数理解析研究所講究録 第2104巻 2019年 103-110

3次素数アンチ陣の生成
An Enumeration of Prime Antimagic Squares of Order 3

中川 幸一

KOUICHI NAKAGAWA

埼玉大学大学院 理工学研究科

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, SAITAMA UNIVERSITY *

高橋 太郎

TARO TAKAHASHI †

さいたま市立大宮北高等学校

SAITAMA MUNICIPAL OMIYA KITA HIGH SCHOOL ‡

Abstract

素数アンチ陣を n 次（$n \times n$ 個の正方形）の方陣に異なる素数を配置し，縦・横・対角線のいずれの列についても，その列の合計が異なりかつ連続した素数であるようなものと定義する．これらを Mathematica を用いて，すべての素数を昇順に並べた整数の数列を作成したので，その手法と成果について報告する．

Abstract

Define a prime antimagic square as an n *timesn* array of different primes such that each row, column, and main diagonal produces a different sum such that these sums form a sequence of consecutive primes. We used Mathematica to construct an integer number sequence in which all prime numbers are arranged in ascending order. So, we report on the method and results about these.

1 魔方陣と特殊な魔方陣

1.1 魔方陣

n 次（$n \times n$ 個の正方形）魔方陣とは以下の性質を満たす方陣のことを言う [1]．

- $n \times n$ 個の正方形の方陣に数字が配置されている．
- 縦・横・対角線のいずれの列についても，その列の合計が同じになっている．

特に，1 から n^2 までの数字を 1 つずつ用いた魔方陣の列の和は $\frac{n(n^2+1)}{2}$ となることが知られている．

*k-nakagawa@h6.dion.ne.jp

†本研究は埼玉大学ハイグレード理数高校生育成プログラム (科学技術振興機構 (JST) グローバルサイエンスキャンパス事業) の助成を受けたものです．

‡tarou23601@gmail.com

	9	8	7	→	24
	2	1	6	→	9
	3	4	5	→	12
↙	↓	↓	↓	↘	
11	14	13	18	15	

図 1: ヘテロ陣

	4	10	5	→	19
	2	3	7	→	12
	9	1	6	→	16
↙	↓	↓	↓	↘	
17	15	14	18	13	

図 2: アンチ陣

	31	37	41	→	109
	53	59	61	→	173
	67	43	47	→	157
↙	↓	↓	↓	↘	
167	151	139	149	137	

図 3: 素数ヘテロ陣

	3	5	29	→	37
	37	17	7	→	61
	13	19	11	→	43
↙	↓	↓	↓	↘	
59	53	41	47	31	

図 4: 素数アンチ陣

1.2　ヘテロ陣

図 1 のように n 次の方陣に 1 から n^2 の数字を配置し，縦・横・対角線のいずれの列についても，その列の合計が同じものを持たないときヘテロ陣という [2]．ここでは，方陣に 1 から n^2 ではなく，異なる n^2 個の数字を配置して作られたヘテロ陣も広義のヘテロ陣として扱う．

1.3　アンチ陣

図 2 のようにヘテロ陣のうち，縦・横・対角線のいずれの列についての合計が連続した整数となるものをアンチ陣という [3]．広義のヘテロ陣にアンチ陣の制約条件を付けた方陣も広義のアンチ陣として扱う．

1.4　素数ヘテロ陣

図 3 のように n 次の方陣に相異なる素数を配置し，縦・横・対角線のいずれの列についても，その列の合計が同じものを持たない素数となるとき素数ヘテロ陣という [4][5]．

図 3 における各列の合計が現れる箇所は次のようになっており，連続した素数とはなっていない．

$$\boxed{109}, 113, 127, 131, \boxed{137}, \boxed{139}, \boxed{149}, \boxed{151}, \boxed{157}, 163, \boxed{167}, \boxed{173}$$

1.5　素数アンチ陣

図 4 のように素数ヘテロ陣のうち，縦・横・対角線のいずれの列についての合計が連続した素数となるものを素数アンチ陣ということにする．

図 4 における各列の合計が現れる箇所は次のようになっており，連続した素数となっている．

$$29, \boxed{31}, \boxed{37}, \boxed{41}, \boxed{43}, \boxed{47}, \boxed{53}, \boxed{59}, \boxed{61}, 67$$

2 提案手法

素数アンチ陣は，縦・横・対角線のいずれの列についての合計が連続した素数であるので，これらの素数を $a \sim a+7$ 番目の 8 つの素数であるとする．また, 唯一の偶数の素数である 2 が魔方陣の要素として含まれると, 2 を含む列の合計も偶数となってしまうため，2 番目以降の素数 $(=3)$ から考えるとする．さらに, 以下で定義する PrimeList というリストは $a+6$ 番目までは求まっているものとする．このとき，以下の手順により素数アンチ陣を求める．

1. PrimeList[a+7]: $2 \sim a+6$ 番目の素数から 3 つを選んで和を取ったとき，その値が $a+7$ 番目の素数と等しいもののリストを生成
2. PrimeAntiList1[a]: PrimeList[a]〜PrimeList[a+7] から 3 つを選んでその中から各一つずつを選んで 1 つの組を作り，それらの組の構成要素が全て異なるもののリストを生成（行の条件はクリア）
3. PrimeAntiList2[a]: 全行内の成分の並び替えを作り，行と列を入れ替えたもののリストを生成（列（元では行）の条件はクリア）
4. PrimeAntiList3[a]: PrimeAntiList2[a] の各行（元では列）の和が全て素数のもののリストを生成（行と列の条件はクリア）
5. PrimeAntiList4[a]: 各行と各列の和が全て異なるもののリストを生成（行と列の条件はクリア）
6. PrimeAntiList5[a]: アンチ陣となり得る候補のリストを生成（行と列の条件はクリア）
7. PrimeAntiList6[a]: PrimeAntiList5[a] の各斜めの和が全て素数のもののリストを生成（行と列と対角線の条件はクリア）
8. PrimeAntiList7[a]: 各行と各列と各斜めの和が全て異なるもののリストを生成（行と列と対角線の条件はクリア）
9. PrimeAntiList8[a]: アンチ陣となり得る候補のリストを生成（行と列と対角線の条件はクリア）
10. PrimeAntiList9[a]: PrimeAntiList8[a] から同型除去したもののリストを生成

2.1 PrimeList

まず始めに，3 つの素数の和が $a+7$ 番目の素数となるような組を考える．これらは当然 $2 \sim a+6$ 番目の素数からなるリストとなっている．

2.2 PrimeAntiList1

まず始めに横に関して条件を満たすものを作っていく．3 つの横の列の合計が $a \sim a+7$ 番目までの素数のうちのどれか 3 つであるようにする．即ち，PrimeList[a]〜PrimeList[a+7] から 3 種類を選ぶ．これらの各リストから 1 つずつを選び，選んだ 9 つの数字が被らないようにする．これにより行が素数である条件はクリアとなる．

2.3 PrimeAntiList2

今，行では条件を満たしているため，行内で数字を並び替えても行での和は変化しない．この性質を用いて次のステップのために全行内の成分の並び替えを作り，さらに Mathematica の性質上列ではなく行で考えた方が作業がらくなので，行と列を入れ替える．これにより列（元では行）が素数である条件はクリアとなる．

2.4 PrimeAntiList3

並び換えにより縦の条件は満たしているので，次に縦の条件を満たすものを作っていく．今，PrimeAntiList2 の各列では条件を満たしており，全パターンの並び換えが作られているので，このうち行の和が全て素数のものを選ぶ．これにより行と列が素数である条件はクリアとなる．

2.5 PrimeAntiList4

PrimeAntiList3 では行と列の計 6 種類の列の和が素数となっているが，重複しているものがあるので，これらを取り除く．

2.6 PrimeAntiList5

PrimeAntiList4 では，6 つの異なる素数が現れていたとしても，これらが全て $a \sim a+7$ 番目の素数の範囲に入っていないと素数アンチ陣の条件を満たさなくなるので，範囲外の素数を含むリストを取り除く．（ここで，8 つの連続した素数という条件だけならば，最大の素数と最小の素数の順番の差が 7 以下であるものを選ぶようにしても良いが，順次 a の値を変化させて調べていくので，今回のように強めに絞ることにした．）

2.7 PrimeAntiList6

最後に対角線の条件を満たすものを作っていく．PrimeAntiList5 のうち対角線の和が全て素数のものを選ぶ．これにより行と列と対角線が素数である条件はクリアとなる．

2.8 PrimeAntiList7

PrimeAntiList6 では行と列と対角線の計 8 種類の列の和が素数となっているが，重複しているものがあるので，これらを取り除く．

2.9 PrimeAntiList8

PrimeAntiList7 では，8 つの異なる素数が現れていたとしても，これらが全て $a \sim a+7$ 番目の素数の範囲に入っていないと素数アンチ陣の条件を満たさなくなるので，範囲外の素数を含むリストを取り除く．

2.10 PrimeAntiList9

PrimeAntiList8 から回転及び反転して重なるもの（4 次二面体群）の同型除去を行う．

2.11 それぞれのリストの生成数

以上の提案手法を実行したときの各リストの大きさは表 1 のようになった．

3 生成物

3	5	29		7	5	29		3	7	37		7	19	17		7	23	13		7	41	11		11	3	29
37	17	7	,	37	13	3	,	47	19	5	,	47	23	3	,	41	29	3	,	47	17	3	,	23	31	7
13	19	11		17	19	11		11	17	31		13	5	41		11	19	31		19	13	29		13	37	17

	11	3	29		11	19	41		7	43	23		3	43	37		7	47	19		11	31	17		13	17	37
,	47	19	7	,	43	7	3	,	53	5	3	,	47	19	5	,	53	23	3	,	43	23	7	,	43	11	7
	13	37	17		13	17	29		19	11	41		11	17	31		11	13	37		13	29	37		23	31	29

	13	31	23		3	31	37		13	11	47		13	23	37		7	47	19		7	41	31		17	41	31
,	53	19	7	,	43	29	11	,	37	19	3	,	47	17	3	,	61	23	5	,	73	23	5	,	43	23	5
	17	3	41		13	7	41		17	43	29		29	19	31		29	13	37		17	3	53		19	3	61

	3	59	11		5	13	53		5	31	47		7	53	37		7	59	23		13	59	29		3	17	59
,	61	23	19	,	61	37	3	,	73	13	3	,	59	11	3	,	71	29	3	,	71	23	3	,	67	29	7
	37	7	53		7	29	47		19	29	53		23	19	61		19	13	47		19	7	47		13	43	41

	3	23	53		13	17	59		13	23	53		17	41	31		3	37	43		5	43	53		7	29	43
,	61	29	13	,	61	19	3	,	61	19	3	,	67	29	5	,	73	29	7	,	67	37	3	,	59	41	3
	19	37	41		23	43	41		29	37	41		19	3	61		31	23	47		7	29	47		17	19	61

	11	43	47		13	23	43		13	41	29		13	43	23		13	43	41		13	53	31		17	37	47
,	61	19	3	,	67	29	7	,	67	37	3	,	53	37	7	,	47	29	7	,	59	23	7	,	61	19	3
	31	17	59		17	31	59		23	31	47		41	3	59		19	31	59		29	3	71		31	23	53

	19	43	41		11	59	43		13	29	41		17	43	53		5	41	43		7	53	41		11	43	59
,	47	37	13	,	61	31	17	,	71	31	7	,	71	31	7	,	73	31	3	,	71	43	13	,	73	29	7
	23	3	53		29	7	47		17	37	59		19	23	41		23	37	67		19	11	59		19	17	61

	11	47	31		11	53	37		13	23	61		13	29	61		13	43	47		13	47	53		13	53	23
,	67	43	3	,	61	43	3	,	73	29	7	,	53	43	11	,	53	29	7	,	59	43	7	,	59	41	7
	23	13	73		17	13	73		17	37	59		23	37	41		31	37	59		31	17	41		37	3	73

	13	53	23		13	59	29		17	19	53		17	31	61		19	43	41		3	41	59		3	53	41
,	59	43	7	,	71	31	7	,	59	43	11	,	67	43	3	,	47	29	13	,	71	31	5	,	71	31	7
	31	11	71		43	17	53		31	41	37		23	29	37		31	37	59		23	37	67		29	23	79

	3	61	37		3	61	37		3	67	31		3	67	37		3	67	43		3	73	31		19	47	43
,	73	41	13	,	83	43	5	,	71	37	23	,	79	41	11	,	73	23	5	,	83	43	5	,	59	37	17
	31	29	53		17	23	67		29	5	73		31	19	53		31	13	83		23	11	67		23	13	71

,

3	43	61
101	29	7
23	37	71

,

3	59	47
97	29	13
37	19	71

,

3	61	43
83	37	11
23	41	73

,

3	61	43
97	29	13
37	23	71

,

3	67	37
89	29	19
47	13	71

,

3	67	61
101	29	7
23	13	71

,

5	31	67
79	41	11
29	37	61

,

5	43	59
89	31	11
19	53	67

,

5	59	43
79	37	23
29	41	61

,

5	61	47
83	37	17
19	41	67

,

5	67	31
79	29	23
53	13	73

,

5	79	29
83	37	17
43	23	61

,

5	79	43
97	37	3
29	23	61

,

7	41	61
83	53	3
23	13	67

,

7	41	61
107	29	3
23	37	67

,

7	43	53
89	29	13
31	37	71

,

7	59	61
107	29	3
23	19	67

,

7	61	41
89	29	19
43	13	71

,

7	83	41
89	37	13
31	17	59

,

11	37	61
107	29	3
13	41	73

,

11	61	31
79	29	23
47	19	73

,

11	73	43
97	37	3
23	29	61

,

13	23	67
83	53	3
17	31	61

,

13	43	47
83	29	19
31	37	71

,

13	47	67
107	29	3
17	31	61

,

13	53	37
67	41	31
29	43	59

,

13	59	67
61	41	7
29	31	53

,

13	71	43
89	37	11
29	31	53

,

13	83	41
89	31	7
37	17	59

,

17	67	47
73	41	13
19	5	79

,

19	41	53
67	61	3
23	37	47

,

19	71	37
73	29	7
47	31	59

,

31	59	37
67	29	13
41	43	53

,

5	37	71
79	43	17
23	47	61

,

5	41	67
97	31	11
29	37	71

,

5	61	47
83	43	13
19	23	89

,

5	67	59
79	31	17
23	41	73

,

5	71	37
73	43	23
29	13	89

,

11	79	59
101	31	7
19	17	71

,

11	79	59
103	31	5
23	17	67

,

13	41	59
101	31	7
17	37	83

,

13	71	29
89	31	19
47	7	83

,

17	61	53
73	31	5
23	47	79

,

17	67	53
71	31	37
43	11	59

,

17	67	53
89	31	19
43	11	59

,

23	79	29
89	43	7
37	5	71

,

29	61	41
83	31	13
37	47	53

,

3	59	47
79	53	19
31	37	71

,

3	59	47
103	41	7
43	13	83

,

3	61	67
113	31	5
11	47	79

,

3	67	61
107	23	7
29	37	83

,

3	67	61
107	31	11
17	41	79

,

3	79	31
89	53	7
47	19	71

,

3	83	41
109	31	11
37	23	79

,

11	59	67
73	37	3
47	13	79

,

11	61	67
101	23	3
19	53	79

,

11	73	67
101	23	3
19	41	79

,

17	53	67
73	31	5
41	29	79

,

17	59	61
67	31	11
47	23	79

,

19	59	73
89	37	5
29	13	71

,

19	71	61
101	23	3
29	43	67

,

23	19	71
83	37	11
31	53	67

,

23	31	59
83	37	11
43	41	67

,

23	41	73
61	37	11
29	53	67

,

23	53	73
61	37	11
29	41	67

,

23	67	61
79	31	3
47	11	73

,

29	13	71
89	37	5
31	59	61

,

29	41	67
73	37	3
47	31	61

,

3	53	83
101	43	7
23	41	67

,

3	71	53
107	37	5
47	31	73

,

3	73	61
83	43	23
53	11	67

,

3	83	41
107	43	7
29	5	103

,

3	83	53
107	43	7
41	23	67

,

3	89	47
101	43	7
23	5	103

,

5	79	67
89	47	3
43	23	61

,

7	53	71
101	47	3
31	13	83

,

11	53	73
109	37	5
29	23	79

,

17	37	83
103	43	3
31	47	53

,

19	29	79
97	47	7
23	37	71

,

19	53	59
107	37	7
31	23	83

,

19	59	53
101	47	3
37	7	83

,

29	43	59
97	47	7
31	23	73

,

29	61	59
71	37	5
31	53	73

参 考 文 献

[1] Madachy, J. S. "Magic and Antimagic Squares." Ch. 4 in Mathematics on Vacation. New York: Scribner, pp. 85-113, 1966.

[2] Duncan, D. "Problem 86," Mathematics Magazine, Vol. 24, No. 3 (Jan. - Feb., 1951), pp. 166.

[3] Lindon, J. A. "Anti-Magic Squares." Recr. Math. Mag., No. 7, 16-19, Feb. 1962.

[4] Heinz, H. "Anti-Magic Squares." (http://www.magic-squares.net/anti-ms.htm) Retrieved 2017-12-19.

[5] Heinz, H. "Prime Number Heterosquares." (http://recmath.org/Magic Squares/unususqr.htm♯Prime Number Heterosquares) Retrieved 2017-12-19.

表 1: 計算結果

a	PL	$PAL1$	$PAL2$	$PAL3$	$PAL4$	$PAL5$	$PAL6$	$PAL7$	$PAL8$	$PAL9$
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	8	288	21	0	0	0	0	0	0
9	2	38	1368	135	40	0	0	0	0	0
10	3	221	7956	902	312	0	0	0	0	0
11	4	613	22068	2353	702	28	416	184	16	2
12	5	1661	59796	6259	2242	64	872	408	0	0
13	6	3761	135396	15155	6290	202	2504	944	0	0
14	6	6992	251712	27020	11346	468	6320	2752	56	7
15	9	12572	452592	48390	21815	492	3320	1576	8	1
16	11	22744	818784	87724	40979	1282	13312	6184	40	5
17	13	37448	1348128	147192	71937	1548	13912	6656	24	3
18	13	58654	2111544	218472	111379	1460	11632	6016	8	1
19	15	94317	3395412	351533	183624	1180	10072	5536	16	2
20	18	135902	4892472	494571	272724	2762	27920	15336	48	6
21	17	198347	7140492	700928	395142	1728	21784	12992	40	5
22	19	262621	9454356	937219	539182	3738	35648	21200	88	11
23	25	364203	13111308	1266780	736968	8248	52200	31064	24	3
24	26	490047	17641692	1694962	1016582	9200	56816	33944	120	15
25	28	688858	24798888	2343662	1433102	7372	47848	29352	72	9
26	32	943762	33975432	3094431	1910297	9118	55664	34704	0	0
27	31	1154636	41566896	3846451	2439426	11656	84768	55672	264	33
28	37	1566805	56404980	5047502	3263568	17774	101688	65928	112	14
29	32	1904618	68566248	6278842	4159812	13154	90080	60032	168	21
30	39	2510560	90380160	8081905	5417560	23574	122600	80784	120	15