数理解析研究所講究録 第2112巻 2019年 177-183

密度付集合間の比較評価について

(On optimality evaluation method of two sets each having density function)

齋藤裕 Yutaka Saito*, 荒谷洋輔 Yousuke Araya, 木村寛 Yutaka Kimura
秋田県立大学システム科学技術学部
Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University

1 はじめに

本研究では集合最適化における新しい最適性の決定手法の 1 つとして，各集合の内側の情報が密度の分布関数として与えられている 2 集合間の優劣を定める二項関係を提案する．

既存研究として，集合最適化でしばしば用いられる，錐を用いた集合の二項関係がある．錐を用いた二項関係にはいくつか種類があるが，記述方法については 2 種類あり，錐と集合の加算による包含や共通部分の有無と加える錐の正負で記述するものと，集合の要素の満たす条件による取り方（順番）と $\forall, \exists$ の組み合わせで記述するものとがある ([4, 6], 他)．これらの二項関係の性質として，比較対象となる集合が閉凸集合であれば、その境界部分の情報によってその集合が特徴づけられることが挙げられる（[1], 図 1）．集合値最適化においては，集合値写像と，基準となるベクトルと集合をパラメータに用いたスカラー化関数とを組み合わせると，合成関数の凸性や連続性が得られる [3, 5, 7]．この性質を用いた集合値最適化の定理に，Fan–高橋の不等式定理の集合値一般化 [5] がある．

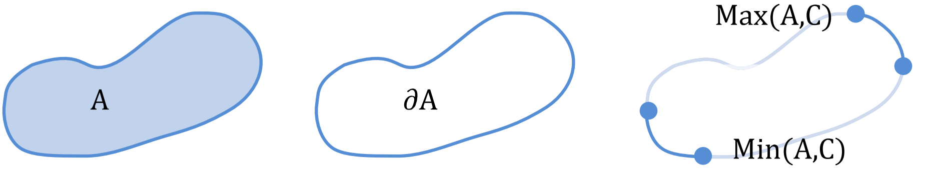

図 1: 上図の 3 集合は同じ情報を持っているか.

*yutakasai@akita-pu.ac.jp

錐を用いた二項関係は集合の本質的な情報が境界部分にあるモデルを記述できる，とも言い換えることができる．この観点から，不確実性を考慮した許容集合を扱うロバスト最適化との関連性が報告されている [2]．

本研究では，集合の本質的な情報が境界部分以外に，特に集合の内部にあるようなモデルを記述するための二項関係を考察する．本稿の構成は，まず，内部に情報があることを密度関数で表すことについて，離散な集合をどのように扱うかを含めて述べる．次に，与えられた集合に対し，確率論の観点とベクトル最適化の観点の両方を用いて評価関数を定める．それを基に二項関係を提案しそれらの性質を紹介する．最後に，従来の二項関係との違いを具体的な数値例で確認する．

なお，本研究で提案する二項関係で，便宜的に境界部分の密度が無限大で内部の密度が 0 の集合を扱えば，前述のような境界部分に情報が乗っている集合を同様に記述できる．

2　文字の定義と仮定について

n 次元実数空間 $\mathbb{R}^n$ 上の鋭凸錐 C(that is, $C \cap (-C) = \{\theta\}$ and $C + C = C$) を用いてベクトル順序 $\leq_C$:

$$a \leq_C b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b - a \in C \quad (a, b \in \mathbb{R}^n)$$

をとる．以下，C を順序錐とも呼ぶ．比較対象となる $\mathbb{R}^n$ 上の部分集合 A, B に対して，積分可能な非負関数 $\psi_A, \psi_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が，$\mathbb{R}^n$ 上の指示関数

$$\delta_S(x) := \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (S \subset \mathbb{R}^n)$$

により

$$\begin{aligned} \psi_A(a) &= \delta_A(a) * \psi_A(a), \\ \psi_B(b) &= \delta_B(b) * \psi_B(b) \end{aligned}$$

を満たすとする.（このとき，互いに独立である.）

さらに積分値が有界であるとし，正の場合はそれぞれ積分値を標準化し

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_A(a) da = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_B(b) db \quad = 1 \tag{1}$$

と仮定する.（$\mathbb{R}^n$ 上の集合 A, B に確率密度関数 $\psi_A(a), \psi_B(b)$ が乗っている状態を想像してもらえばよい.）

ただし，内部を持たない集合の多くは積分値が 0 になる．その場合は標準化ができないため，線積分ないし次のデルタ超関数を導入する必要がある．

2.1 デルタ超関数

離散集合のように積分値が 0 である集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ を扱う際は，デルタ超関数（ディラックのデルタ関数）$\hat{\delta}_S$：

$$\hat{\delta}_S \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\delta}_S(x)dx = 1 \text{ and } \hat{\delta}_S(x) = \begin{cases} +\infty & (x \in S) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を導入する．デルタ超関数を導入すると離散確率の計算式を連続確率の形に書き換えることができる．つまり，離散集合 S 上の離散確率 ϕ_S に対して，

$$\sum_{i \in I} \phi_S(x_i) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi_S}(x)dx$$

(ただし $\hat{\psi_S}(x) := \sum_{i \in I} \phi_S(x_i) * \hat{\delta}_{\{x_i\}}(x)$ for any $x \in \mathbb{R}^n$) と書ける．

デルタ超関数を後述の錐上の積分計算に入れると，デルタ超関数の与え方次第で順序錐の角面積が影響し関数値が変化してしまう（例 2.1）．計算値を一意に 1 にするために，デルタ超関数を扱う場合のみ正方向ベクトル $k \in \operatorname{int} C$ と正の数 $t > 0$ の項を加えて $t \downarrow 0$ で極限を取るようにする．すなわち錐 C 上の積分計算において，

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{C - tk} \hat{\psi_S}(x)dx \tag{2}$$

とすると，積分値は 1 となる．また，この操作において通常の密度関数は（その連続性に関わらず）影響を受けない．よって，内部をもつ集合も離散な集合も式 (2) でまとめて記述できる．

例 2.1 $\mathbb{R}^2$ 上で順序錐 $C = \mathbb{R}^2_+$ と，平均 $\theta_{\mathbb{R}^2}$ の正規分布の分散（共分散行列）を 0 に飛ばした形のデルタ超関数を与える．原点集合 $S = \{\theta\}$ と離散な確率密度関数 $\phi_S := \delta_S$ をとる．$\int_{\mathbb{R}^2} \phi_S(x)dx = 0$ であるが $\int_{\mathbb{R}^2} \hat{\psi_S}(x)dx = 1$(ただし $\hat{\psi_S}(x) = \delta_S(x) * \hat{\delta}_{\{\theta\}}(x)$)．また，$\int_C \hat{\psi_S}(x)dx = \frac{1}{2}$ であるが，$\lim_{t \downarrow 0} \int_{C - tk} \hat{\psi_S}(x)dx = 1$ となる（図 2）.

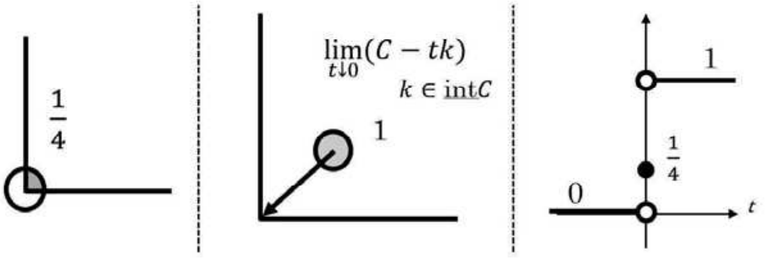

図 2: 例で t と k を用いる効用と上側極限.

超関数は本稿で行う比較操作や数値計算においては自然に扱えるが，解析的な手法を用いる際には注意が必要である．

デルタ超関数の導入と以上の議論，及び線積分との組み合わせによって，積分値を標準化した式 (1) を一般のものとして仮定してよい．よって，以下本稿では一般の密度関数 ψ_A, ψ_B のみを用いる．

3　評価関数と二項関係の提案

本研究で提案する二項関係は確率論的な意味付けとベクトル順序を組み合わせるアプローチで導出する．具体的に，「$a \leq_C b$ **となる** $(a,b) \in A \times B$ **の同時確率を求める．**」ことを目標とする．

まず，$X := B - A$ とおいて同時確率の密度関数を畳み込みで求める．

$$\psi_X(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_A(a)\psi_B(x+a)da$$

$b - a \in C$ となる同時確率はすなわち $X \cap C$ 部分の確率の積分値であるためこれを評価値

$$f_C(A,B) := \int_{\mathbb{R}^n} \delta_C(x)\psi_X(x)dx$$

とする．

このとき，$a = b$ となる確率 $f_{\{\theta\}}(A,B)$ も前述のデルタ超関数と極限操作を用いて求めることができる．(ただし離散確率の部分がなければ $a = b$ となる確率は 0 である．）これにより後々 $P(C \cup (-C)) = P(C) + P(-C) - P(C \cap (-C))$ を自然に計算することが可能となる．

評価関数を組み合わせ，ベクトル順序の概念でいくつかの定義を提案する．

定義 3.1 (密度付集合間の確率的二項関係) $f_C(A,B) > 0$ のとき，閾値 $\tau \in]0,1]$ に対して，

(i) $A \leq^{(\mathrm{i})}_{C,\tau} B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} f_C(A,B) \geq \tau$

(ii) $A \leq^{(\mathrm{ii})}_{C,\tau} B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \frac{f_C(A,B)}{f_C(A,B)+f_C(B,A)-f_{\{\theta\}}(A,B)} \geq \tau$

(iii) $A \leq^{(\mathrm{iii})}_{C,\tau} B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} 1 - f_C(B,A) + f_{\{\theta\}}(B,A) \geq \tau$

と定める．

本稿ではそれぞれを (i) 型，(ii) 型，(iii) 型と呼ぶことにする．

３つの定義の違いについて上で定義した通り，評価関数 f_C はベクトル順序と確率計算を内包している．C を鋭錐としたため，ベクトル順序は一般に全順序律を持たないため，そのまま用いた (i) 型は優劣を過小に評価している可能性がある．逆に否定形の (iii) 型は過大に評価している場合も考えられる．これらの間を取る形で，また後述のような性質を持つものとして (ii) 型を提案している（図 3）．

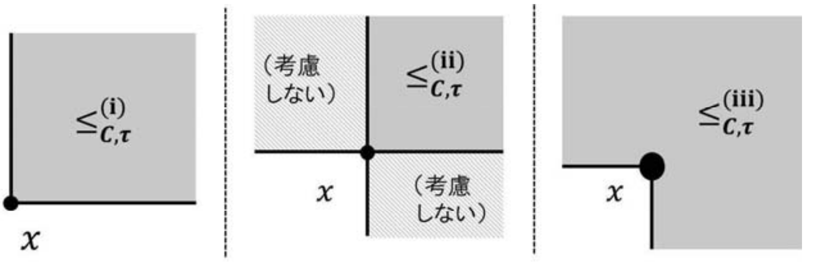

図 3: 提案二項関係の違い.

言い換えると (ii) 型は全順序律が成り立たない場合に，順序のつかないベクトル a, b が出現する事象をなかったこととして扱うことを意味している．じゃんけんで例えると，事象 { かち, まけ, あいこ } から "あいこ" をなくし，{ かち, まけ } のみで優劣を決定することと同じ操作をしている．

3.1 提案した二項関係の性質

提案した評価関数と二項関係について，以下のような性質が成り立つ．

命題 3.2

(a) $f_C(A, B) = f_{(-C)}(B, A)$.

(b) $A \leq^{(\mathrm{i})}_{C,\tau} B \Rightarrow A \leq^{(\mathrm{ii})}_{C,\tau} B \Rightarrow A \leq^{(\mathrm{iii})}_{C,\tau} B \quad \forall \tau \in]0, 1]$.

(c) $\leq_C$ が全順序のとき， $A \leq^{(\mathrm{i})}_{C,\tau} B \Leftrightarrow A \leq^{(\mathrm{ii})}_{C,\tau} B \Leftrightarrow A \leq^{(\mathrm{iii})}_{C,\tau} B \quad \forall \tau \in]0, 1]$.

(d) $A \leq^{(\mathrm{ii})}_{C,\frac{1}{2}} A$ (反射律).

命題 3.2 の (d) より，特に $\tau = \frac{1}{2}$ とした時 (ii) 型が反射律を持つ．

$$A \leq^{(\mathrm{ii})}_{C,\frac{1}{2}} B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \frac{f_C(A, B)}{f_C(A, B) + f_C(B, A) - f_{\{\theta\}}(A, B)} \geq \frac{1}{2}$$

$A \leq^{(\mathrm{ii})}_{C,\frac{1}{2}} A$ は同一の戦略では優劣がつかないことを表している．

$\tau = 1$ の場合，つまり完全な優劣が付く場合は錐のみを用いた次の既存二項関係 $\leq^{(1)}_C, \leq^p_C$:

$$A \leq^{(1)}_C B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} a \leq_C b \quad \forall a \in A, b \in B A \leq^p_C B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \exists a \in A, b \in B \text{ s.t. } a \leq_C b$$

と関係をもつ．

命題 3.3

(a) $A \leq^{(\mathrm{i})}_{C,1} B \Leftrightarrow A \leq^{(1)}_C B$

(b) $A \leq^{(\mathrm{ii})}_{C,1} B \Leftrightarrow A \leq^{(\mathrm{iii})}_{C,1} B \Rightarrow B \not\leq^p_C A$

4　従来の二項関係との違い

具体的に数値を与えて従来の二項関係との違いを確認する

$\mathbb{R}^2$ 上に順序錐 $C := \mathbb{R}^2_+$ をとり，

$$A := \left\{ (x, y) \mid \begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \end{pmatrix} < 4 \right\}$$

$$B := \left\{ (x, y) \mid \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} < 4 \right\}$$

にそれぞれ 2 次元正規分布 $N\left(\left(\begin{smallmatrix}1.5\\1.5\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&2\end{smallmatrix}\right)\right)$ $N\left(\left(\begin{smallmatrix}3.5\\3.5\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&2\end{smallmatrix}\right)\right)$ を切り取って定数倍した確率密度関数が乗っているとする（図 4）．

このとき，汎用的な集合の前順序となる既存の二項関係

- $B \leq^u_C A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A - C$
- $B \leq^l_C A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B + C \supset A$

の両方が成り立っている．つまり既存の二項関係では「B が A より小さい」となる．

一方で，モンテカルロ法により f_C の値を求めると

$$0.49 > f_C(A, B) > 0.48$$
$$0.20 > f_C(B, A) > 0.18$$

なので

$$A \not\leq^{(\mathrm{i})}_{C,\frac{1}{2}} B \text{ だが } A \leq^{(\mathrm{ii})}_{C,\frac{1}{2}} B.$$

すなわち「(ii) 型で A が B より小さい」となる．このとき，(ii) 型で無視される情報落ち部分はおよそ $\frac{1}{3}$ である．

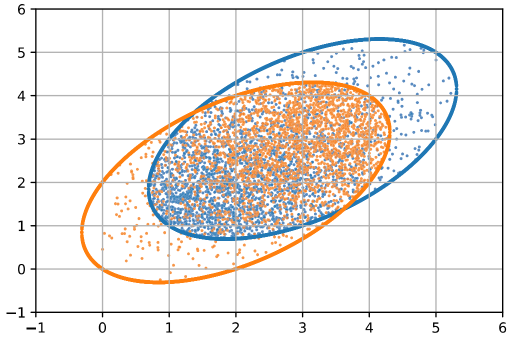

図 4: 集合 A（右上）と B（左下）およびそれぞれの密度分布のイメージ．

5　おわりに

本研究では，集合の内部の情報を用いた優劣比較の手法として，集合上に密度関数を仮定し二項関係を提案した．境界部分の情報のみを扱う二項関係と比較し，違いを確認した．

参考文献

[1] H. P. Benson, *On a Domination Property for Vector Maximization with Respect to Cones*, Journal of optimization theory and applications, **39**, 1983, 125–132.

[2] J. Ide, E. Köbis, D. Kuroiwa, A. Schöbel, C. Tammer, *The relationship between multi-objective robustness concepts and set-valued optimization*, Fixed Point Theory and Applications, **2014**, 2014.

[3] S. Kobayashi, Y. Saito and T. Tanaka, *Convexity for compositions of set-valued map and monotone scalarizing function*, Pacific Journal of Optimization, **12**, 2016, 43–54.

[4] D. Kuroiwa, T. Tanaka and T. X. D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Analysis., **30**, 1997, 1487–1496.

[5] I. Kuwano, T. Tanaka and S. Yamada, *Unified scalarization for sets and set-valued Ky Fan minimax inequality*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, **11**, 2010, 513–525.

[6] A. A. Khan, C. Tammer and C. Zalinescu, *Set-valued optimization, An introduction with applications*, Springer-Verlags, Berlin Heidelberg, 2015.

[7] S. Nishizawa, T. Tanaka and G. P. Georgiev, *On inherited properties for vector-valued multifunctions*, Multi-objective programming and goal programming, **21**, 2003, 215–220.