数理解析研究所講究録 第2110巻 2019年 93-98

弱選択関数と可算コンパクト性
(WEAK SELECTIONS AND COUNTABLE COMPACTNESS)

愛媛大学大学院　理工学研究科　元岡耕一
KOICHI MOTOOKA
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING,
EHIME UNIVERSITY

Buhagiar and Gutev [2] は,「連続な弱選択関数をもつ可算コンパクト空間は, 弱順序化可能であるか?」という問題提起をした. 本稿では, その肯定的な解が得られたことについて報告する.

1. 序

本稿において, 空間は全てハウスドルフであるとする.

空間 X に対して,

$$\mathcal{F}_2(X) = \{S \subset X : 1 \leq |S| \leq 2\}$$

とする. $\mathcal{F}_2(X)$ は Vietoris 位相, すなわち, X の開集合 U, V に対して

$$\langle U, V\rangle = \{S \in \mathcal{F}_2(X) : S \subset U \cup V \text{ かつ } S \cap U \neq \varnothing \neq S \cap V\}$$

としたとき, 基 $\{\langle U, V\rangle : U, V$ は X の開集合$\}$ によって生成された位相をもつとする.

空間 X に対して, 関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ が条件

$$\text{任意の } S \in \mathcal{F}_2(X) \text{ に対して} \sigma(S) \in S$$

を満たすとき, σ を X 上の**弱選択関数** (weak selection) という.

定義 1.1. 空間 X の位相を τ とし, $\preceq$ を集合 X 上の線形順序とする. 各 $x \in X$ に対して

$$(\leftarrow, x)_{\preceq} = \{y \in X : y \prec x\}, \quad (x, \rightarrow)_{\preceq} = \{y \in X : x \prec y\}$$

とし, 準基 $\{(\leftarrow, x)_{\preceq}, (x, \rightarrow)_{\preceq} : x \in X\}$ によって生成された X の位相を, 線形順序 $\preceq$ によって定められた**順序位相** (order topology) といい, $\tau_{\preceq}$ で表す.

- X が**順序化可能** (orderable) であるとは, X 上の線形順序 $\preceq$ が存在して $\tau_{\preceq} = \tau$ が成り立つことである.
- X が**弱順序化可能** (weakly orderable) であるとは, X 上の線形順序 $\preceq$ が存在して $\tau_{\preceq} \subset \tau$ が成り立つことである.
- X が **GO 空間** (GO-space) であるとは, 次の 2 つの条件を満たす X 上の線形順序 $\preceq$ が存在することである.
  - (i) $\tau_{\preceq} \subset \tau$,
  - (ii) 位相 τ が $\preceq$-凸な集合からなる基をもつ.

ここで, 順序集合 $(X, \preceq)$ の部分集合 A が **$\preceq$-凸** ($\preceq$-convex) であるとは, 任意の $x, y, z \in X$ に対して, 条件

$$x, z \in A \text{ かつ } x \preceq y \preceq z \text{ ならば, } y \in A$$

が成り立つときをいう.

注意 1.2. 定義 1.1 で述べた概念には, 次の関係がある.

$$X \text{ は順序化可能である} \Rightarrow X \text{ は GO 空間である} \Rightarrow X \text{ は弱順序化可能である} \\ \Rightarrow X \text{ は連続な弱選択関数をもつ.} \tag{1}$$

ただし, 逆は一般には成り立たない.

van Mill and Wattel [8] は, コンパクト空間に対して (1) の逆が成り立つことを証明した.

定理 1.3 ([8, Theorem 1.1]). コンパクト空間 X に対して, 次は同値である.
(i) X は順序化可能である.
(ii) X は連続な弱選択関数をもつ.

Artico, Marconi, Pelant, Rotter and Tkachenko [1] は, 定理 1.3 を可算コンパクトチコノフ空間に拡張した.

定理 1.4 ([1, Corollary 1.6]). 可算コンパクトチコノフ空間 X に対して, 次は同値である.
(i) X は GO 空間である.
(ii) X は連続な弱選択関数をもつ.

Buhagiar and Gutev[2] は, 正則でない可算コンパクト空間で連続な弱選択関数をもち GO 空間でない空間が存在することを指摘し次の問題提起をした.

問題 1.5 ([2, Question 1]). 連続な弱選択関数をもつ可算コンパクトな空間は, 弱順序化可能か？また空間が正則であればどうか？

Buhagiar and Gutev の問題 1.5 に対して, 次の肯定的解を得た.

定理 1.6. 連続な弱選択関数をもつ可算コンパクト空間は, 弱順序化可能である.

定理 1.7. 連続な弱選択関数をもつ可算コンパクト正則空間は, GO 空間である.

第 3 節で定理 1.6 と 1.7 の証明の概略を述べる.

2. 準備

定義 2.1. X 上の弱選択関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ に対して, σ による X 上の選択関係 (selection relation) $\preceq_\sigma$ を, $x, y \in X$ に対して

$$x \preceq_\sigma y \Longleftrightarrow \sigma(\{x, y\}) = x$$

で定める. $x \preceq_\sigma y$ かつ $x \neq y$ であるとき, $x \prec_\sigma y$ と表す.

注意 2.2. 弱選択関数 σ による選択関係 $\preceq_\sigma$ は, total ($x \preceq_\sigma y$ または $y \preceq_\sigma x$) かつ anti-symmetric ($x \preceq_\sigma y$ かつ $y \preceq_\sigma x$ ならば $x = y$) であるが, transitive ($x \preceq_\sigma y$ かつ $y \preceq_\sigma z$ ならば $x \preceq_\sigma z$) であるとは限らない.

定義 2.3. X 上の選択関係 $\preceq_\sigma$ と X の部分集合 A, B に対して

$$A \prec_\sigma B \Longleftrightarrow \text{任意の } a \in A \text{ と } b \in B \text{ に対して } a \prec_\sigma b \text{ である}$$

と定め, $\{a\} \prec_\sigma B$, $A \prec_\sigma \{b\}$ を, それぞれ $a \prec_\sigma B$, $A \prec_\sigma b$ で表す. また, $x \in X$ に対して

$$(\leftarrow, x)_{\preceq_\sigma} = \{y \in X : y \prec_\sigma x\}, \ (x, \rightarrow)_{\preceq_\sigma} = \{y \in X : x \prec_\sigma y\}$$
$$(\leftarrow, x]_{\preceq_\sigma} = \{y \in X : y \preceq_\sigma x\}, \ [x, \rightarrow)_{\preceq_\sigma} = \{y \in X : x \preceq_\sigma y\}$$

とする.

定義 2.4 ([6]). 空間 X 上の弱選択関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ に対して,

$$\{(\leftarrow, x)_{\preceq_\sigma}, (x, \to)_{\preceq_\sigma} : x \in X\}$$

を準基として生成された X の位相を, σ によって定められた**選択位相** (selection topology) といい, τ_σ で表す.

注意 2.5. 選択位相 τ_σ には, 次の性質がある.

(i) 空間 X 上の任意の弱選択関数 σ について, 空間 (X, τ_σ) は正則である [7, Corollary 2.3].

(ii) 空間 (X, τ) 上の任意の連続な弱選択関数 σ について, $\tau_\sigma \subset \tau$ が成り立つ [6, Theorem 3.5].

また, 連続な弱選択関数をもつ可算コンパクト空間について次が成り立つ.

定理 2.6 ([3, Theorem 2]). 連続な弱選択関数をもつ可算コンパクト空間は, 点列コンパクトである.

van Mill and Wattel [9] は, 弱選択関数を用いた GO 空間の特徴付けのために次の概念を導入した.

定義 2.7 ([9]). 空間 X 上の弱選択関数 $\sigma : \mathcal{F}_2(X) \to X$ が**局所一様** (locally uniform) であるとは, 任意の $x \in X$ と x の近傍 U に対して, $V \subset U$ を満たす x の近傍 V が存在して, 任意の $p \in X \setminus U, y \in V$ に対して,

$$\sigma(\{p, y\}) = p \iff \sigma(\{p, x\}) = p$$

となることである.

定理 2.8 ([9, Theorem 3.1]). チコノフ空間 X に対して, 次は同値である.

(i) X は GO 空間である.

(ii) X は局所一様な弱選択関数をもつ.

定義 2.9. 空間 X 上の位相を τ', τ とする. X 上の弱選択関数 σ が (τ', τ)-**局所一様** ((τ', τ)-locally uniform) であるとは, 任意の $x \in X$ と x の τ'-近傍 U に対して, x の τ-近傍 V が存在して, 任意の $p \in X \setminus U$ に対して

$$p \prec_\sigma V \text{ または } V \prec_\sigma p$$

のいずれかが成り立つことである.

注意 2.10. 空間 (X, τ) 上の弱選択関数 σ が局所一様であることと (τ, τ)-局所一様であることは同値である [10, Proposition 2.1(ii)].

注意 2.11. 空間 (X, τ) 上の弱選択関数 σ に対して, 次が成り立つ [10, Proposition 2.1(i),(iii)].

$$\sigma\text{は局所一様} \Rightarrow \sigma\text{は} (\tau_\sigma, \tau)\text{-局所一様} \Rightarrow \sigma\text{は連続}. \tag{2}$$

ただし, 逆は一般には成り立たない [10, Remark 3.6].

前出の van Mill and Wattel の定理 2.8 は, ハウスドルフ空間でも成立する.

定理 2.12 ([10, Theorem 3.2]). 空間 X に対して, 次は同値である.

(i) X は GO 空間である.

(ii) X は局所一様な弱選択関数をもつ.

定理 2.8 と同様に (τ_σ, τ)-局所一様な弱選択関数を用いると弱順序化可能な空間の特徴付けが得られる.

定理 2.13 ([10, Corollary 3.3]). 任意の空間 (X,τ) に対して, 次は同値である.
(i) X は弱順序化可能である.
(ii) X は (τ_σ,τ)-局所一様な弱選択関数をもつ.

3. 定理 1.6 と 1.7 の証明の概略

補題 3.1. σ を可算コンパクト空間 (X,τ) 上の連続な弱選択関数とする. τ' を次の条件 (a), (b) を満たす X 上の位相とする.
(a) (X,τ') は正則空間である.
(b) $\tau_\sigma \subset \tau' \subset \tau$.
このとき σ は, (τ',τ)-局所一様である.

証明. 弱選択関数 σ が (τ',τ)-局所一様でないとすると, ある点 $x \in X$ と x の τ'-近傍 U が存在して, x の任意の τ-近傍 V について, 条件

$$(p_V \prec_\sigma y_V \text{かつ}\, x \prec_\sigma p_V) \text{または} (y_V \prec_\sigma p_V \text{かつ}\, p_V \prec_\sigma x)$$

を満たす点 $p_V \in X \setminus U$ と $y_V \in V$ がとれる. このことから任意の自然数 $n \in \omega$ について, 次の条件 (i)–(iv) を満たす x の τ'-近傍 V_n 及び点 p_{V_n}, y_{V_n} が構成できる. ここで $\overline{V_n}$ は V_n の (X,τ) における閉包を表す.

(i) $p_{V_n} \in X \setminus U$ かつ $y_{V_n} \in V_n$;
(ii) $(p_{V_n} \prec_\sigma y_{V_n}$ かつ $x \prec_\sigma p_{V_n})$ または $(y_{V_n} \prec_\sigma p_{V_n}$ かつ $p_{V_n} \prec_\sigma x)$;
(iii) $\overline{V_0} \subset U$ かつ $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$;
(iv) $\overline{V_{n+1}} \prec_\sigma p_{V_n} \Longleftrightarrow x \prec_\sigma p_{V_n}$.

ここで一般性を失うことなく任意の自然数 n について, $p_V \prec_\sigma y_V$ かつ $x \prec_\sigma p_V$ と仮定できる. 定理 2.6 より空間 X が点列コンパクトであることから, 積空間 $X \times X$ も点列コンパクトである [4, Theorem 3.10.35]. 従って, 点列 $\{(p_{V_n}, y_{V_n})\}_{n\in\omega}$ は, 空間 $X \times X$ のある点 (u,v) に収束する部分列 $\{(p_{V_{n_m}}, y_{V_{n_m}})\}_{m\in\omega}$ をもつ. $u \in \overline{\{p_{V_{n_m}} : m \in \omega\}} \subset X \setminus U$ と $v \in \overline{\{y_{V_{n_m}} : m \in \omega\}} \subset \overline{V_0} \subset U$ より $u \neq v$ である. ここで任意の自然数 m について $p_{V_{n_m}} \prec_\sigma y_{V_{n_m}}$ であることと弱選択関数 σ の連続性より, $u \prec_\sigma v$ が得られる.

一方 $v \in \overline{\{y_{V_{n_k}} : k \in \omega \text{かつ}\, k \geq m+1\}} \subset \overline{V_{n_{m+1}}}$ と任意の自然数 m について $\overline{V_{n_{m+1}}} \subset \overline{V_{n_m+1}} \prec_\sigma p_{V_{n_m}}$ であることから $v \prec_\sigma p_{V_{n_m}}$ が得られる. このことと弱選択関数 σ の連続性より $v \prec_\sigma u$ が得られる. これは $u \prec_\sigma v$ であることに矛盾する. よって σ は (τ',τ)-局所一様である. □

命題 3.2. 可算コンパクト空間 (X,τ) 上の連続な弱選択関数 σ は, (τ_σ,τ)-局所一様である.

証明. 空間 (X,τ) 上の連続な弱選択関数を σ とし $\tau' = \tau_\sigma$ とおくと注意 2.5 により, τ' は補題 3.1 の (a) 及び (b) を満たす. よって補題 3.1 より σ は (τ_σ,τ)-局所一様である. □

命題 3.2 と定理 2.13 によって, 定理 1.6 が得られる.

命題 3.3. 可算コンパクト正則空間 (X,τ) 上の連続な弱選択関数 σ は, 局所一様である.

証明. 空間 (X,τ) 上の連続な弱選択関数を σ とし $\tau' = \tau$ とおくと空間 (X,τ) が正則であることより τ' は補題 3.1 の (a) を満たす. また, 注意 2.5 (ii) により, τ' は補題 3.1 の (b) を満たす. よって補題 3.1 より σ は (τ,τ)-局所一様である. すなわち注意 2.10 より σ は局所一様である. □

命題 3.3 と定理 2.12 によって, 定理 1.7 が得られる.

4. 定理 1.7 の弱コンパクト空間への拡張

定義 4.1. 空間 X が**弱コンパクト** (feebly compact) であるとは, 任意の局所有限な開集合からなる集合族が有限であることである.

弱コンパクト性については, 次が成り立つ.

$$\text{可算コンパクト} \Rightarrow \text{弱コンパクト} \Rightarrow \text{擬コンパクト}. \tag{3}$$

ここで空間が**擬コンパクト** (pseudocompact) であるとは, 空間上の任意の実数値連続関数が有界であることである. (3) のいずれの矢印の逆も一般には成り立たない [11, 1.11(d), 1P(3) and 1U].

注意 4.2. 任意の空間について, 次が成り立つ.
(i) 空間がチコノフであれば, 弱コンパクト性と擬コンパクト性は同値である.
(ii) 空間が正規であれば, 可算コンパクト性と弱コンパクト性及び擬コンパクト性は同値である.

擬コンパクトチコノフ空間については, 次が成り立つ.

定理 4.3 ([5, Theorem 2.3]). 任意の連続な弱選択関数をもつ擬コンパクトチコノフ空間 X について, 積空間 $X \times X$ は, 擬コンパクトである.

定理 4.4 ([1, Lemma 1.3]). 積空間 $X \times X$ が擬コンパクトチコノフ空間 X について, X 上の任意の連続な弱選択関数は, 局所一様である.

これらの定理の証明には, 擬コンパクト性の代わりに弱コンパクト性が用いられている. 定理 4.3 及び 4.4 の証明と同じ議論をすることによって命題 3.3 は次へ拡張できる.

命題 4.5. 任意の弱コンパクト正則空間上の連続な弱選択関数は, 局所一様である.

更に, 命題 4.5 と定理 2.12 より定理 1.7 は次へ拡張できる.

定理 4.6. 連続な弱選択関数をもつ弱コンパクト正則空間は, GO 空間である.

定理 1.6 について次の問題が考えられる.

問 4.7. 連続な弱選択関数をもつ弱コンパクト空間は, 弱順序化可能であるか？

References

[1] G. Artico, U. Marconi, J. Pelant, L. Rotter, M. Tkachenko, *Selections and suborderability*, Fund. Math. **175** (2002), no. 1, 1–33.
[2] D. Buhagiar, V. Gutev, *Selections and countable compactness*, Math. Slovaca. **63** (2013), no. 5, 1123–1140.
[3] Eric K. van Douwen, *Mappings from hyperspaces and convergent sequences*, Topology Appl. **34** (1990), 35–45.
[4] R. Engelking, *General topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Heldermann Verlag, 1989.
[5] S. García-Ferreira, M. Sanchis, *Weak selections and pseudocompactness*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 6, 1823–1825.
[6] V. Gutev, T. Nogura, *Selections and order-like relations*, Appl. Gen. Topol. **2** (2001), no. 2, 205–218.
[7] V. Gutev, T. Nogura, *A topology generated by selections*, Topology Appl. **153** (2005), no. 5–6, 900–911.
[8] J. van Mill, E. Wattel, *Selections and orderability*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), no. 3, 601–605.
[9] J. van Mill, E. Wattel, *Orderability from selections: another solution to the orderability problem*, Fund. Math. **121** (1984), no. 3, 219–229.
[10] K. Motooka, T. Yamauchi, *Another proof of a theorem of van Mill and Wattel on weak selections*, Colloq. Math. **152** (2018), 165–173.

[11] Jack R. Porter, R. Grant Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer, New York, 1988.

Graduate School of Science and Engineering, Ehime University, Matsuyama, 790-8577, Japan
E-mail address: k-motooka0426@outlook.jp