

# 単調劣同次写像に付随する漸近写像の 最適化問題への応用

神奈川県大学・工学部 進藤 晋

Susumu Shindoh

Faculty of Engineering, Kanagawa University

## 1 はじめに

Yates は 1995 年の論文 [9] で、電力制御 wireless system における干渉をモデル化するために、interference function の公理的フレームワークを提案した。

Shindoh[6] は、Yates の定義した interference function が正の固有値および正の固有ベクトルをもつことを示し、固有値を利用した SIR (signal to interference ratio) 制約最適化問題の feasibility 条件を求め、最適解の性質を明らかにした。

本論文の目的は、interference function を特別な場合として含む非負象限上の単調劣同次写像が漸近写像を持つことを示し、その漸近写像の性質を用いて、SIR 最適化問題の feasibility を考察することである。

## 2 単調劣同次写像と漸近写像

$n$  次元実ユークリッド空間  $R^n$  の部分集合  $R_+^n$  および  $R_{++}^n$  を、 $R_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ ,  $R_{++}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$  で定義する。

$x, y \in R^n$  に対して、 $x \leq y$  を  $y - x \in R_+^n$ , すなわち、すべての  $i = 1, \dots, n$  に対して、 $x_i \leq y_i$  で定義する。このとき、 $\leq$  は  $R^n$  上の半順序となる。特に、 $x \in R_+^n$  のとき、 $x \geq 0$ ,  $x \in R_{++}^n$  のとき、 $x > 0$  と表記する。

写像  $f : R_+^n \rightarrow R_+^n$  について、 $0 \leq x \leq y$  ならば  $f(x) \leq f(y)$  を満たすとき、 $f$  は単調 (monotone) であるという。 $\alpha > 0, x \in R_+^n$  に対して、 $f(\alpha x) = \alpha f(x)$  を満たすとき、 $f$  は同次 (homogeneous) であるという。 $\alpha > 1, x \in R_+^n$  に対して、 $f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$  を満たすとき、 $f$  は劣同次 (subhomogeneous) であるという。また、 $\alpha > 1, x \in R_+^n$  ( $x \neq 0$ ) に対して、 $f(\alpha x) < \alpha f(x)$  を満たすとき、 $f$  は狭義劣同次 (strictly subhomogeneous) であるという ([3])。

**命題 1.**  $f : R_+^n \rightarrow R_+^n$  を連続な単調劣同次写像とする。任意の実数  $t > 0$  に対して、写像  $f_t : R_+^n \rightarrow R_+^n$  を

$$f_t(x) = \frac{1}{t} f(tx) \quad (x \in R_+^n)$$

で定義する。このとき、 $f_t$  は連続な単調劣同次写像となる。また、任意の  $x \in R_+^n$  および  $0 < s < t$  に対して、不等式  $f_t(x) \leq f_s(x)$  が成り立つ。

(証明) 定理の前半は明らかなので、後半の不等式を証明する．条件から、 $t/s > 1$  である．したがって、 $f$  の劣同次性を用いて、

$$f_t(x) = \frac{1}{t}f(tx) = \frac{1}{t}f\left(\frac{t}{s}sx\right) \leq \frac{1}{t}f(sx) = \frac{1}{s}f(sx) = f_s(x).$$

□

上の命題から、任意の  $x \in R_+^n$  に対して、

$$\lim_{t \uparrow \infty} f_t(x) = \lim_{t \uparrow \infty} \frac{1}{t}f(tx)$$

が存在することがわかる．この極限を  $f_\infty(x)$  で表す．このとき、以下が成り立つ：

**命題 2.**  $f_\infty : R_+^n \rightarrow R_+^n$  は連続な単調同次写像となる．また、任意の  $x \in R_+^n$  に対して、不等式  $f_\infty(x) \leq f(x)$  が成り立つ．

証明は、[5, 7] を参照．

命題 2 の写像  $f_\infty$  を  $f$  の漸近写像という．

連続な単調同次写像  $h : R_+^n \rightarrow R_+^n$  に対して、 $\|h^m\| = \sup\{\|h^m(x)\| : x \in R_+^n, \|x\| \leq 1\}$  が定義できる．ここで、 $\|x\|$  は  $x$  のノルム、 $h^m$  は  $h$  による  $m$  回の合成写像を表す．このとき、 $r(h) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|h^m\|^{1/m}$  が存在する ([3])． $r(h)$  を  $h$  のスペクトル半径という． $r(h)$  はノルムに依存しないことに注意する．以降の議論で、漸近写像  $f_\infty$  のスペクトル半径  $r(f_\infty)$  を用いる．

### 3 Standard Interference Function

ここで、Yates が定義した standard interference function について述べる．

**定義 1.** (Yates[9]) 次の公理を満たすとき、写像  $f : R_+^n \rightarrow R_+^n$  を *standard interference function* (以下 *standard IF* と略記) という：

- (1) (*positivity*)  $f(x) > 0$  for any  $x \in R_+^n$
- (2) (*monotonicity*)  $f(y) \geq f(x)$  for any  $y \geq x \geq 0$
- (3) (*scalability*)  $\alpha f(x) > f(\alpha x)$  for any  $x \in R_+^n$  and  $\alpha > 1$

注 1) 上の定義から、*standard IF* は単調狭義劣同次写像となる．

注 2) Axiom(1) は Axiom(2) および (3) から導かれる．

注 3) Yates[9] における議論は、*standard IF*  $f$  の連続性を仮定している．実際、以下はよく知られている ([1, 3, 5])．

- (1) *standard IF*  $f$  は  $R_{++}^n$  で連続である．
- (2)  $f$  の  $R_{++}^n$  への制限を  $f|_{R_{++}^n}$  で表す．このとき、 $f|_{R_{++}^n}$  は、連続性、Axiom(2) および (3) を保持するように  $R_+^n$  に一意的に拡張できる．すなわち、連続な *standard IF*  $F : R_+^n \rightarrow R_+^n$  が唯一つ存在し、 $F|_{R_{++}^n} = f|_{R_{++}^n}$  を満たす．

本論文では、*standard IF*  $f$  は  $R_+^n$  で連続であると仮定する．

## 4 SIR 制約最適化問題

$f : R_+^n \rightarrow R_+^n$  を連続な *standard IF* とする. SIR (signal to interference ratio) は, wireless network system 等の分野でよく用いられる指標である.  $i = 1, 2, \dots, n$  に対する SIR は

$$\text{SIR}_i(x) = \frac{x_i}{f_i(x)} \quad (1)$$

で定義される. ここで,  $f_i$  は写像  $f$  の第  $i$  成分を表す. SIR 制約は, 閾値ベクトル  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in R_{++}^n$  に対して,  $\text{SIR}_i(x) \geq \gamma_i, i = 1, \dots, n$  で与えられる.

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in R_{++}^n$  に対して, 写像  $\gamma \cdot f : R_+^n \rightarrow R_+^n$  を,  $\gamma \cdot f(x) = (\gamma_1 f_1(x), \dots, \gamma_n f_n(x))$  で定義する.

次の補題は, 定義 1 から明らかである.

**補題 1.**  $f : R_+^n \rightarrow R_+^n$  を *standard IF* とする. このとき, 任意の  $\gamma \in R_{++}^n$  に対して,  $\gamma \cdot f$  は *standard IF* である.

以下の最適化問題を考察する:

**最適化問題 SIR**

$$\begin{cases} \min & \|x\| \\ \text{s.t.} & x \in R_+^n \\ & \gamma \cdot f(x) \leq x \end{cases}$$

ここで,  $\|x\|$  は  $x$  の  $l_1$  ノルム,  $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$  を表す. 特に,  $x \geq 0$  ならば,  $\|x\| = \sum_{i=1}^n x_i$  である. 定義から,  $l_1$  ノルムは単調 (monotone), すなわち,  $0 \leq x \leq y$  ならば  $\|x\| \leq \|y\|$  である. さらに,  $0 \leq x \leq y$  かつ  $x \neq y$  ならば  $\|x\| < \|y\|$  となる.

不等式制約  $\gamma \cdot f(x) \leq x$  は,  $\gamma_i f_i(x) \leq x_i (i = 1, \dots, n)$ , すなわち,  $\text{SIR}_i(x) \geq \gamma_i, (i = 1, \dots, n)$  を表している. 最適化問題 SIR は, SIR の下限を与えて, 総出力を最小化する問題である.

最適化問題 SIR の feasibility, 最適解の存在と性質を明らかにするために, *standard IF* に対する固有値および固有ベクトルの定義を与える.

**定義 2.** 写像  $f : R_+^n \rightarrow R_+^n$  を連続な *standard IF* とする.  $x \in R_+^n (x \neq 0)$  および実数  $\lambda \geq 0$  が存在して,  $f(x) = \lambda x$  を満たすとき,  $\lambda$  を  $f$  の固有値,  $x$  を固有値  $\lambda$  に対する固有ベクトルという.

注 4) 定義 1 の Axiom(1) および (2) により, 写像  $f$  は任意の  $x \in R_+^n$  に対して  $f(x) > 0$  を満たす. したがって, 固有値  $\lambda$  が存在するならば,  $\lambda > 0$  であり, その固有ベクトル  $x$  は  $x > 0$  となる.

## 5 結果

結果を, 以下にまとめる. まず, 固有値, 固有ベクトルに関する結果から述べる.

**定理 1.**  $f : R_+^n \rightarrow R_+^n$  を連続な *standard IF* とする. 任意の実数  $t > 0$  に対して,  $\Sigma_t = \{x \in R_+^n : \|x\| = t\}$  とする. このとき, 以下が成立する:

- (1)  $\Sigma_t$  上で,  $f$  の固有値  $\lambda_f(t)$  および固有ベクトル  $x^* > 0$  がただ一つ存在する.
- (2)  $\lambda_f(t)$  は  $t$  の狭義単調減少関数, したがって,  $t$  の連続関数となる.
- (3)  $\lim_{t \downarrow 0} \lambda_f(t) = +\infty$ .

(4)  $\lim_{t \uparrow \infty} \lambda_f(t) = r(f_\infty)$ . ここで,  $f_\infty$  は  $f$  の漸近写像である.

証明は [4, 5, 6, 7] を参照.

次に, 最適化問題 SIR に対する結果を述べる.

定理 2.  $f : R_+^n \rightarrow R_+^n$  を連続な *standard IF* とする. このとき,  $\gamma \in R_{++}^n$  に対して, 以下が成立する:

(1)  $\gamma \cdot f$  の漸近写像  $(\gamma \cdot f)_\infty$  は  $\gamma \cdot f_\infty$  と一致する.

(2) 漸近写像  $\gamma \cdot f_\infty$  のスペクトル半径  $r(\gamma \cdot f_\infty)$  が不等式  $r(\gamma \cdot f_\infty) < 1$  を満たすならば, 最適化問題 SIR は *feasible*, すなわち,

$$\{x \in R_+^n : \text{SIR}_i(x) \geq \gamma_i \ (i = 1, \dots, n)\} \neq \emptyset.$$

(3)  $\{x \in R_+^n : \text{SIR}_i(x) \geq \gamma_i \ (i = 1, \dots, n)\} \neq \emptyset$  ならば, 最適化問題 SIR はただ一つの最適解  $x^* > 0$  をもち, 最小値  $t^*$  は  $t^* = \|x^*\|$  で与えられる. さらに,  $x = x^*$  で, SIR 制約はすべて等式となる:

$$\text{SIR}_i(x^*) = \gamma_i \ (i = 1, \dots, n),$$

すなわち,

$$\frac{\gamma_1 f_1(x^*)}{x_1^*} = \dots = \frac{\gamma_n f_n(x^*)}{x_n^*} = 1 = \lambda_{\gamma \cdot f}(t^*).$$

証明は, Shindoh[6, 7] を参照. Cavalcante and Stanczak [2] は, Siomina and Yuan [8] で議論された例を用いて, 漸近写像を実際に求めている. この例の漸近写像は線形 (非負行列  $M$ ) となる. [2] では,  $M$  のスペクトル半径 (Perron Frobenius の定理) と feasibility の関係を考察している. 定理 3(2) は [2] の結果の一般化となっている. 定理 3(3) は, SIR balancing とよばれる性質である.  $x^*$  は写像  $\gamma \cdot f$  の不動点であることに注意する.

謝辞 本論文は, 京都大学数理解析研究所共同研究 (公開型) による成果をまとめたものである.

## 参考文献

- [1] Burbanks A. D., R. Nussbaum and C. Sparrow : Extension of order-preserving maps on a cone, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Ser. A 133A, pp.35 - 59, (2003).
- [2] Cavalcante R.L. and S. Stanczak : The role of asymptotic functions in network optimization and feasibility studies, IEEE GlobalSIP 2017, pp.563 - 567, (2017)
- [3] Lemmens, B. and R. Nussbaum : *Nonlinear Perron Frobenius Theory*, Cambridge University Press (2012).
- [4] Ogiwara, T. : Nonlinear Perron Frobenius problem on an ordered Banach space, Japan J. Math. Vol. 21, No. 1, pp.43 - 103, (1995).
- [5] Oshime, Y. : Perron-Frobenius Problem for weakly sublinear maps in a Euclidean positive orthant, Japan J. Indust. Appl. Math., 9, pp.313 - 350, (1992).

- [6] Shindoh, S. : Some properties of eigenvalues for standard interference mappings, Accepted in Proceedings of NACA 2017.
- [7] Shindoh, S. : Asymptotic maps for standard interference mappings, In preparation.
- [8] Siomina, I. and D. Yuan : Analysis of cell load coupling for LTE network planning and optimization, *IEEE Trans. Wireless Communications*, Vol. 11, No. 6, pp.2287 - 2297, (2012)
- [9] Yates, R. D. : A framework for uplink power control in cellular radio systems, *IEEE J. Select. Areas Commun.* , Vol. 13, No. 7, pp.1341 - 1348, (1995).