数理解析研究所講究録 第2104巻 2019年 52-59

sign definite condition 専用限量子消去の公式の簡単化
Formula Simplification for Special Quantifier Elimination for Sign Definite Conditions

岩根秀直
(株) 富士通研究所/国立情報学研究所 *
HIDENAO IWANE
FUJITSU LABORATORIES LTD/NATIONAL INSTITUTE OF INFORMATICS

Abstract

sign definite condition (SDC) は制御系設計のさまざまな制約条件を記述できるため，重要なクラスの問題である．本稿では、SDC 専用限量子消去の出力を簡単化するために，Sturm-Habicht 列の定数項と主係数による $x \geq 0$ における実根の数え上げを提案する．

Abstract

A number of important problems in engineering have been reduced to sign definite conditions (SDCs) and a special quantifier elimination (QE) method is proposed [8]. In this paper, to simplify formulas for special quantifier elimination for SDCs we propose a real root count method in $x \geq 0$ by using the constant terms and the principal coefficients of the Sturm-Habicht sequence.

1 はじめに

限量子消去法（Quantifier Elimination: QE）[9, 2, 13] は限量子がついた一階述語論理式を入力として，それと等価で限量子のない論理式を出力するアルゴリズムである．QE は多くの応用がある重要なアルゴリズムで，効率化のための様々な研究がなされている．しかし，汎用 QE は，最悪計算量の下限が限量子の交代の数に対し，二重指数であること [4] が示されており，現在知られている最も効率のいい手法である cylindrical algebraic decomposition (CAD) [3] でも，多くとも 5 変数程度までの問題しか解けない．そのため，入力に制限を加えることで効率化を実現した専用 QE が提案されている．例えば，線形や 2 次など束縛変数の次数に制限を加えた一階述語論理に対する virtual substitution [10, 11], 多項式の正定性の条件 $\forall x(f(x) > 0)$ に対する Sturm-Habicht 列を用いた QE [6],（複数の）等式制約を持つ場合に効率的に動作する包括的グレブナー基底系を利用した QE [12, 5] などがある．

本稿では，sign definite condition (SDC) と呼ばれる問題 $\forall x(x \geq 0 \rightarrow f(x))$ に対して，Sturm-Habicht 列を用いた QE [1, 8] を扱う．SDC により，制御系設計のさまざまな制約条件を記述できるため，SDC に対する QE の効率化は重要であり，その出力が簡単であれば，後処理となる実行可能領域の描画などの効率化が期待できる．[8] では，Sturm-Habicht 列のすべての係数を用いて公式を構築していた．本稿では，一部の係数のみを用いた公式を構築するため，多項式の $x \geq 0$ における実根の数え上げの改善について紹介する．

*iwane@jp.fujitsu.com

2 準備

本章では，sign definite condition (SDC) の定義と，[13] で提案されている専用の QE アルゴリズムについて述べる．

2.1 Sturm-Habicht 列による実根の数え上げ

最初に， 実根の数え上げに利用する Sturm-Habicht 列について説明する．

定義 1 (Sturm-Habicht 列)
n 次の多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ に対して，以下の多項式列 $\mathsf{SH}(f) := \{\mathsf{SH}_n(f), \ldots, \mathsf{SH}_0(f)\}$ を **Sturm-Habicht 列**とよぶ．

$$\begin{aligned} \mathsf{SH}_n(f) &= f, \\ \mathsf{SH}_{n-1}(f) &= \frac{df}{dx}, \\ \mathsf{SH}_j(f) &= \delta_{n-j-1}\ \mathrm{Sres}_j(f, \frac{df}{dx}) \qquad (j = 0, \ldots, n-2). \end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{Sres}_j(f, g)$ は f と g の j 次部分終結式 *[13, p. 129]* で，$\delta_j = (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}}$ である．
また，$\mathsf{SH}_j(f)$ の j 次の係数を j 次 *Sturm-Habicht* 列主係数という．

定義 2 (符号変化の数)
実数の有限列 $A = \{a_m, \ldots, a_0\}$ における**符号変化の数** $V(A)$ は，以下の規則に従い数える．

- 次の符号列を *1* と数える： $\{-,+\}, \{+,-\}, \{-,0,+\}, \{+,0,-\}, \{-,0,0,+\}, \{+,0,0,-\}$
- 次の符号列を *2* と数える： $\{+,0,0,+\}, \{-,0,0,-\}$

さらに，実数係数の有限個の多項式列 $S(x) = \{S_n(x), S_{n-1}(x), \ldots, S_0(x)\}$ と実数 α に対して，$V_\alpha(S)$ で $\{S_n(\alpha), S_{n-1}(\alpha), \ldots, S_0(\alpha)\}$ の符号変化の数 $V(\{S_n(\alpha), S_{n-1}(\alpha), \ldots, S_0(\alpha)\})$ を表す．

次の定理により Sturm-Habicht 列を用いて与えられた区間における相異なる実根の個数を求めることができる．

定理 3 (Sturm-Habicht 列による実根の数え上げ [7])
多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ に対し $f(a)f(b) \neq 0$ とし，$H(f)$ を $\mathsf{SH}(f)$ から恒等的に *0* になる多項式を取り除いたものとする．
このとき，$V_a(H(f)) - V_b(H(f))$ は区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の相異なる実根の個数に一致する．

定義 4
$\deg(\mathsf{SH}_j(f)) = j$ のとき，$\mathsf{SH}_j(f)$ は正則であるという．

Sturm-Habicht 列に対して以下の定理が成立する．

定理 5 (Sturm-Habicht Structure Theorem [7])
f を次数 n (≥ 2) の多項式とする．$\mathsf{SH}_{j+1}(f)$ が正則なすべての j に対して，$\deg(\mathsf{SH}_j(f)) = r \leq j$ とするとき，以下が成立する．

(A) $r < j-1$ のとき，$\mathsf{SH}_{j-1}(f) = \cdots = \mathsf{SH}_{r+1}(f) = 0$,

(B) $r < j$ のとき， $\mathrm{hc}(\mathsf{SH}_{j+1}(f))^{j-r}\mathsf{SH}_r(f) = \delta_{j-r}\mathrm{hc}(\mathsf{SH}_j(f))^{j-r}\mathsf{SH}_j$,

(C) $r < j$ のとき，$\mathrm{hc}(\mathsf{SH}_{j+1}(f))^{j-r+2}\mathsf{SH}_{r-1}(f) = \delta_{j-r+2}\mathrm{Prem}(\mathsf{SH}_{j+1}(f), \mathsf{SH}_j(f))$.

ここで，$\mathrm{hc}(g)$ は g の主係数で，$\mathrm{Prem}(g, h)$ は，以下で定義される擬剰余を表す．

$$\mathrm{Prem}(g, h) = \mathrm{remainder}(\mathrm{hc}(h)^{\deg(g)-\deg(h)+1}g, h)$$

表 1 は定理 5 を可視化したものである．Sturm-Habicht 列は部分終結式列と比較すると，符号が異なるだけなので，次数の観点からみると，部分終結式列の定理と同様のものになる．

表 1: Sturm-Habicht Structure Theorem の可視化

index	$j+1$	j	$j-1$	$\cdots$	$r+1$	r	$r-1$
SH_j	SH_{j+1}	SH_j	0	$\cdots$	0	SH_r	SH_{r-1}
deg	$j+1$	r	$-\infty$	$\cdots$	$-\infty$	r	

2.2 Sign Definite Condition

最初に sign definite condition (SDC) を定義する．

定義 6 (sign definite condition)
多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ に対する以下の条件を **sign definite condition** *(SDC)* という．

$$\forall x\ (x \geq 0 \rightarrow f(x) > 0)$$

制御系設計の様々な条件が SDC で記述できるため，SDC は重要な問題のクラスであり，専用の QE アルゴリズムが提案されている [1]．提案された専用アルゴリズムは SDC が「定数項が正の多項式 $f(x)$ が $x \geq 0$ において実根を持たないこと」と等価なことを利用する．つまり，定理 3 を用いて，区間 $[0, \infty)$ における相異なる実根の個数が 0 になる条件を求めればいい．$x = 0$ と $x = \infty$ における $\mathsf{SH}_j(f)$ の符号を表すため，以下では次の記法を用いる．

記法 1
$\mathsf{SH}_j(f)$ の $x = \infty$ における符号，つまり，$\mathsf{SH}_j(f)$ の主係数 *(head coefficient)* の符号を h_j，$\mathsf{SH}_j(f)$ の j 次の係数の符号 *(principal Sturm-Habicht coefficient)* の符号を p_j，$\mathsf{SH}_j(f)$ の $x = 0$ における符号，つまり，$\mathsf{SH}_j(f)$ の定数項 *(constant term)* の符号を c_j と表記する．

符号とは，正，負または 0 のことで，それぞれ，+, −, 0 で表す．本稿では, + を 1, − を −1, 0 を 0 と扱い，同一視する．例えば，t が 0 または + の場合には $t \geq 0$ と表記する．

注意 1
$\mathsf{SH}_j(f) = a_{j,j}x^j + a_{j,j-1}x^{j-1} + \cdots + a_{j,0}$ とするとき，以下が成立する．

$$\begin{aligned} h_j = 0 \quad &\leftrightarrow \quad a_{j,i} = a_{j,j-1} = \cdots = a_{j,0} = 0 \\ h_j > 0 \quad &\leftrightarrow \quad (a_{j,j} > 0) \vee (a_{j,j} = 0 \wedge a_{j,j-1} > 0) \vee \cdots \vee (a_{j,j} = a_{j,j-1} = \cdots = a_{j,1} = 0 \wedge a_{j,0} > 0) \end{aligned}$$

したがって，$x = \infty$ で $\mathsf{SH}_j(f)$ が 0 になるとき，$\mathsf{SH}_j(f)$ は恒等的に 0 である．また，c_j は $a_{j,0}$ の符号に一致する．

例 1
$f(x)=25x^5+25x^4+10x^3+2x^2+25x+1$ とする．

$$
\begin{array}{rclcl}
\mathsf{SH}_5(f) &=& f(x) &=& 25x^5+25x^4+10x^3+2x^2+25x+1,\\
\mathsf{SH}_4(f) &=& \frac{df}{dx}(x) &=& 125x^4+100x^3+30x^2+4x+25,\\
\mathsf{SH}_3(f) &=& \delta_{5-3-1}\mathrm{Sres}_3(f,\frac{df}{dx}) &=& -(310000x),\\
\mathsf{SH}_2(f) &=& \delta_{5-2-1}\mathrm{Sres}_2(f,\frac{df}{dx}) &=& -(0),\\
\mathsf{SH}_1(f) &=& \delta_{5-1-1}\mathrm{Sres}_1(f,\frac{df}{dx}) &=& +(1906624000000x),\\
\mathsf{SH}_0(f) &=& \delta_{5-0-1}\mathrm{Sres}_0(f,\frac{df}{dx}) &=& +(945685504000000).
\end{array}
$$

であるので，

$$
\begin{array}{rcl}
H(f) &=& \{\mathsf{SH}_5(f),\mathsf{SH}_4(f),\mathsf{SH}_3(f),\mathsf{SH}_1(f),\mathsf{SH}_0(f)\}\\
\{h_5,h_4,h_3,h_1,h_0\} &=& \{+,+,-,+,+\}\\
\{c_5,c_4,c_3,c_1,c_0\} &=& \{+,+,0,0,+\}
\end{array}
$$

となり，$V_\infty(H(f))=V_0(H(f))=2$ なので，$f(x)$ の $x\geq 0$ における実根の個数は 0 である．$f(x)$ の係数の符号変化の数は 0 なので，デカルトの符号律からも $f(x)$ が $x\geq 0$ で実根を持たないことが確認できる．

注意 2
n 次の多項式に対して，$h_n=h_{n-1}$, $h_0=c_0$ となることに注意する．

2.3 SDC 専用 QE の実装

本節では，穴井らにより提案された SDC 専用の QE アルゴリズムの実装方法 [13] について述べる．

Algorithm 1 は，SDC 専用の QE アルゴリズムの実装方法の概要である．最初に，オフラインで次数毎に係数をパラメタとする多項式に対して，$x\geq 0$ で実根を持たない符号条件をあらかじめ求めておく．f が入力された後（オンライン）の計算は Sturm-Habicht 列を求めて代入する部分だけとなるので，高速な QE 計算が実現される．実際，5 次の問題は汎用の QE アルゴリズムである CAD では 1 時間たっても計算が停止しないが，提案手法では 1 秒に満たない時間で計算できる．

オンラインの計算を高速化するためには，オフラインでの φ_n の表現を簡単化することが必要である．また，φ_n の表現の簡単化は出力される論理式の簡単化につながり，実行可能領域の描画や真偽値を判定する場合など後処理の高速化にもつながる．オフラインで計算する φ_n の簡単化については，[8, 14] を参照されたい．

Algorithm 1 qe_{sdc}

Input: 次数 n の多項式 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$
Output: $f(x)$ が SDC を満たす条件
  $\varphi_n \leftarrow V_0(H(f))-V_\infty(H(f))=0$ となる SH の符号条件 (オフラインで計算， 定理 3)
  $\mathsf{SH}(f)\leftarrow f$ の Sturm-Habicht 列
  φ_n に $\mathsf{SH}(f)$ を代入する．

例 2
2 次の多項式 $f(x)=x^2+bx+c$ の場合を考える．$V_0(H(f))-V_\infty(H(f))=0$ となる符号条件は表 2 のようになる．各行が $f(x)$ が $x\geq 0$ で実根を持たないときの h_j, c_j の符号を表している．ここで，注意 2 より，$h_2=h_1>0$ であり，$h_0=c_0$ であり，$f(0)>0$ より，$c>0$ なので $c_2>0$ となることに注意する．

表 2: φ_2

h_2	h_1	h_0	c_2	c_1	c_0
+	+	-	+	-	-
+	+	-	+	0	-
+	+	-	+	+	-
+	+	0	+	0	0
+	+	0	+	+	0
+	+	+	+	+	+

$f(x)$ の *Sturm-Habicht* 列は $\mathsf{SH}(f)=\{x^2+bx+c, 2x+b, b^2-4c\}$ なので，以下が φ_2 の表現となる．

$$\begin{array}{ll}(b^2-4c<0\wedge c>0\wedge b<0) & \vee\\ (b^2-4c<0\wedge c>0\wedge b=0) & \vee\\ (b^2-4c<0\wedge c>0\wedge b>0) & \vee\\ (b^2-4c=0\wedge c>0\wedge b=0) & \vee\\ (b^2-4c=0\wedge c>0\wedge b>0) & \vee\\ (b^2-4c>0\wedge c>0\wedge b>0) & \end{array} \tag{1}$$

式 (1) は $g>0\wedge g=0\leftrightarrow g\geq 0$ を利用することで，以下のように簡単化することができる．

$$\begin{array}{ll}(b^2-4c<0\wedge c>0) & \vee\\ (b^2-4c=0\wedge c>0\wedge b\geq 0) & \vee\\ (b^2-4c>0\wedge c>0\wedge b>0) & \end{array} \tag{2}$$

上記の条件をオフラインで構築しておき，具体的な問題に対して b, c に値を代入するだけで QE が実現される．このように φ_2 をあらかじめ簡単化しておくことでオンラインでの代入回数を削減できる．

3 公式の簡単化

ここでは，p_j と c_j によって SDC の公式を記述するため，h_j を p_j, c_j により表現することを考える．

$p_j\neq 0$ であれば, $h_j=p_j$ となり，符号を特定できる．$\mathsf{SH}_j(f)$ が正則でない，つまり，$p_j=0$ の場合を考える．このときも，定理 5 により，恒等的に 0 となる場合は特定できる．そのときは，$h_j=0$ である．$\mathsf{SH}_{j+1}(f)$ が正則で，$\mathsf{SH}_j(f)$ が恒等的に 0 であるときは $\mathsf{SH}_j(f)=\mathsf{SH}_{j-1}(f)=\cdots=\mathsf{SH}_0(f)=0$ となり，恒等的に 0 ではない場合には，$r=\deg(\mathsf{SH}_j(f))\geq 0$ とすると $\mathsf{SH}_{j-1}(f)=\mathsf{SH}_{j-2}(f)=\cdots=\mathsf{SH}_{r+1}(f)=0$, $\mathsf{SH}_r(f)$ は正則となる．したがって， p_j が特定できないのは，$\mathsf{SH}_{j+1}(f)$ が正則で，$\mathsf{SH}_j(f)$ が正則でなく，かつ恒等的に 0 でない場合のみとなる．

次の定理により，h_j のすべての符号が p_j, c_j から決定できるようになる．ここで，$f(0)=a_0>0$ は SDC の必要条件であることに注意されたい．

定理 7

多項式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ が $a_na_0\neq 0$ または $a_na_1\neq 0$ のとき，$0\leq j\leq n$ に対して，$\mathsf{SH}_{j+1}(f)$ が正則で，

$r = \deg(SH_j(f)) < j$, $SH_j(f) \neq 0$ とする．このとき，

$$h_j = \begin{cases} \delta_{j-r} p_r & (j-r \text{ is even}), \\ \delta_{j-r} p_{j+1} c_r c_j & (j-r \text{ is odd and } c_j \neq 0), \\ \delta_{j-r+2} p_{j+1} c_{r-1} c_{j+1} & (j-r \text{ is odd and } c_j = 0). \end{cases}$$

が成立する．

証明　今，$\mathrm{SH}_{j+1}(f)$ と $\mathrm{SH}_r(f)$ は正則なので，$p_{j+1} = h_{j+1}$, $p_r = h_r$ が成立する．

定理 3 (B) から，$x = \infty$ のとき，

$$h_{j+1}^{j-r} p_r = \delta_{j-r} h_j^{j-r} h_j$$

なので，$j - r$ が偶数のとき，

$$p_r = \delta_{j-r} h_j$$

が得られる．

定理 3 (B) から，$x = 0$ のとき，

$$h_{j+1}^{j-r} c_r = \delta_{j-r} h_j^{j-r} c_j$$

なので，$j - r$ が奇数で，$c_j \neq 0$ のとき，

$$h_j = h_{j+1} c_r \delta_{j-r} c_j = \delta_{j-r} p_{j+1} c_r c_j$$

が得られる．

今，$f(x)$ は $x = 0$ で重根を持たないので，$f(x)$ と $\frac{df}{dx}(x)$ から生成される剰余列が連続して $x = 0$ を根に持つことはない．したがって，$c_j = 0$ のとき，$c_{j+1} \neq 0$ が成立する．

定理 3 (C) において，$x = 0$ とすると，

$$p_{j+1}^{j-r+2} c_{r-1} = \delta_{j-r+2} h_j^{j-r+2} c_{j+1}$$

なので， $j - r$ が奇数のとき，

$$h_j = \delta_{j-r+2} p_{j+1} c_{r-1} c_{j+1}$$

が得られる． ∎

上記の定理から，$x \geq 0$ における相異なる実根の個数を求める Algorithm 2 が得られる．

また，本アルゴリズムから，c_j および p_j によって，φ_n が構築できることがわかる．

4　実験結果

実根の個数が，c_j, p_j により表現できるようになったので，それによって得られる公式を，論理関数処理を用いて行った [8]．表 3 は，公式を $\vee_{i=1}^{s} \wedge_{j=1}^{t} (f_j \rho_{i,j} 0)$ ($\rho_{i,j} \in \{<, >, =, \leq, \geq, \top\}$, ただし，$f_j \top 0 \equiv \top$ を表現する) の形式で簡単化した場合の結果を表している．deg 列は $f(x)$ の次数を表す．t 列は，実根の個数を決定するために変化させる多項式の個数を表す．次数を n とすると，$p_n = p_{n-1} > 0$, $c_n > 0$, $c_0 = p_0$ なので，$t = 2n - 2$ であり，3^t 個の符号の組合せを考慮して簡単化を行う．$\top$ 列と $\perp$ 列はそれぞれ，上記の符号の組合せのうち，真または偽として扱った符号の組合せの個数である．$3^t - \top - \perp$ は，[8] で示した定理により，$\wedge_{j=1}^{t} (f_j \rho_{i,j} 0)$ を満たす実数が存在しない，つまり，パラメータ空間上で空集合であるため，真偽値を特定する必要がない符号列の個数である．rims2017 列と casc2013 列は，それぞれ，p_k, c_k と h_k,

Algorithm 2 RootCount(f)

Input: polynomial $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ where $a_n a_0 \neq 0$ or $a_n a_1 \neq 0$

Output: number of distinct real roots of f in $x \geq 0$.

compute $\{c_k\}$ and $\{p_k\}$ (sign of $\mathrm{coeff}_0(SH_k), \mathrm{coeff}_k(SH_k)$)

$r \leftarrow -1$, $C \leftarrow []$, $H \leftarrow []$ (empty sequence)

for j **from** 0 **to** n **do**

  if $p_j \neq 0$ **then**

    $h_j \leftarrow p_j$, $r \leftarrow j$

  else if $p_{j+1} = 0$ **or** $r < 0$ **then**

    $h_j \leftarrow 0$

  else if $(j - r)$ is even **then**

    $h_j \leftarrow \delta_{j-r} p_r$

  else if $c_j \neq 0$ **then**

    $h_j \leftarrow \delta_{j-r} p_{j+1} c_j c_r$

  else

    $h_j \leftarrow \delta_{j-r+2} p_{j+1} c_{j+1} c_{r-1}$

  if $h_j \neq 0$ **then**

    append h_j and c_j to the front of H and C, respectively

return $V(C) - V(H)$

c_k の符号によって公式を構築した場合の $\vee$ の個数 s を表している．7 次までは espresso による厳密解が得られている．8 次は近似解の結果である．

[8] 列と比較して，h_k が p_k になったことによる簡単化の効果だけでなく，$\vee$ の個数が小さくなり，より簡単な式が得られていることが確認できる．これは，h_k の符号が制限されていることによる効果だと予想している．

表 3: 簡単化結果

deg	t	$\top$	$\bot$	rims2017	casc2013
2	2	5	2	2	2
3	4	17	8	2	4
4	6	117	78	6	10
5	8	425	306	7	18
6	10	3089	2660	31	57
7	12	11897	10838	42	121
8	14	87361	89592	134	353

5 まとめ

SDC 専用 QE の公式を簡単化するため，与えらた多項式の $x \geq 0$ における相異なる実根の個数を Sturm-Habicht 列主係数 p_j と定数項 c_j により求める手法を提案した．これにより，[8] よりも簡単な公式が得られ，後処理の高速化が期待できる．

参 考 文 献

[1] Hirokazu Anai and Shinji Hara. Fixed-structure robust controller synthesis based on sign definite condition by a special quantifier elimination. In *Proceedings of American Control Conference, 2000*, Vol. 2, pp. 1312–1316, 2000.

[2] Bob F. Caviness and Jeremy R. Johnson, editors. *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition (Texts and Monographs in Symbolic Computation)*. Springer, 1998.

[3] George E. Collins. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. In *Automata Theory and Formal Languages 2nd GI Conference Kaiserslautern*, Vol. 33 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 134–183. Springer-Verlag, May 1975.

[4] James H. Davenport and Joos Heintz. Real quantifier elimination is doubly exponential. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 5, No. 1-2, pp. 29–35, 1988.

[5] Ryoya Fukasaku, Hidenao Iwane, and Yosuke Sato. Real quantifier elimination by computation of comprehensive Gröbner systems. In *Proceedings of the 40th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC '15, pp. 173–180. ACM, July 2015.

[6] Laureano González-Vega. *A combinatorial algorithm solving some quantifier elimination problems*, pp. 365–375. In Caviness and Johnson [2], 1998.

[7] Laureano González-Vega, Tomas Recio, Henri Lombardi, and M.-F Roy. *Sturm-Habicht sequences determinants and real roots of univariate polynomials*, pp. 300–316. In Caviness, Bob F. and Johnson, Jeremy R. [2], 1998.

[8] Hidenao Iwane, Hiroyuki Higuchi, and Hirokazu Anai. An effective implementation of a special quantifier elimination for a sign definite condition by logical formula simplification. In *Computer Algebra in Scientific Computing*, Vol. 8136 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 194–208. Springer, September 2013.

[9] Alfred Tarski. *A decision method for elementary algebra and geometry.* University of California Press, 1951.

[10] Volker Weispfenning. The complexity of linear problems in fields. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 5, No. 1-2, pp. 3–27, February 1988.

[11] Volker Weispfenning. Quantifier elimination for real algebra - the quadratic case and beyond. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, Vol. 8, No. 2, pp. 85–101, January 1997.

[12] Volker Weispfenning. *A New Approach to Quantifier Elimination for Real Algebra*, pp. 376–392. In Caviness and Johnson [2], April 1998.

[13] 穴井宏和, 横山和弘. QE の計算アルゴリズムとその応用 – 数式処理による最適化. 東京大学出版会, August 2011.

[14] 岩根秀直, 深作亮也, 佐藤洋祐. 不等式制約をもつ論理式に対する包括的グレブナー基底系を利用した限量記号消去の出力の簡単化. 数理解析研究所講究録, Vol. 2019, pp. 124–142, 2017.