東京理科大学大学院 理学研究科数理情報科学専攻, 修士論文.

[3] 朝田 高行, 2017, 複数の零点を指定した場合の最近接多項式, 東京理科大学大学院 理学研究科数理情報科学専攻, 修士論文.

[4] Hiroshi Sekigawa, 2008, The nearest polynomial with a real multiple zero in a given real interval, Asian Symposium on Computer Mathematics, ASCM 2007, Lecture Notes in Artificial Intelligence, LNAI 5081, 32–41.

```
In[1]:= (*櫻井の公式導出手順に基づいて基底を取り，式を作る*)

Element[z, Reals];
|要素       |実数領域
Element[z1, Reals];
|要素        |実数領域
Element[z2, Reals];
|要素        |実数領域
Element[n, Integers];
|要素       |整数領域

f[z];
s = f'[z];
t = f[z] - z * s;
VnVn = Simplify[Sum[(i * z^(i - 1))^2, {i, 0, n}]];
       |簡単な…  |総和
Vn1Vn1 = Simplify[Sum[((i - 1) * z^i)^2, {i, 0, n}]];
         |簡単な…  |総和
VnVn1 = Simplify[Sum[(i * z^(i - 1)) * ((i - 1) * z^i), {i, 0, n}]];
        |簡単な…  |総和
(*VnVn1=Vn1Vnである*)

In[51]:= (*Cnの分母*)
Cndenominator = Simplify[VnVn1^2 - VnVn * Vn1Vn1];
                |簡単な形式に
(*Cnの分子*)
Cnnumerator = Simplify[Vn1Vn1 * s + VnVn1 * t];
              |簡単な形式に
Cn = Simplify[-Cnnumerator / Cndenominator];
     |簡単な形式に

In[54]:= (*Cn1の分母=Cnの分母*)
Cn1denominator = Simplify[VnVn1^2 - VnVn * Vn1Vn1];
                 |簡単な形式に
(*Cn1の分子*)
Cn1numerator = Simplify[VnVn1 * s + VnVn * t];
               |簡単な形式に
Cn1 = Simplify[Cn1numerator / Cn1denominator];
      |簡単な形式に

In[57]:= (*||.||_2の二乗*)
ans = Simplify[VnVn * Cn^2 + 2 * Cn * Cn1 * VnVn1 + Vn1Vn1 * Cn1^2]
      |簡単な形式に
```

Out[57]=

$$\left(\left(-1+z^2\right)\left(\left(-1-z^2+(1+n)^2 z^{2n}+\left(1-2n-2n^2\right) z^{2+2n}+n^2 z^{4+2n}\right) f[z]^2-2z\left(-1+z^2\right)\left(1-(1+n) z^{2n}+n z^{2+2n}\right) f[z]\, f'[z]+\left(-1+z^2\right)^2\left(-1+z^{2+2n}\right) f'[z]^2\right)\right) \Big/ \left(1-(1+n)^2 z^{2n}+2n(2+n) z^{2+2n}-(1+n)^2 z^{4+2n}+z^{4+4n}\right)$$

図 1: Mathematica による (6) 式の検算および簡略化

```
(*櫻井の式から極限値を求める．以下は式の根号内についての計算*)
sDenominator = Simplify[Sum[Sum[(z1^j * z2^j * (z1^k - z2^k))^2, {j, 0, n-k}], {k, 0, n}]];
               簡単な形式に

sNumerator = Simplify[Sum[(z2^j * f[z1] - z1^j * f[z2])^2, {j, 0, n}]];
             簡単な形式に

sf = FullSimplify[sNumerator / sDenominator];
     完全に簡約

(*z2 to z1*)
lim = Limit[sf, z2 → z1, Assumptions → n > 0 && z1 > 0 && z2 > 0, Analytic → True]
      極限              仮定の指定                                          真
((-1 + z1^2)
   ((-1 - z1^2 + (1 + n)^2 z1^(2 n) + (1 - 2 n - 2 n^2) z1^(2+2 n) + n^2 z1^(4+2 n)) f[z1]^2 - 2 z1 (-1 + z1^2)
      (1 - (1 + n) z1^(2 n) + n z1^(2+2 n)) f[z1] f′[z1] + (-1 + z1^2)^2 (-1 + z1^(2+2 n)) f′[z1]^2)) /
 ((-1 + (1 + n) z1^n - (1 + n) z1^(2+n) + z1^(2+2 n)) (-1 - (1 + n) z1^n + (1 + n) z1^(2+n) + z1^(2+2 n)))
```

図 2: Mathematica による定理 2 (1) 式の極限値の計算