数理解析研究所講究録 第2108巻 2019年 124-129



# 複素線形計画問題に対する内点法

小崎　敏寛 (Toshihiro Kosaki)*
ステララリンク株式会社 (Stera Link, Co., Ltd.)

**概 要**

新しい写像を導入し，複素線形計画問題を考える．主双対内点法のアルゴリズムを実装し，数値実験を行う．

## 1　はじめに

### 1.1　理論

最適化問題として最小化問題を考える．

#### 1.1.1　弱双対定理

考える問題を主問題とし，その双対問題を考える．次の定理がなりたつクラスの問題を考える．

**定理 1.1 (弱双対定理)** 主問題の全ての実行可能解での目的関数値は双対問題の全ての実行可能解での目的関数値以上である．

この定理より，実行可能解で主問題の目的関数値と双対問題の目的関数値が一致するとき，最適解が得られていることがわかる．

### 1.2　応用

複素数を変数とする最適化問題としては次のものがある．
FIR [5], SOCP [4], QCQP [1], SDP [2].

## 2　線形計画問題に対する内点法

### 2.1　定式化

標準形の線形計画問題は次のようになる．

$$\min c^T x \text{ s.t. } Ax = b,\ x \geq 0. \tag{1}$$

*toshihirokosaki@gmail.com

ここで，$c \in \Re^n, A \in \Re^{m\times n}, b \in \Re^m$ は定数，$x \in \Re^n$ は変数．不等号は要素ごとの不等号で定める．双対問題は次のようになる．

$$\max b^T y \text{ s.t. } A^T y + z = c,\ z \geq 0. \tag{2}$$

ここで，変数は $(y, z)$．

主問題と双対問題の実行可能解での目的関数値の間に弱双対定理

$$c^T x - b^T y \geq 0 \tag{3}$$

がなりたつ．

### 2.2 フィージブル内点法

実行可能な内点列を生成する主双対内点法であるフィージブル内点法 [3, 6] は理論的に良い性質を持つ．

### 2.3 インフィージブル内点法

実行可能とは限らない内点列を生成する主双対内点法であるインフィージブル内点法 [3, 6] は実際に数値的に問題を解くことができる良い性質を持つ．

## 3 複素線形計画問題に対する内点法

### 3.1 新しい写像

複素数のベクトル $x$ と $y$ に対して，次の内積のような写像を導入する．

$$< x, y >:= \frac{\bar{x}^T y + x^T \bar{y}}{2} \tag{4}$$

ただし $\bar{(\cdot)}$ は複素共役．

$< x, y >$ は実数値をとり，

$$\begin{gathered} < (x+y), z >=< x, z > + < y, z >,\ < x, (y+z) >=< x, y > + < x, z > \\ \text{実数 } \lambda \in \Re \text{ について，} < \lambda x, y >= \lambda < x, y >,\ < x, \lambda y >= \lambda < x, y > \\ < x, y >=< y, x > \end{gathered}$$

がなりたつ．

### 3.2 定式化

考える問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\min\ & < c, x > \\
\text{s.t.}\ & < a_1, x >= b_1 \\
& \vdots \\
& < a_m, x >= b_m \\
& x \geq 0 \\
& x \in \mathcal{C}^n
\end{aligned}
\tag{P-C}
$$

ただし，定数は $a_1, \ldots,\ a_m \in \mathcal{C}^n,\ b_1, \ldots,\ b_m \in \Re,\ c \in \mathcal{C}^n$, 変数は $x \in \mathcal{C}^n$．複素数ベクトルの不等号を実部ベクトルと虚部ベクトルが非負とする．$\mathcal{C}^n \ni s, t \geq 0$ ならば $< s, t > \geq 0$ がなりたつ．

双対問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\max\ & b^T y \\
\text{s.t.}\ & A^T y + z = c \\
& z \geq 0 \\
& y \in \Re^m,\ z \in \mathcal{C}^n
\end{aligned}
\tag{D-C}
$$

ただし，行列 $A^T$ を

$$
A^T := [a_1, \cdots, a_m] \tag{5}
$$

とし，変数を $(y, z)$ とする．

すると，以下のように弱双対定理がなりたつ．

$$
\begin{aligned}
< c, x > - b^T y &= < A^T y + z, x > - \sum_{i=1}^{m} < a_i, x > y_i \\
&= < A^T y, x > + < z, x > - \sum_{i=1}^{m} < a_i, x > y_i \\
&= < [y_1 a_1 + \cdots + y_m a_m], x > + < z, x > - \sum_{i=1}^{m} < a_i, x > y_i \\
&= < y_1 a_1, x > + \cdots + < y_m a_m, x > + < z, x > - \sum_{i=1}^{m} < a_i, x > y_i \\
&= y_1 < a_1, x > + \cdots + y_m < a_m, x > + < z, x > - \sum_{i=1}^{m} < a_i, x > y_i \\
&= < x, z > \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

最適条件は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&< a_1, x >= b_1 \\
&\quad\vdots \\
&< a_m, x >= b_m \\
&A^T y + z = c \\
&< x, z >= 0 \\
&x \geq 0,\ \ x \in \mathcal{C}^n \\
&z \geq 0,\ \ z \in \mathcal{C}^n.
\end{aligned} \tag{6}
$$

解析的センターは, $\mu > 0$ として，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&< a_1, x >= b_1 \\
&\quad\vdots \\
&< a_m, x >= b_m \\
&A^T y + z = c \\
&< x_i, z_i >= \mu \\
&x > 0,\ \ x \in \mathcal{C}^n \\
&z > 0,\ \ z \in \mathcal{C}^n.
\end{aligned} \tag{7}
$$

## 3.3 アルゴリズム

インフィージブル内点法を考える．

Newton 方向は次の方程式の解 $(\Re(\Delta x), \Im(\Delta x), \Delta y, \Re(\Delta z), \Im(\Delta z))$ として得られる．

$$
\begin{bmatrix}
\Re(A) & \Im(A) & O & O & O \\
O & O & A^T & I & Ii \\
\mathrm{Diag}(\Re(z_i)) & \mathrm{Diag}(\Im(z_i)) & O & \mathrm{Diag}(\Re(x_i)) & \mathrm{Diag}(\Im(x_i))
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Re(\Delta x) \\ \Im(\Delta x) \\ \Delta y \\ \Re(\Delta z) \\ \Im(\Delta z)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 - < a_1, x > \\ \vdots \\ b_m - < a_m, x > \\ c - A^T y - z \\ \gamma\mu - < x_1, z_1 > \\ \vdots \\ \gamma\mu - < x_n, z_n >
\end{bmatrix}. \tag{8}
$$

整理すると,

$$
\begin{bmatrix}
\tilde{A} & O & O \\
O & A^T & \tilde{I} \\
\tilde{Z} & O & \tilde{X}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Delta\tilde{x} \\ \Delta y \\ \Delta\tilde{z}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
r_p \\ r_d \\ (\gamma\mu - < x_i, z_i >)_i
\end{bmatrix}, \tag{9}
$$

となる．ただし，

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A} := [\Re(A),\ \Im(A)]\,,\ \tilde{I} := [I,\ Ii],\\
&\tilde{Z} := [\mathrm{Diag}(\Re(z_i)),\ \mathrm{Diag}(\Im(z_i))]\,,\ \tilde{X} := [\mathrm{Diag}(\Re(x_i)),\ \mathrm{Diag}(\Im(x_i))]\,,\\
&\Delta\tilde{x} := (\Re(\Delta x);\Im(\Delta x)),\ \Delta\tilde{z} := (\Re(\Delta z);\Im(\Delta z)),\\
&r_p := \begin{pmatrix} b_1- < a_1, x > \\ \vdots \\ b_m- < a_m, x > \end{pmatrix},\ r_d := c - A^T y - z.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

整理すると，

$$
\tilde{A}\tilde{Z}^{-1}\tilde{X}\tilde{I}^{-1}A^T\Delta y = \tilde{A}\tilde{Z}^{-1}\tilde{X}\tilde{I}^{-1}r_d - \tilde{A}\tilde{Z}^{-1}\{(\gamma\mu- < x_i, z_i >)_i\} + r_p \tag{11}
$$

を解き，$\Delta y$ を求め，

$$
\Delta\tilde{z} = \tilde{I}^{-1}(r_d - A^T\Delta y) \tag{12}
$$

と $\Delta\tilde{z}$ を求め，

$$
\Delta\tilde{x} = -\tilde{Z}^{-1}\tilde{X}\Delta\tilde{z} + \tilde{Z}^{-1}\{(\gamma\mu- < x_i, z_i >)_i\} \tag{13}
$$

と $\Delta\tilde{x}$ を求められる．

式 (11) の左辺の係数は次のようになる．

$$
\Re\begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}\mathrm{Diag}(\Re(z_i)^{-1}\Re(x_i))\Re\left(a_1, \ldots, a_m\right) + \Im\begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}\mathrm{Diag}(\Im(z_i)^{-1}\Im(x_i))\Im\left(a_1, \ldots, a_m\right). \tag{14}
$$

したがって，要素が実数の行列になる．

## 4 数値実験

次の問題例を考える．

$$
\begin{aligned}
\min\ & < 1, x > \\
\text{s.t.}\ & < 1 + i, x >= 1 \\
& x \geq 0 \\
& x \in \mathcal{C}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

双対問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\max\ & y \\
\text{s.t.}\ & (1 + i)y + z = 1 \\
& z \geq 0 \\
& z \in \mathcal{C}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

最適解は，$x^* = i,\ y^* = 0,\ z^* = 1$.

Scilab で実装し，100 反復で，$x^* = 1.461 \times 10^{-97} + 1.00759i$，$y^* = -7.125 \times 10^{-13}$，$z^* = 1 + 7.125 \times 10^{-13}i$ が得られた．

## 5　まとめと今後の課題

本研究では，複素線形計画問題に対する主双対内点法を実装し，数値実験を行った．
今後の課題は，安定して大きな問題を解くことがある．

## 6　謝辞

この研究は京都大学数理解析研究所共同利用・共同拠点の援助を受けて行われました．

## 参考文献

[1] S. Bose, D. F. Gayme, K. M. Chandy, and S. H. Low, Quadratically constrained quadratic programs on acyclic graphs with application to power flow, arXiv, 2012.

[2] J. Ch. Gilbert and C. Josz, Plea for a semidefinite optimization solver in complex numbers, Optimization Online, 2017.

[3] 小島政和，土谷隆，水野眞治，矢部博,「内点法」，朝倉書店，2004.

[4] M. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, and H. Lebret, Applications of second-order cone programming, Linear Algebra and its Applications, 284, 193-228, 1998.

[5] 陶山健仁,「ディジタルフィルタ 原理と設計法」, 科学情報出版株式会社, 2018.

[6] S. J. Wright, Primal-dual interior-point method, SIAM Publications, 1997.