数理解析研究所講究録 第2104巻 2019年 78-85

収束冪級数環における generalized integral dependence relation の計算について

An algorithm for computing generalized integral dependence relations in a ring of convergent power series

鍋島克輔 *
徳島大学大学院社会産業理工学研究部
NABESHIMA, KATSUSUKE
GRADUATE SCHOOL OF TECHNOLOGY, INDUSTRIAL AND SOCIAL SCIENCES, TOKUSHIMA UNIVERSITY

田島慎一 †
筑波大学大学院数理物質系数学域
TAJIMA, SHINICHI
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

An algorithm for computing generalized integral dependence relations, in a ring of convergent power series, is introduced. It is shown that generalized integral dependence relations,in a ring of convergent power series, can be obtained in a polynomial ring. The key idea of the proposed algorithm is computing ideal quotients in a polynomial ring.

1 はじめに

Integral closure [11] は可換環論，代数幾何，数論における基本的な概念であり，また，イデアルに対する integral colusre や integral dependence relation は特異点研究においても重要な役割を果たす．しかしながら，局所環での計算アルゴリズムはまだ十分には研究されていない．

近年，著者たちにより，収束冪級数環での integral number や integral dependence relation を効率的に求めるアルゴリズムが研究され紹介されている [7, 12, 13]．本稿では，同じフレームワークとして，integral dependence relation を拡張することで generalized integral dependence relation の概念を導入し，さらにその計算アルゴリズムを紹介する．アルゴリズム構成の鍵となるアイデアは多項式環でのイデアル商の計算である．

Generalized integral dependence relation の応用として加藤満生による b-関数の計算がある [1, 2, 3, 12]．この孤立特異点を持つ超曲面の μ-constant deformation に対する加藤満生の計算法は偏微分作用素環においてグレブナー基底を用いた方法より効率的であることが近年の研究によりわかり，特異点変形に付随した b-関数の研究には必要不可欠なものと期待される．

*nabeshima@tokushima-u.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

2 準備と目的

ここでは，本稿で用いる定義や記号を紹介し，本稿の目的を述べる．

X を $\mathbb{C}^n$ の原点 O の開近傍，$\mathcal{O}_X$ を X での正則函数のなす層，$\mathcal{O}_{X,O}$ を $\mathcal{O}_X$ の原点における stalk とする．s 個の多項式 $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ の X における共通零点が原点のみからなるなるものが与えられたとする．（すなわち，$\{x \in X | f_1(x) = \cdots = f_s(x) = 0\} = \{O\}$ とする．）収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O} = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ において $f_1, \ldots, f_s$ が生成するイデアルを $\mathcal{I}_O$ とおく．また，多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ において $f_1, \ldots, f_s$ が生成するイデアルを J と書く．

定義 1 $h \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ が $\mathcal{I}_O$ 上 *integral* とは次を満たす自然数 r と $a_i \in \mathcal{I}_O^i$ *(*$i = 1, 2, \ldots, r$*)* が存在するときである

$$h^r + a_1 h^{r-1} + a_2 h^{r-2} + \cdots + a_{r-1} h + a_r \quad = \quad 0. \tag{1}$$

この式を h の $\mathcal{I}_O$ 上 *integral dependence relation* という．*(1)* が成り立つ最小の r を *integral number (reduction number* と同値な量*)* という．

Samuel multiplicity を求めるアルゴリズム [9, 10] を用いることで，h が $\mathcal{I}_O$ 上 integral であるか否かを判定することができることが知られている．

次に generalized integral dependence relation を定義する．

定義 2 $h \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ を $\mathcal{I}_O$ 上 *integral* とし，$\ell \in \mathbb{N}$ を h の $\mathcal{I}_O$ における *integral number*，k は $k < \ell$ なる自然数とする．このとき，

$$bh^k + a_1 h^{k-1} + a_2 h^{k-2} + \cdots + a_{k-1} h + a_k \quad = \quad 0.$$

を満たす $b \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$，$a_i \in \mathcal{I}_O^i$ *(*$i = 1, 2, \ldots, k$*)* が存在するとき，この式を h の $\mathcal{I}_O$ 上の *generalized integral dependence relation* という．

本稿の目的は，定義 2 で述べられた $b, a_1, a_2, \ldots, a_k$ を求めるアルゴリズムを与えることである．

3 Generalized integral dependence relation の計算

ここでは，本研究の主結果である収束冪級数環の generalized integral dependence relation の計算アルゴリズムを紹介する．

いま，$h \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ が $\mathcal{I}_O$ 上 integral であり，その integral number を ℓ とする．h の $\mathcal{I}_O$ 上の generalized integral dependence relation

$$bh^k + a_1 h^{k-1} + a_2 h^{k-2} + \cdots + a_{k-1} h + a_k = 0$$

を考える．ただし，$k < \ell, b \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}, a_i \in \mathcal{I}_O^i$ $(i = 1, \ldots, k)$ である．この式を変形すると

$$bh^k = -a_1 h^{k-1} - a_2 h^{k-2} - \cdots - a_{k-1} h + a_k$$

となり，これは

$$bh^k \in (\mathcal{I}_O h^{k-1} + \mathcal{I}_O^2 h^{k-2} + \cdots + \mathcal{I}_O^{k-1} h + \mathcal{I}_O^k)$$

と考えることができる．すなわち，b はイデアル商

$$(\mathcal{I}_O h^{k-1} + \mathcal{I}_O^2 h^{k-2} + \cdots + \mathcal{I}_O^{k-1} h + \mathcal{I}_O^k) : h^k$$

に属することになる．以下，

$$\mathcal{I}_k := \mathcal{I}_O h^{k-1} + \mathcal{I}_O^2 h^{k-2} + \cdots + \mathcal{I}_O^{k-1} h + \mathcal{I}_O^k$$

とする．

上記の考察より，局所環でのイデアル商 $\mathcal{I}_k : h^k$ に所属する元 b が，h の $\mathcal{I}_O$ 上 generalized integral dependence relation の h^k の係数部分となることがわかる．

次の記号を導入する．$\mathbb{C}^n$ の原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジー類を $H^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ として，$\mathcal{I}_k$ により零化される代数的局所コホモロジー類の集合を

$$H_{\mathcal{I}_k} = \left\{ \psi \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \,\middle|\, g\psi = 0, \forall g \in \mathcal{I}_k \right\}$$

とあらわす．また，代数的局コホモロジー類の集合 $h^k H_{\mathcal{I}_k} = \left\{ h^k \psi \,\middle|\, \psi \in H_{\mathcal{I}_k} \right\}$ の元を零化する集合を

$$Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(h^k H_{\mathcal{I}_k}) = \left\{ g \in \mathcal{O}_{X,O} \,\middle|\, g\psi = 0, \forall \psi \in h^k H_{\mathcal{I}_k} \right\}$$

とあらわす．このとき，次が成り立つ．

補題 3 $b \in \mathcal{I}_k : h^k \iff b \in Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(h^k H_{\mathcal{I}_k})$.

代数的局所コホモロジー類の集合 $H_{\mathcal{I}_k}$ は有限次元ベクトル空間になることが知られており，ベクトル空間の基底を計算するアルゴリズムは論文 [4, 6, 16] により紹介されている．また，$Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(h^k H_{\mathcal{I}_k})$ はイデアルとなり，このイデアルのスタンダード基底は，代数的局所コホモロジー類の集合 $H_{\mathcal{I}_k}$ を利用することにより計算することが可能であることも論文 [4, 5, 6, 16] で述べられている．すなわち，h の $\mathcal{I}_O$ 上 generalized integral dependence relation の h^k の係数部分のイデアル $\mathcal{I}_k : h^k$ の基底は計算可能である．

次に，多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ において $f_1, \ldots, f_s$ が生成するイデアル J について，次の多項式環でのイデアル J_k を考える．

$$J_k := J h^{k-1} + J^2 h^{k-2} + \cdots + J^{k-1} h + J^k.$$

このとき，多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ でのイデアル商を

$$Q_k := J_k : h^k$$

とし，Q_k により零化される代数的局所コホモロジー類の集合を

$$H_{Q_k} = \left\{ \psi \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \,\middle|\, g\psi = 0, \forall g \in Q_k \right\}$$

とあらし，

$$Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{Q_k}) = \{ g \in \mathcal{O}_{X,O} \,|\, g\psi = 0, \forall \psi \in H_{Q_k} \}$$

とする．このとき，次が成り立つ．

補題 4 *(1)* $b \in \mathcal{I}_k : h^k \iff b \in Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{Q_k})$.

(2) $u \in Q_k : \langle b \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \iff ubh^k \in J_k \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

この事実より，もし多項式環において $ubh^k \in J_k$ ならば，

$$ubh^k = c_1 h^{k-1} + c_2 h^{h-2} + \cdots + c_{k-1} h + c_k$$

となる，$c_i \in J^i$ が存在することになる．

前述したように b は代数的局所コホモロジーを計算することにより求められ，u は補題 4 より多項式環でのイデアル商 $Q_k : \langle b \rangle$ を計算することにより得られる．また，$[ubh^k, J_k]$ の syzygy 加群のグレブナー基底を計算すると，$ubh^k \in J_k$ なので，必ず第一成分が定数となるベクトルがグレブナー基底の中には存在し，そのベクトルを取ることにより $c_1, c_2, \ldots, c_k$ を得ることができる．

ここでもし，$u(O) \neq 0$ ならば，

$$bh^k + \frac{-c_1}{u} h^{k-1} + \frac{-c_2}{u} h^{h-2} + \cdots + \frac{-c_{k-1}}{u} h + \frac{-c_k}{u} = 0$$

となり，$\dfrac{-c_i}{u} \in \mathcal{I}_O^i$ であるので，収束冪級数環の generalized integral dependence relation が得られる．

Generalized integral dependence relation を求めることは本来，局所環での問題であるが，代数的局所コホモロジーを用いて $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(h^k H_{\mathcal{I}_k})$ のスタンダード基底を求めた後の計算は，“すべて多項式環で求めることができる” ことを強調しておく．

H_{Q_i} と $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{Q_i})$ について次が成り立つ．

補題 5 ℓ は h の $\mathcal{I}_O$ 上 *integral number* とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $H_{Q_1} \supseteq H_{Q_2} \supseteq \cdots \supseteq H_{Q_\ell} = \{0\}$.

(2) $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{Q_1}) \subseteq Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{Q_2}) \subseteq \cdots \subseteq Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{Q_\ell}) = \mathcal{O}_{X,O}$.

以上の考察をまとめたものが次のアルゴリズムである．

アルゴリズム（**Generalized integral dependence relation** の計算）

入力: $h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $F = \{f_1, \ldots, f_s\} \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, h は $\mathcal{I}_O = \langle F \rangle \subset \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上 integral. $J = \langle F \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ とする．

出力:$\{(1, v_1), (2, v_2), \ldots, (\ell, v_\ell)\}$: integral number ℓ まで generalized integral dependence relation を求める．v_i はベクトルであり，$k = i$ の generalized integral dependence relation をあらわす．

$k = 1$ から integral number まで次を繰り返す．$L \leftarrow \emptyset$;

1. $Q_k := J_k : h^k$ を求める。
2. $H_{Q_k} := \left\{ \psi \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \,\middle|\, g\psi = 0, \forall g \in Q_k \right\}$ を求める。
3. $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{Q_k})$ のスタンダード基底 G を求める。$G = \{1\}$ なら，k が integral number であり，$ub = 1$ とし，ステップ 6 へ．
4. G から元 b をとり，$Q_k : \langle b \rangle$ の基底 $U \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を求める．
5. $u(O) \neq 0$ となる元 u を U からとる．
6. $[ubh^k, J_k]$ の syzygy 加群のグレブナー基底を計算して第一成分が定数となるベクトル v をとる．
7. $L \leftarrow L \cup \{(k, [ub, v])\}$.

return L;

例 6 $f=x^4y+y^6$, $h=xy^5$，$F=\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\}$ とし，$J=\langle F\rangle\subset\mathbb{C}[x,y]$, $\mathcal{I}_O=\langle F\rangle_{\{O\}}\subset\mathbb{C}\{x,y\}$ とする．このとき，アルゴリズムに従い $k=1$ から *integral number* まで，h の $\mathcal{I}_O$ 上 *generalized integral dependence relation* を求める．

- $k=1$ のとき，$J_1=J$ である．

  1: イデアル商 $J_1:\langle h\rangle\subset\mathbb{C}[x,y]$ の基底を計算すると，$Q_1=\{x^2,y\}$ となる．

  2: ベクトル空間 H_{Q_1} の基底は $\left\{[\begin{array}{c}1\\ xy\end{array}],[\begin{array}{c}1\\ x^2y\end{array}]\right\}$ となる．

  3: $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{Q_1})$ のスタンダード基底は $G=\{x^2,y\}$ となる．$b_1=x^2,b_2=y$ とする。

  4: $Q_1:\langle b_1\rangle$ と $Q_1:\langle b_2\rangle$ の両方の基底は明らかに $\{1\}$ となる．

  5: $u=1$ とする．

  6-1: $b_1h,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ の *syzygy* 加群のグレブナー基底は $\{$`[-4,y^4,0],[0,-x^4-6*y^5,4*y*x^3]`$\}$ となる．(全次数辞書式項順序 $x>y$.）したがって，

$$-4x^2h+y^4\frac{\partial f}{\partial x}+0\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

  を得る．*(-4 は定数より，-4 で全体を割る操作は，ここではしてない．)*

  6-2: また，$b_2h,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ の *syzygy* 加群のグレブナー基底は $\{$`[-24,-x^2,4*y*x],[0,-x^4-6*y^5,4*y*x^3]`$\}$ となる．(全次数辞書式項順序 $x>y$.）したがって，

$$-24yh+(-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}+(4xy)\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

  を得る．

- $k=2$ のとき，$J_2=Jh+J^2=\langle\frac{\partial f}{\partial x}h,\frac{\partial f}{\partial y}h,(\frac{\partial f}{\partial x})^2,(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y}),(\frac{\partial f}{\partial y})^2\rangle$ である．

  1: イデアル商 $J_2:\langle h^2\rangle\subset\mathbb{C}[x,y]$ の基底を計算すると $Q_2=\{1\}$ となる．

  2: ベクトル空間 H_{Q_2} の基底は $\{0\}$ となる．

  3: $\mathrm{Ann}(H_{Q_2})=\langle 1\rangle$ より，*integral number* は *2* であることが補題 *5* よりわかる．

  4: $h^2,\frac{\partial f}{\partial x}h,\frac{\partial f}{\partial y}h,(\frac{\partial f}{\partial x})^2,(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y}),(\frac{\partial f}{\partial y})^2$ の *syzygy* 加群のグレブナー基底は

```
[[96,0,-16*x,y^3,0,0],
[0,4*x^2,0,-y^4,0,0],
[0,24*y,0,x^2,-4*y*x,0],
[0,0,4*x^2,0,-y^4,0],
[0,0,24*y,0,x^2,-4*y*x],
[0,0,0,x^4+6*y^5,-4*y*x^3,0],
[0,0,0,0,x^4+6*y^5,-4*y*x^3]]
```

となる．したがって，

$$96h^2+(-16x)\frac{\partial f}{\partial y}h+(y^3)(\frac{\partial f}{\partial x})^2=0$$

を得る．すなわち，$c_1=(-16x)\frac{\partial f}{\partial y}\in\mathcal{I}_O$, $c_2=(y^3)(\frac{\partial f}{\partial x})^2\in\mathcal{I}_O^2$ とする

$$h^2+\frac{c_1}{96}h+\frac{c_2}{96}=0$$

である．

これで，*integral number* までの *generalized integral dependence relation* を得ることができた．

例 7 $f=x^3z+y^6+z^3$, $h=y^4z$，$F=\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\}$ とし，$J=\langle F\rangle\subset\mathbb{C}[x,y,z]$, $\mathcal{I}_O=\langle F\rangle_{\{O\}}\subset\mathbb{C}\{x,y,z\}$ とする．このとき，アルゴリズムに従い h の $\mathcal{I}_O$ 上 *generalized integral dependence relation* を求める．

- $k=1$ のとき，$J_1=J$ である．

1: イデアル商 $J_1:\langle h\rangle\subset\mathbb{C}[x,y,z]$ の基底を計算すると $Q_1=\{x^2,z^2,y\}$ となる．

2: ベクトル空間 H_{Q_1} の基底は $\left\{[\ \frac{1}{xyz}\ ],[\ \frac{1}{x^2yz}\ ],[\ \frac{1}{xyz^2}\ ],[\ \frac{1}{x^2yz^2}\ ]\right\}$ となる．

3: $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{Q_1})$ のスタンダード基底は $G_1=\{x^2,y,z^2\}$ となる．$b_1=x^2,b_2=y,b_3=z^2$ とする．

4: イデアル商 $Q_1:\langle b_1\rangle$, $Q_1:\langle b_2\rangle$, $Q_1:\langle b_3\rangle$ の基底は明らかに $\{1\}$ である．

5: $u=1$ とする．

6-1: $b_1h,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$ の *syzygy* 加群のグレブナー基底は

{[-3,y^4,0,0],[0,2*y^5,-z*x^2,0],[0,-x^3-3*z^2,0,3*z*x^2],[0,0,-x^3-3*z^2,6*y^5]}

となる．よって，*generalized integral dependence relation*

$$-3x^2h+y^4(\frac{\partial f}{\partial x})=0$$

を得る．

6-2: $b_2h,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$ の *syzygy* 加群のグレブナー基底は

{[-6,0,z,0],[0,-2*y^5,z*x^2,0],[0,-x^3-3*z^2,0,3*z*x^2],[0,0,-x^3-3*z^2,6*y^5]}

となる．よって，*generalized integral dependence relation*

$$-6yh+y^4(\frac{\partial f}{\partial y})=0$$

を得る．

6-3: $b_3h,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$ の *syzygy* 加群のグレブナー基底は

{[-9,-y^4*x,0,3*z*y^4],[0,-2*y^5,z*x^2,0],[0,-x^3-3*z^2,0,3*z*x^2],
[0,0,-x^3-3*z^2,6*y^5]},

となる．よって，*generalized integral dependence relation*

$$-9z^2h+\left(-xy^4(\frac{\partial f}{\partial x})+3y^4z\frac{\partial f}{\partial z}\right)=0$$

を得る．

• $k=2$ のとき，$J_2 = Jh + J^2 = \langle \frac{\partial f}{\partial x}h, \frac{\partial f}{\partial y}h, \frac{\partial f}{\partial z}h, (\frac{\partial f}{\partial x})^2, (\frac{\partial f}{\partial y})^2, (\frac{\partial f}{\partial z})^2, (\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y}), (\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial z}), (\frac{\partial f}{\partial y})(\frac{\partial f}{\partial z})\rangle$ となる．

1: イデアル商 $J_2 : \langle h^2\rangle \subset \mathbb{C}[x,y,z]$ の基底は $Q_2 = \{x^2, y, z\}$ である．

2: ベクトル空間 H_{Q_2} の基底は $\left\{[\begin{array}{c} 1 \\ xyz \end{array}], [\begin{array}{c} 1 \\ x^2yz \end{array}]\right\}$ となる．

3: $Ann_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{Q_2})$ のスタンダード基底は $G_2 = \{x^2, y, z\}$ である．

4: イデアル商 $Q_2 : \langle b_1\rangle$, $Q_2 : \langle b_2\rangle$, $Q_2 : \langle b_3\rangle$ の基底は明らかに $\{1\}$.

5: $u = 1$ とする．

6-1: スタンダード基底 G_2 内の *2* つの元 x^2, y は，$k=1$ のときに関係式が得られているので，その関係式に h を掛けることで *generalized integral dependence relation* を得ることができる．よって，本質的に計算が必要になるのは z のときのみである．

6-2: zh^2, J_2 の *syzygy* 加群のグレブナー基底から第一成分が定数のものは
`[-54,0,0,0,0,0,0,0,-y^3*x,0,3*z*y^3]`
となる．したがって，*generalized integral dependence relation* は

$$-54zh^2 + \left(-xy^3(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y}) + 3y^3z(\frac{\partial f}{\partial y})(\frac{\partial f}{\partial z})\right) = 0$$

となる．

• $k=3$ のとき，
$J_3 = Jh^2 + J^2h + J^3 = \langle \frac{\partial f}{\partial x}h^2, \frac{\partial f}{\partial y}h^2, \frac{\partial f}{\partial z}h^2, (\frac{\partial f}{\partial x})^2h, (\frac{\partial f}{\partial y})^2h, (\frac{\partial f}{\partial z})^2h, (\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})h, (\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial z})h, (\frac{\partial f}{\partial y})(\frac{\partial f}{\partial z})h,$
$(\frac{\partial f}{\partial x})^3, (\frac{\partial f}{\partial x})^2(\frac{\partial f}{\partial y}), (\frac{\partial f}{\partial x})^2(\frac{\partial f}{\partial z}), (\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})^2, (\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial z})^2, (\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})(\frac{\partial f}{\partial z}), (\frac{\partial f}{\partial y})^3, (\frac{\partial f}{\partial y})^2(\frac{\partial f}{\partial z}), (\frac{\partial f}{\partial y})(\frac{\partial f}{\partial z})^2, (\frac{\partial f}{\partial z})^3\rangle$
となる．

1: $J_3 : \langle h^3\rangle$ の基底は $Q_3 = \{1\}$ となる．

2: $\mathrm{Ann}(H_{Q_1}) = \langle 1\rangle$　となる．したがって，*integral number* は *3* である．

3-1: h^3, J_3 の *syzygy* から第一成分が定数のものは
`[324,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,y^2*x,0,0,0,-3*z*y^2,0,0]`
である．すなわち，*generalized integral dependence relation* は

$$324h^3 + \left(xy^2(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})^2 - 3y^2z(\frac{\partial}{\partial y})^2(\frac{\partial f}{\partial z})\right) = 0$$

となる．このとき，$xy^2(\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})^2 - 3y^2z(\frac{\partial}{\partial y})^2(\frac{\partial f}{\partial z}) \in \mathcal{I}_O^3$ である．

謝辞

本研究は日本学術振興会科学研究補助金 若手研究 (B) 課題番号 15K17513 と基盤研究 (C) 課題番号 15K04891 の助成を受けております.

参 考 文 献

[1] Kato, M., The b-function of μ-constant deformation of $x^7 + y^5$. *Bull. College of Science, Univ. of the the Ryukyus*, Vol. **32**, pp. 5-10, 1981.

[2] Kato, M., The b-function of μ-constant deformation of $x^9 + y^4$. *Bull. College of Science, Univ. of the the Ryukyus*, Vol. **33**, pp. 5-8, 1982.

[3] 加藤満生, 田島慎一, 孤立特異点変形と f^s のパラメータ付き偏微分作用素環での annihilator について, 数理解析研究所講究録, Vol.1955, pp. 168–179, 2015.

[4] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーの計算法とそれを用いたスタンダード基底・グレブナー基底について, 数理解析研究所講究録, Vol.1764, pp. 102–125, 2011.

[5] Nabeshima, K., and Tajima, T., Computing Tjurina stratifications of μ-constant deformations via parametric local cohomology systems, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, Vol.27, pp. 451–467, 2016.

[6] Nabeshima, K., and Tajima, T., Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals, Journal of Symbolic Computation, Vol.82, pp. 91–122, 2017.

[7] Nabeshima, K., and Tajima, T., Solving parametric ideal membership problems and computing integral numbers in a ring of convergent power series via comprehensive Gröbner systems submitted. 2018.

[8] Noro, M., and Takeshima, T., Risa/Asir - A computer algebra system. *Proc. ISSAC 1992*, pp. 387–396, ACM, 1992. `http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html`

[9] 渋田敬史，田島慎一，CM 局所環の準素イデアルの Hilbert-Samuel 重複度の計算アルゴリズムについて．数理解析研究所講究録, Vol. **2019**, pp.80–84, 2017.

[10] Shibuta, F., and Tajima, S., An algorithm for computing the Hilbert-Samuel multiplicities and reductions of zero-dimensional ideal of Cohen-Macaulay local rings. *arXiv:1710.01435v1 [math.AC]*, 4 Oct, 2017.

[11] Swanson, I., and Huneke, C., Integral Closure of Ideals. Rings, and MOdules, *Cambridge University Press*, 2006.

[12] 田島慎一, 加藤満生, 鍋島克輔, Integral dependence relation と半擬斉次孤立特異点の b-関数, 日本数学会秋季総合分科会 (函数論), 山形大学, 2017.　(口頭発表)

[13] 田島慎一, 鍋島克輔, 収束冪級数環における integral dependence relation と局所コホモロジー,2015 年度日本数学会年会 (函数論), 明治大学, 2015. (口頭発表)

[14] Tajima, S., and Nakamura, Y., Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. **44**, pp.435–448, 2009.

[15] Tajima, S and Nakamura, Y., Algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities.. *Publications of the Reserch Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ.*, Vol. **48**, pp.21–43, 2012.

[16] Tajima, S., Nakamura, Y., and Nabeshima, K., Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, Vol. **56**, pp.341–361, 2009.