数理解析研究所講究録 第2110巻 2019年 110-118

自由位相群の Fréchet-Urysohn 部分空間と k-部分空間

Fréchet-Urysohn subsepaces and k-subspaces of free topological groups

静岡大学・学術院教育学領域　山田　耕三

Kohzo Yamada
College of Education, Shizuoka University

1　はじめに

本稿における位相空間 X は全て Tychonoff space とする。空間 X に対して，$F(X)$ と $A(X)$ をそれぞれ Markov [5] の意味での X 上の **free topological group**，**free abelian topological group** とする。尚，$F(X)$ の単位元は e で，$A(X)$ の単位元は 0 で表すことにする。$F(X)$ の各要素 g は **word** と呼ばれ，一般に

$$g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n},\ \text{ただし，各 } i = 1, 2, \ldots, n \text{ に対して } x_i \in X \text{ かつ } \varepsilon_i = \pm 1$$

と表される。特に g の表現 $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ が xx^{-1} または $x^{-1}x$ を含んでいないとき (つまりこれ以上キャンセルされないとき) $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ を g の **recuced form** という。さらにこのとき n を g の長さといい $\boldsymbol{\ell(g)}$ で表す。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X) = \{g \in F(X) : \ell(g) \leq n\}$ とおくと

$$F_1(X) \subseteq F_2(X) \subseteq \cdots \subseteq F_n(X) \subseteq \cdots \subseteq F(X) \text{ かつ } F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$$

となっている。尚 $F_0(X) = \{e\}$ と定める。すると $F_1(X) = X \oplus X^{-1} \oplus \{e\}$ となること，各 $F_n(X)$ は $F(X)$ の closed subset になることが知られている。一方，$A(X)$ の word g は一般に

$$g = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n,$$
$$\text{ただし，各 } i = 1, 2, \ldots, n \text{ に対して } x_i \in X \text{ かつ } \varepsilon_i = \pm 1$$

と表され，$A_n(X)$ は $F_n(X)$ と同様にして定義され，各 $A_n(X)$ も $A(X)$ の closed subset になることが知られている。

次のよく知られた結果は，たとえ X が単純な構造を持っている空間であっても，その X から生成される $F(X)$ 及び $A(X)$ の位相的構造が複雑になることを示唆している。

定理 **1.1.** $F(X)$ または $A(X)$ が *Fréchet-Urysohn* ならば X は *discrete space* である。

この結果より，収束点列とその収束点を合わせた空間 X から生成された $F(X)$ は，Fréchet-Urysohn ではなく，特に metrizable space にならないことがわかる。一方で，

Arhangel'skiĭ, Okunev and Pestov [1] が次の結果を示した。尚，本稿では，位相空間 X に対して X の孤立点全てを集めた集合を $d(X)$ で表す。

定理 **1.2** ([1])**.** X を *metrizable space* とするとき，

(1) $A(X)$ が *k-space* になるための必要十分条件は X が *locally compact* かつ $d(X)$ が *separable* になることである。
(2) $F(X)$ が *k-space* になるための必要十分条件は X が *locally compact* かつ *separable* となるか，または *discrete space* になることである。

これらの結果を踏まえて，筆者は Metrizable space X が持っている性質の一つである first-countability や，さらにその性質を一般化したよく知られている性質である Fréchet-Urysohn property, sequentiality, k-property 等に着目した。これらの性質の関係は，

$$\begin{aligned} &\text{metrizability} \Longrightarrow \text{first-countability} \\ &\qquad \Longrightarrow \text{Fréchet-Urysohn property} \Longrightarrow \text{sequentiality} \Longrightarrow k\text{-property} \end{aligned}$$

となっているが，文献 [7, 8, 9, 10] において，各 $A_n(X)$ が上記の性質を持つ場合の metrizable space X，及び各 $F_n(X)$ が metrizable や first-countable になる場合の metrizable space X を完全に分類することができた。実際，metrizable space X に対して次の結果が得られた。

定理 **1.3** ([7, 8, 9, 10])**.** 次の (1) から (6) が成立する。

(1) $\left.\begin{array}{l} 2\text{ 以上の任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } A_n(X) \text{ が metrizable,} \\ 2\text{ 以上の任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } A_n(X) \text{ が first-countable,} \\ 3\text{ 以上の任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } A_n(X) \text{ が Fréchet-Urysohn.} \end{array}\right\} \Leftrightarrow d(X) \text{ が compact.}$

(2) $A_1(X)$ 及び $F_1(X)$ は常に metrizable で $A_2(X)$ 及び $F_2(X)$ は常に Fréchet-Urysohn である。

(3) $\left.\begin{array}{l} 4\text{ 以上の任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } A_n(X) \text{ が sequential,} \\ 4\text{ 以上の任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } A_n(X) \text{ が } k\text{-space.} \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow X$ が locally compact かつ $d(X)$ が separable，または $d(X)$ が compact.

(4) $\left.\begin{array}{l} A_3(X) \text{ が sequential,} \\ A_3(X) \text{ が } k\text{-space.} \end{array}\right\} \Leftrightarrow X \text{ が locally compact または } d(X) \text{ が compact.}$

(5) $\left.\begin{array}{l} 4\text{ 以上の任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } F_n(X) \text{ が metrizable,} \\ 4\text{ 以上の任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } F_n(X) \text{ が first-countable.} \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow X$ が compact または descrete.

$$(6)\quad \left.\begin{array}{l} F_3(X) \text{ が metrizable,} \\ F_3(X) \text{ が first-countable,} \\ F_2(X) \text{ が metrizable,} \\ F_2(X) \text{ が first-countable.} \end{array}\right\} \Leftrightarrow d(X) \text{ が compact.}$$

一方，各 $F_n(X)$ が Fréchet-Urysohn, sequential または k-space になる場合の merizable space X の分類は完全にできていないが，以下の (7) から (10) は成立する。

(7) 5 以上の任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n(X)$ が Fréchet-Urysohn $\Leftrightarrow$ X が compact または discrete.

(8) $F_3(X)$ が Fréchet-Urysohn $\Leftrightarrow$ $d(X)$ が compact.

$$(9)\quad \left.\begin{array}{l} 8 \text{ 以上の任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } F_n(X) \text{ が sequential,} \\ 8 \text{ 以上の任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } F_n(X) \text{ が } k\text{-space.} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow X \text{ が locally compact かつ separable.}$$

$$(10)\quad \left.\begin{array}{l} F_3(X) \text{ が sequential,} \\ F_3(X) \text{ が } k\text{-space.} \end{array}\right\} \Leftrightarrow X \text{ が locally compact または } d(X) \text{ が compact.}$$

上記の結果では，次の問題が残された。

問題 1. X を metrizable space とするとき，

(1) $F_4(X)$ が Fréchet-Urysohn になるための X の必要十分条件は何か？

(2) $n = 4, 5, 6, 7$ に対して $F_n(X)$ が sequential または k-space になるための X の必要十分条件は何か？

本稿では問題 1 (1) に関する完全解がえられたことを紹介する。

2　主定理

前節の問題 1 (1) に関して，これまで次のような部分解は得られてた。

定理 2.1 ([11]). *Metrizable space X が locally compact であり，$d(X)$ が compact であると仮定する。このとき，$F_4(X)$ が k-space ならば $F_4(X)$ は Fréchet-Urysohn になる。*

定理 1.3 (10) より metrzable space X が locally compact かつ separable であれば，$F_8(X)$ は k-space であり，$F_4(X)$ は $F_8(X)$ の closed subspace なので $F_4(X)$ も k-space である。よって定理 2.1 より次のことがわかる。

系 **2.2** ([11])**.** *Metrizable space* X が *locally compact* かつ *separable* であり, $d(X)$ が *compact* であれば $F_4(X)$ は *Fréchet-Urysohn* になる。

さらに [12] では，系 2.2 の「sparable」の仮定が外せることを示した。

定理 **2.3** ([12])**.** *Metrizable space* X が *locally compact* であり，$d(X)$ が *compact* であれば $F_4(X)$ は *Fréchet-Urysohn* になる。

定理 1.3 (8) より $F_3(X)$ が Fréchet-Urysohn になるための必要十分条件は $d(X)$ が compact になることであったので，定理 2.3 では「locally compact」の仮定が必要であるかどうかが問題になる。本稿での主定理は，この「locally compact」の仮定が外せること，つまり次の定理が成立することである。

定理 **2.4** (主定理)**.** *Metrizable space* X において，$d(X)$ が *compact* であれば $F_4(X)$ は *Fréchet-Urysohn* になる。

よって，この結果と定理 1.3 (8) より，metrizable space X において

$$F_4(X) \text{ が Fréchet-Urysohn} \Longleftrightarrow d(X) \text{ が compact},$$

となり，問題 1 (1) の完全解が得られる。

3 主定理の証明の概略

この節では定理 2.4 の証明の概略について説明する。詳細については [13] を参照されたい。Metrizable space X において，$d(X)$ が compact であると仮定し $F_4(X)$ が Fréchet-Urysohn になることを示そう。ここでは $d(X)$ を C で表すことにする。すると C が compact であることより，X の open and closed subset からなる列 $\{W_n\}$ で

(i) $C \subseteq \cdots \subseteq W_{n+1} \subseteq W_n \subseteq \cdots \subseteq W_2 \subseteq W_1 = X$,

(ii) $C \subseteq U$ となる任意の X の open subset U に対して $C \subseteq W_n \subseteq U$ となる W_n が存在する,

を満たすものが取れる。さらに，$\{V_n\}$ を X^2 の open subset からなる列で次の性質を満たすものとする。ただし $Y \subseteq X$ に対して Δ_Y は対角線集合 $\{(y, y) \in X^2 : y \in Y\}$ を表す。

(iii) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\Delta_C \subseteq V_n \subseteq {W_n}^2$ かつ $V_{n+1} \subseteq V_n$,

(iv) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{(y, x) \in X^2 : (x, y) \in V_n\} = V_n$.

この列 $\{V_n\}$ を用いて，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して U_n を

$$U_n = V_n \cup \{(x^{-1}, y^{-1}) \in X^{-1^2} : (x, y) \in V_n\} \cup \Delta_{\widetilde{X}^2}$$

で定め，$\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ とおく。すると $\mathscr{U}$ は $\widetilde{X}^2$ の universal uniformity の基となり，

(v) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $U_{n+1} \subseteq U_n$,

(vi) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{(y, x) \in \widetilde{X}^2 : (x, y) \in U_n\} = U_n$,

を満たすことがわかる。そこで各 $U \in \mathscr{U}$ を用いて次のような集合 $W_n(U)$ を定義する。

$$W_n(U) = \{e\} \cup \left\{ \begin{array}{l} g = x_1 x_2 \cdots x_{2k} \in F(X) : \\ \quad (1) \quad x_i \in \widetilde{X} \text{ for each } i = 1, 2, \ldots, 2k \text{ and } k \le n, \\ \quad (2) \quad x_1 x_2 \cdots x_{2k} \text{ is the reduced form of } g, \\ \quad (3) \quad \{1, 2, \ldots, 2k\} = \{i_1, \ldots, i_k\} \oplus \{j_1, \ldots, j_k\}, \\ \quad (4) \quad (x_{i_s}, x_{j_s}^{-1}) \in U \text{ for each } s = 1, \ldots, k, \\ \quad (5) \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k, \\ \quad (6) \quad i_s < j_s \text{ for each } s = 1, 2, \ldots, k, \text{ and} \\ \quad (7) \quad i_s < i_t < j_s \text{ iff } i_s < j_t < j_s \text{ for each } s, t = 1, \ldots, k. \end{array} \right\}$$

すると $W_n(U)$ が $F_{2n}(X)$ における e の近傍となることが [8] で証明されている。本稿ではこの近傍を $n = 2$ と $n = 3$ に対して次のように適用する。

系 3.1. 任意の $U \in \mathscr{U}$ に対して次が成立する。

(1) $g \in W_2(U) \setminus F_3(X)$ となることの必要十分条件は g が次の条件を満たす *reduced word* $g = abcd$ $(a, b, c, d \in \widetilde{X})$ で表せることである。

$$(a, b^{-1}), (c, d^{-1}) \in U \quad \text{または} \quad (a, d^{-1}), (b, c^{-1}) \in U.$$

(2) $g \in W_3(U) \setminus F_5(X)$ となることの必要十分条件は g が次の (i) から (iv) のいずれかを満たす *reduced word* $g = pqrstu$ $(p, q, r, s, t, u \in \widetilde{X})$ で表せることである。

(i) $(p, q^{-1}), (r, s^{-1}), (t, u^{-1}) \in U$,　　(ii) $(p, q^{-1}), (r, u^{-1}), (s, t^{-1}) \in U$

(iii) $(p, s^{-1}), (q, r^{-1}), (t, u^{-1}) \in U$,　　(iv) $(p, u^{-1}), (q, t^{-1}), (r, s^{-1}) \in U$.

一方，残念ながら $\{W_n(U) : U \in \mathscr{U}\}$ は $F_{2n}(X)$ の e における近傍基にはならないことが分かっている。よって $A \subseteq F_4(X)$ に対して $e \in \overline{A}$ （$\overline{A}$ は A の閉包を表す。）となるかどうかを調べるのに $\{W_n(U) : U \in \mathscr{U}\}$ は利用できない。そこで，$e \in \overline{A}$ となるかどうかを調べるために Uspenskiĭ [6] によって定義された次の e の近傍基を利用することにする。

$F(X)$ の部分集合 F_0 を次のように定める。

$$F_0 = \{h = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_{2n}^{\varepsilon_{2n}} \in F(X) : \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0, x_i \in X \text{ for } i = 1, 2, \ldots, n, n \in \mathbb{N}\}.$$

すると，F_0 は $F(X)$ の clopen normal subgroup となる。さらに，$\mathscr{P}(X)$ を X 上のすべての continuous pseudometric からなる集合とする。任意の $g \in F_0$ に対して g は次のような形で表せることに注意する。（もちろんの表現は g の reduced form とは限らない。）

$$g = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n x_n^{\varepsilon_n} y_n^{-\varepsilon_n} g_n^{-1},$$

ただし，各 $x_i, y_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1, g_i \in F(X)$ である。このような g の表現は一意に決まるものではなく，いく通りもの表し方がある。そこで，任意の $h \in F_0$ と $r = \{\rho_g : g \in F(X)\} \in \mathscr{P}(X)^{F(X)}$ に対して，

$$p_r(h) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{n} \rho_{g_i}(x_i, y_i) : \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, x_i, y_i \in X, \exists\, \varepsilon_i = \pm 1, \exists g_i \in F(X)\ (i \leq n)$$
$$\text{s.t. } h = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n x_n^{\varepsilon_n} y_n^{-\varepsilon_n} g_n^{-1} \Big\}$$

とおくとき Uspenskiĭ [6] は次のことを示した。

定理 3.2 ([6])**.** 任意の $r \in \mathscr{P}^{F(X)}$ に対して p_r は *continuous prenorm* となる。さらに $\big\{\{h \in F_0 : p_r(h) < \delta\} : r \in \mathscr{P}^{F(X)}, \delta > 0\big\}$ は e の近傍基となる。

本稿ではある点列 $\{g_n\} \subseteq A$ または ある点列 $\{g_n\} \subseteq g^{-1}A$ が e に収束する部分列を持つかどうかを調べるときに，この定理を次のような形で利用する。

系 3.3. E を $F(X)$ の部分集合，$\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ を F_0 の点列とするとき次が成立する。

(1) $e \in \overline{E}$ となることの必要十分条件は，任意の $r = \{\rho_g : g \in F(X)\} \in \mathscr{P}^{F(X)}$ と $\delta > 0$ に対して次の条件を満たす $h \in E \cap F_0$ が存在することである。

$$h = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_m x_m^{\varepsilon_m} y_m^{-\varepsilon_m} g_m^{-1}$$

と表せて $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \rho_{g_i}(x_i, y_i) < \delta.$

(2) 点列 $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ が e に収束するための必要十分条件は，任意の $r = \{\rho_g : g \in F(X)\} \in \mathscr{P}^{F(X)}$ と $\delta > 0$ に対して，次の条件を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在することである。

任意の $n \geq N$ に対して

$$h_n = g_{n,1} x_{n,1}^{\varepsilon_{n,1}} y_{n,1}^{-\varepsilon_{n,1}} g_{n,1}^{-1} g_{n,2} x_{n,2}^{\varepsilon_{n,2}} y_{n,2}^{-\varepsilon_{n,2}} g_{n,2}^{-1} \cdots g_{n,m_n} x_{n,m_n}^{\varepsilon_{n,m_n}} y_{n,m_n}^{-\varepsilon_{n,m_n}} g_{n,m_n}^{-1}$$

と表せて $\displaystyle\sum_{i=1}^{m_n} \rho_{g_{n,i}}(x_{n,i}, y_{n,i}) < \delta.$

以上の準備のもとで，$F_4(X)$ が Fréchet-Urysohn になることを示すために，任意の $A \subseteq F_4(X)$ と $g \in F_4(X)$ をとり $g \in \overline{A}$ となっていると仮定し，A に属する点列で g に収束する

ものを見つけることが目標である。まず，定理 1.3 (8) より $F_3(X)$ は Fréchet-Urysohn であり，$F_4(X)$ の closed subset なので $A \subseteq F_4(X)\setminus F_3(X)$ としておける。さらに $F_4(X)\setminus F3(X)$ は $\widetilde{X}^4$ の部分空間と同相であり $\widetilde{X}^4$ は metrizable space, よって Fréchet-Urysohn なので $g \in F_3(X)$ としておいてよい。さらに $\{e\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_{2n}(X)\setminus A_{2n-1}(X)\right)$ は $F(X)$ の open subset（実際は open closed normal subgroup）であり，$A \subseteq \{e\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_{2n}(X)\setminus A_{2n-1}(X)\right)$ なので，$g \in \left(F_2(X)\setminus F_1(X)\right)\cup\{e\}$ となる。そこでいくつかの場合に分けて考える。

Case 1. $g \in F_2(X)\setminus F_1(X)$ のとき

この場合は，$e \in \overline{g^{-1}A} \subseteq F_6(X)$ となるので，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $g^{-1}A \cap W_3(U_n) \neq \emptyset$ となるので $h_n \in g^{-1}A \cap W_3(U_n) \neq \emptyset$ をとる。すると，系 3.1 (2) と系 3.3 (2) を利用して $\{h_n\}$ の部分列 $\{h_{n_k}\}$ で e に収束するものがとれる。すると $gh_{n_k} \in A$ であり，$\{gh_{n_k}\}$ は g に収束する。

Case 2. $g = e$ のとき

$e \in \overline{A}$ なので，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $A \cap W_2(U_n) \neq \emptyset$ となる。そこで

$$\begin{aligned}
H(U_n) &= \{abcd \in W_2(U_n) : (a, b^{-1}), (c, d^{-1}) \in U_n\},\\
I(U_n) &= \{abcd \in W_2(U_n) : (a, d^{-1}), (b, c^{-1}) \in U_n, a \neq d^{-1}\},\\
J(U_n) &= \{abcd \in W_2(U_n) : (a, d^{-1}), (b, c^{-1}) \in U_n, a = d^{-1}\}\\
&= \{abca^{-1} \in W_2(U_n) : (b, c^{-1}) \in U_n\},
\end{aligned}$$

とおくと，系 3.1 (1) より $W_2(U_n) = H(U_n) \cup I(U_n) \cup J(U_n)$ となる。そこでさらに次の場合に分けて考える。

Case 2-1. $M_1(U_n) = \{n \in \mathbb{N} : A \cap H(U_n) \neq \emptyset\}$ または $M_2(U_n) = \{n \in \mathbb{N} : A \cap I(U_n) \neq \emptyset\}$ が無限のとき

これらのときは，それぞれの場合において $g_n \in A \cap H(U_n)$ $(n \in M_1(U_n))$ と $h_n \in A \cap I(U_n)$ $(n \in M_2)$ をとると，系 3.3 (2) を用いて $\{g_n\}$ と $\{h_n\}$ が e に収束することが示せる。

Case 2-2. Case 2 ではあるが Case 2-1 ではないとき

このとき Case 2-1 ではないので，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A \cap \left(H(U_n) \cup I(U_n)\right) = \emptyset$ としておく。すると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $A \cap W_2(U_n) = A \cap J(U_n) \neq \emptyset$ となる。そこで，

$$J_1(U_n) = \{abca^{-1} \in J(U_n) : a \in C \cup C^{-1}\}, J_2(U_n) = \{abca^{-1} \in J(U_n) : a \notin C \cup C^{-1}\}$$

とおくと，$J(U_n) = J_1(U_n) \cup J_2(U_n)$ であるので $L_1 = \{n \in \mathbb{N} : A \cap J_1(U_n) \neq \emptyset\}$ と $L_2 = \{n \in \mathbb{N} : A \cap J_2(U_n) \neq \emptyset\}$ のいずれかが無限となる。L_1 が無限のときは，C が

compact なので，$g_n \in A \cap J_1(U_n)$ $(n \in L_1)$ をとると，系 3.3 (2) より $\{g_n\}$ が e に収束することがわかる。最後に，L_2 が無限の場合を調べるが，最も証明が困難な場合である。実際，次の補題を用いて示すが，その補題の証明には代数学における手法を使用する。

補題 3.4. 任意に $n \in \mathbb{N}$ をとり固定する。 $E \subseteq (X \setminus W_n) \cup (X \setminus W_n)^{-1}$, $F_a \subseteq {W_n}^2$ $(a \in E)$ に対して

$$B = \{ax^{\varepsilon} y^{-\varepsilon} a^{-1} \in F_4(X) \setminus F_3(X) : (x, y) \in F_a, a \in E, \varepsilon = \pm 1\}$$

とおく。このとき，任意の $a \in E$ に対して $F_a \cap V_{n_a} = \emptyset$ となるような $n_a \in \mathbb{N}$ が存在するならば，$e \notin \overline{B}$ となる。

補題の証明方法. $Z = W_n$, $D = X \setminus W_n$ とおくと $X = W_n \oplus D$ で D は X の discrete closed subset となる。そこで，この補題の証明には次の $F(X)$ から $F(D)$ と $A\big(Z \times F(D)\big)$ との半直積 $F(D) \ltimes_{\tau} A\big(Z \times F(D)\big)$ への連続写像を構成する。

まず，$\tau : F(D) \times \big(Z \times F(D)\big) \to Z \times F(D)$ を任意の $\big(g, (x, h)\big) \in F(D) \times \big(Z \times F(D)\big)$ に対して $\tau\Big(\big(g, (x, h)\big)\Big) = (x, gh)$ で定めると，τ は連続な左群作用となる。また，任意の $g \in F(D)$ に対して自己同相写像を $\tau_g : Z \times F(D) \to Z \times F(D); (x, h) \mapsto (x, gh)$ で定めると $A\big(Z \times F(D)\big)$ への拡張 $\widetilde{\tau_g} : A\big(Z \times F(D)\big) \to A\big(Z \times F(D)\big)$ が得られる。するとこの $\widetilde{\tau_g}$ を用いて τ の拡張

$$\widetilde{\tau} : F(D) \times A\big(Z \times F(D)\big) \to A\big(Z \times F(D)\big); (g, h) \mapsto \widetilde{\tau_g}(h)$$

が得られる。$\widetilde{\tau}$ の定義域は $F(D)$ と $A\big(Z \times F(D)\big)$ との積空間であるが，ここでその群構造として $\widetilde{\tau}$ に関する半直積 $F(D) \ltimes_{\tau} A\big(Z \times F(D)\big)$（以後これを G で表す。）を導入すると G は位相群となる。尚，G における演算は $(g, a) \cdot (h, b) = \big(gh, a + \widetilde{\tau_g}(g)\big)$ で与えられる。そこで $\psi : X(= Z \oplus D) \to G$ を任意の $t \in X$ に対して

$$\psi(t) = \begin{cases} \big(e, (t, e)\big) & t \in Z \text{ のとき} \\ (t, 0) & t \in D \text{ のとき} \end{cases}$$

とすると，ψ は連続となるので ψ の $F(X)$ への拡張 $\widetilde{\psi} : F(X) \to G$ が得られ，$\widetilde{\psi}$ は準同型な連続写像となる。そこで，$Y = Z \times (D \oplus D^{-1})$ とすると

$$Y = Z \times (D \oplus D^{-1}) \subseteq Z \times F(D) \subseteq A\big(Z \times F(D)\big) \text{ より } A(Y) \subseteq A\big(Z \times F(D)\big)$$

となるので，

$$f = (\pi \circ \widetilde{\psi})\restriction_{(\pi \circ \widetilde{\psi})^{-1}(A(Y))} : (\pi \circ \widetilde{\psi})^{-1}\big(A(Y)\big) \to A(Y),$$

とする。但し，π は G から $A\big(Z \times F(D)\big)$ への射影である。するとこのとき，任意の $g = ax^{\varepsilon} y^{-\varepsilon} a^{-1} \in B$ を $\widetilde{\psi}$ で写すと

$$\widetilde{\psi}(g) = \widetilde{\psi}(a)\widetilde{\psi}(x)^{\varepsilon}\widetilde{\psi}(y)^{-\varepsilon}\widetilde{\psi}(a)^{-1} = \big(e, \varepsilon(x, a) - \varepsilon(y, a)\big),$$

よって $f(g) = \varepsilon(x, a) - \varepsilon(y, a)$ となり，$0 \notin \overline{f(B)}$ が示せる。よって $e \notin \overline{B}$ が得られる。 □

Case 2-2 の場合に戻ると，この補題 3.4 を用いながら帰納的に構成することにより，ℕ の部分列 $\{n_k\}$ と B の要素からなる点列 $\{g_{n_k}\}$ がとれて，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$g_{n_k} = a_{g_{n_k}}^{\gamma_{g_{n_k}}} b_{g_{n_k}}^{\delta_{g_{n_k}}} c_{g_{n_k}}^{\varepsilon_{g_{n_k}}} a_{g_{n_k}}^{-\gamma_{g_{n_k}}}, \quad (b_{g_{n_k}}, c_{g_{n_k}}) \in V_{n_k}, \quad \text{かつ} \quad a_{g_{n_k}} \in W_{n_k}$$

を満たす。すると系 3.3 (2) より $\{g_{n_k}\}$ が e に収束することがわかる。

以上いずれの場合も A の要素からなる点列で g に収束するものがとれたので，$F_4(X)$ は Fréchet-Urysohn となる。

残された問題 1 (2) の解決に向けても今回の証明に用いた単位元 e の近傍系や補題 3.4 は有効な道具となると思われるので，問題解決に大いに希望が持たれる。

参考文献

[1] A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev and V. G. Pestov, *Free topological groups over metrizable spaces*, Topology Appl. **33** (1989) 63-76.

[2] A. V. Arhangel'skiĭand M. Tkachenko, *Topological Group and Related Structures*, Atlantis Press and World Sci., Paris, 2008.

[3] R. Engelking, *General Topology* (Heldermann, Berlin, 1989).

[4] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract harmonic analysis I*, Academic Press, New York, (1963).

[5] A. A. Markov, *On free topological groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **9** (1945) 3-64 (in Russian); Amer. Math. Soc. Transl. **8** (1962) 195-272.

[6] V. V. Uspenskiĭ, *Free topological groups of metrizable spaces*, Math. USSR Izvestiya **37** (1991) 657-680.

[7] K. Yamada, *Characterizations of a metrizable space X such that every $A_n(X)$ is a k-space*, Topology Appl. **49** (1993) 75-94.

[8] K. Yamada, *Metrizable subspaces of free topological groups on metrizable spaces*, Topology Proc. **23** (1998) 379-409.

[9] K. Yamada, *Fréchet-Urysohn spaces in free topological groups on metrizable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002) 2461-2469.

[10] K. Yamada, *The natural mappings i_n and k-subspaces of free topological groups on metrizalble spaces*, Topology Appl. **146-147** (2005), 239-251.

[11] K. Yamada, *Fréchet-Urysohn subspaces of free topological groups*, Topology Appl. **210** (2016), 81-89.

[12] K. Yamada, *Fréchet-Urysohn subspaces of free topological groups II*, submitted.

[13] K. Yamada, *Fréchet-Urysohn subspaces of free topological groups III*, submitted.