

## 正作用素形式上のスケール流について

名古屋大学 (Nagoya University) 山上 滋 (Yamagami Shigeru)

2018年12月26日

今回発表した内容については arXiv:1811.00708 をご参照いただくとして、ここではそれに至る経緯あるいは背景などの裏話的なことについて緩々述べてみたい。とはいうものの、こういったことは長々と書くべきものでもないので、予定の枚数に達したら、そこで打ち止めとさせていただきます。続きは酒盃の先にでもということ。

話は少し前に遡るのであるが、CCR 環の自由状態の間の遷移確率について調べていたことがあった。この自由状態というものは代数的にはガウス測度の類似物で、無限自由度を許容するということもあり、表現の構造としては無限テンソル積環が関係するなど、それなりに趣き深い対象ではある。一方、遷移確率の方は、ベクトル間の内積ということもあり、さほど複雑なことは起こらず、それでも十分楽しめるものということで、行列式公式を導いたりといろいろ遊んでいたわけである。そこでは、自由度が1の場合が本質的で、もとの Weyl 交換関係  $U(x)V(y) = e^{ixy}V(y)U(x)$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) を von Neumann に倣って  $W(x, y) = e^{-ixy/2}U(x)V(y)$  を用いて  $W(x, y)W(x', y') = e^{i(xy' - x'y)/2}W(x+x', y+y')$  と書き直し、作用素

$$W(f) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)W(x, y) dx dy$$

の積として言い換えると、群環 (たたみ込み積) を交代形式  $x'y - xy'$  に由来するコサイクルで捻った\*環

$$(fg)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x'y - xy')/2} f(x', y') g(x - x', y - y') dx' dy',$$

$$f^*(x, y) = \overline{f(-x, -y)}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}^2)$$

が得られる。これを  $W$  と書き、たたみ込み Weyl 環と呼ぶことにする。von Neumann の与えた既約表現の唯一性の証明では、 $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/4}$  の場合に  $W(f)$  が1次元射影となることを利用するのであるが、それをパラメータ化した  $\rho_\alpha(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/4\alpha}$

と  $\rho_\beta$  ( $\alpha, \beta > 0$ ) の積を計算すると、

$$\frac{4\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}\rho_\gamma, \quad \gamma = \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}$$

のようになる。このように Gaussian で閉じていて、その閉じ方が双曲的である点は注目に値する。この段階で次のことがわかる。 $W(\rho_\gamma) \geq 0 \iff \gamma \leq 1$  であり、このとき、

$$\sqrt{W(\rho_\gamma)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}W(\rho_\alpha), \quad \alpha = \frac{1-\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}$$

となる。 $(W(\rho_1)/2\pi)^2 = W(\rho_1)/2\pi$  に注意。

*Remark 1.* エルミート作用素 (実はトレース類)  $W(\rho_\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ) のスペクトル分解については、またの機会にでも。

この  $\rho_\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ) を規格化して密度作用素としたものが、この場合 (自由度 1) の自由状態に他ならない。上で平方根を問題にしたのは、状態間の遷移確率を計算したいがため、それを実行し形を整えたものが行列式公式である。

このようなごくありふれたガウス計算でもあり、よく知られていることと思いきや、しばらく探せど見つからず、意外な盲点であったかと思いきや、一方でそのような昔の話を好かない人もいるようで、紆余曲折の末の密やかな公開。やれやれである。有限自由度の場合は、このように代数的とも言える内容であるので、さすがにそれを公表するのは気が引けて、無限自由度にまで拡張したわけであるが、これが例によって、ごたごたした証明しか思いつかず、これも識者の不評を買った原因かもしれない。これについては、もう少し何とかしたいと思っている。

さて平方根が具体的に求められたので、他の冪についても調べて見ると、

$$W(\rho_\gamma)^r = (4\pi)^{r-1} \frac{(\sinh \theta)^r}{\sinh(r\theta)} W(\rho_\alpha), \quad \alpha = \tanh(r\theta), \quad \gamma = \tanh \theta$$

のように双曲構造がより鮮明な形で現れる。

ここまでは、自由度 1 の場合であったが、それを多自由度化することは容易である。その先にある無限自由度の場合への拡張も考えて、一般的な記述を与えておこう。それは並素<sup>\*1</sup>空間に基づくもので、ここでは、実ベクトル空間  $V$  とその上の並素形式  $\sigma$  を合わせた構造を問題にする。もう少し一般的に交代形式  $\sigma$  を考えてもよい。いずれにせよ、実

<sup>\*1</sup> symplectic の訳のつもり。もともと symplectic は complex の com の部分をラテン語由来の com からギリシャ語由来の sym に変えた Weyl による造語に由来するという事実を鑑みてこしらえてみた。素より普及することは期待していないが、どうか平素のご愛顧をといったところ。

ベクトル空間はその複素化  $V^{\mathbb{C}} = V + iV$  から眺めるのがよく、 $V^{\mathbb{C}}$  に備わる標準的な複素共役を  $\overline{v + iw} = v - iw = (v + iw)^*$  のように書くことにする。逆に複素共役演算を伴った複素ベクトル空間はこの形であり、\*ベクトル空間とも言う。したがって、\*ベクトル空間と実ベクトル空間の複素化は同じものである。この関係は内積空間についても成り立ち、\*内積空間は実内積空間の複素化と同一視される。この複素共役の操作は、ベクトルのみならず線型写像あるいは線型形式などにも施すことができ、 $V^{\mathbb{C}}$  上の両線型形式 (sesquilinear form)  $S$  であれば、その複素共役  $\bar{S}$  を  $\bar{S}(x, y) = \overline{S(x^*, y^*)}$  ( $x, y \in V^{\mathbb{C}}$ ) で定めることになる。これについて、 $S = \bar{S}$  となるものと、 $V$  上の双線型形式とが、制限と拡張により対応することに注意。さらに、双線型形式が対称 (交代) であることと、対応する両線型形式がエルミート (反エルミート) が同値になる。以上、線型代数の復習とも言える内容であるが、通常の入門段階では、実ベクトル空間と複素ベクトル空間を扱うことはしても、実ベクトル空間を複素ベクトル空間の立場から記述するということは稀である。稀というよりは皆無というべきか。不思議と言えば不思議なことではある。

以下、 $\mathcal{P}(V)$  で  $V^{\mathbb{C}}$  上の正エルミート形式全体からなる凸錐を表す。さらに  $V$  上の交代形式  $\sigma$  を  $V^{\mathbb{C}}$  上の反エルミート形式と同一視し、

$$\mathcal{P}(V, \sigma) = \{S \in \mathcal{P}(V); S - \bar{S} = i\sigma\}$$

と置くと、これは  $\mathcal{P}(V)$  の凸部分集合である。これが空集合でないことは  $V$  が可算次元であれば簡単にわかるのだが、無条件で正しいかどうかについては不明を恥じるばかり。

再びワイルに戻って、 $\{e^{iv}; v \in V\}$  という記号から、

$$(e^{iv})^* = e^{i(-v)}, \quad e^{iv}e^{iw} = e^{-i\sigma(v,w)/2}e^{i(v+w)}$$

なる条件で生成される\*環をワイル環と呼び、 $\mathcal{W}(V, \sigma)$  と書くことにする。さらに、 $S \in \mathcal{P}(V, \sigma)$  に対して、 $V$  上の関数  $e^{-S(v,v)/2}$  が正定値となることから、 $\mathcal{W}(V, \sigma)$  の上の状態  $\varphi_S$  を  $\varphi_S(e^{iv}) = e^{-S(v,v)/2}$  により定めることができる。これを自由状態といい、 $S$  は自由状態の共分散形式と称する。

さて、 $(V, \sigma)$  が有限次元並素空間の場合を考えると、 $V$  の基底  $\{p_j, q_j\}_{1 \leq j \leq n}$  で、 $\sigma(p_j, p_k) = 0 = \sigma(p_j, q_k)$  かつ  $\sigma(q_j, p_k) = \delta_{j,k}$  となるものがいつでも存在する。それを正準基底と唱え、正準基底に伴う座標  $xp + yq = \sum_j (x_j p_j + y_j q_j)$  を正準座標と呼ぶことにすれば、ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  における  $\mathcal{W}(V, \sigma)$  の\*表現  $\pi$  に対して、ユニタリー作用素  $W(x, y) = \pi(e^{i(xp+yq)})$  は  $W(x, y)W(x', y') = e^{i(xy' - x'y)}W(x + x', y + y')$  を満たし、確かに最初に調べた場合の多自由度化になっている。ここで注意すべき点は、 $\mathcal{W}(V, \sigma)$  は代数的な群環に相当するもので、パラメータ  $v \in V$  についての連続性が仮定されていない

いことである。したがって、その表現  $\pi$  の連続性を別途要求する必要がある。リー群等では、その不具合を避けるために、連続な表現を積分でならしたものを群環として採用することになる。先の言い方ではたたみ込み群環を考えるとということである。このたたみ込み群環の\*表現と群の連続ユニタリー表現が対応し合うことが、この手の調和解析の出発点である。

こういったことを受けて、たたみ込みワイル環  $L^1(V, \sigma)$  を、

$$(fg)(v) = \int_V f(v')g(v-v')e^{i\sigma(v,v')/2} dv, \quad f^*(v) = \overline{f(-v)}$$

で定める。ここで、ルベグ測度  $dv = dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_n$  は、正準基底の取り方によらずに定まり、Liouville 測度と称されるものである。

通常の積分ノルムに関して  $L^1(V, \sigma)$  はバナッハ\*環であり、 $L^1(V, \sigma)$  の\*表現  $\pi$  と  $W(V, \sigma)$  の連続\*表現  $W$  が、

$$\pi(f) = \int_V f(v)W(e^{iv}) dv$$

という関係の下、対応し合う。

さらに  $L^1(V, \sigma)$  は  $L(V, \sigma) = C_0(V) \cap L^1(V, \sigma)$  を密\*イデアルとして含み、 $L(V, \sigma)$  上の線型汎関数  $\tau(f) = f(0)$  ( $f \in L(V, \sigma)$ ) を標準トレースとするヒルベルト環の構造をもつ。例えば、 $\tau(f^*f) = (f|f) = \tau(ff^*)$  といった類のことが成り立つ。

言葉が揃ったので、 $\rho_S \in L(V, \sigma)$  を  $\rho_S(v) = e^{-S(v,v)/2}$  ( $v \in V$ ) で定めると、 $\varphi_S(f) = \tau(\rho_S f)$  ( $f \in L(V, \sigma)$ ) が成り立つという意味で、 $\rho_S$  は  $\varphi_S$  の密度作用素である。 $\rho_S$  は見ての通りの Gaussian であるが、そのことは適切な座標を用いることでより明確になる。

そのために、 $S - \bar{S} = i\sigma$  が非退化であることから  $S + \bar{S}$  が  $V^{\mathbb{C}}$  における内積を定めるので、これを  $(x, y)_S$  のようにも書くことにして、これに関する  $S$  の作用素表示を  $\mathbf{S}$  と書けば、正作用素  $\mathbf{S}$  は、 $\mathbf{S} + \bar{\mathbf{S}} = 1$  を満たす。その結果、スペクトル分解は、 $\{a_j, a_j^*\}$  という形の正規直交基底を使って

$$\mathbf{S} = \sum s_j |a_j\rangle\langle a_j| + (1-s_j) |a_j^*\rangle\langle a_j^*|, \quad 0 \leq s_j < 1/2$$

と書かれ、 $\sigma(a_j + a_j^*, (a_j - a_j^*)/i) = 2(1-2s_j)$  となることから、

$$a_j = \sqrt{\frac{1-2s_j}{2}} q_j + \sqrt{\frac{1-2s_j}{2}} i p_j, \quad q_j = \frac{a_j + a_j^*}{\sqrt{2(1-2s_j)}}, \quad p_j = \frac{a_j - a_j^*}{i\sqrt{2(1-2s_j)}}$$

という関係で正準基底を定めることができる。

$$\rho_S(xp + yq) = \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1-2s_j} (x_j^2 + y_j^2)\right)$$

とくに、 $s_j = 0$  の場合を  $P$  と書けば、 $\rho_P^2 = (2\pi)^n \rho_P$  となって、 $\frac{1}{(2\pi)^n} \rho_P$  が極小射影を与え、通常的作用素トレース  $\text{tr}$  と  $\tau$  の関係が、 $\text{tr} = (2\pi)^n \tau$  であることもわかる。

ここまで準備して少し計算すれば、 $\rho_S^r = \tau(\rho_S^r) \rho_{S^{(r)}} (r > 0)$  がわかる。ただし

$$S^{(r)}(\xi, \eta) = (\xi, \mathbf{S}^r \frac{\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}}}{\mathbf{S}^r - \bar{\mathbf{S}}^r} \eta)_S, \quad \tau(\rho_S^r) = (2\pi)^{(r-1)n/2} \sqrt{\det \frac{|\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}}|^r}{|\mathbf{S}^r - \bar{\mathbf{S}}^r|}}$$

である。 $S^{(r)} \in \mathcal{P}(V)$  は明らかであるが、等式

$$\mathbf{S}^r \frac{\mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}}}{\mathbf{S}^r - \bar{\mathbf{S}}^r} = \mathbf{S} + \frac{\mathbf{S}\bar{\mathbf{S}}^r - \mathbf{S}^r\bar{\mathbf{S}}}{\mathbf{S}^r - \bar{\mathbf{S}}^r}$$

からわかるように、 $S^{(r)} - \bar{S}^{(r)} = S - \bar{S}$  となるので、 $S^{(r)} \in \mathcal{P}(V, \sigma)$  であり、作り方から  $S \mapsto S^{(r)}$  は、乗法群  $(0, \infty)$  の群作用、言い換えると、 $\mathcal{P}(V, \sigma)$  の上の flow を定めることがわかる。また、その形から  $S^{(r)}$  は  $S$  と  $\bar{S}$  の作用素平均と関係するだろうことが見て取れる。

以上は、自由状態間の遷移確率の行列式公式を得た時点でわかっていたのであるが、有限次元限定のことであり、flow が何を意味するのかも不明であったため、しばらく放置していた。その間、渚さんから作用素平均となる  $r$  の範囲とかを教えてもらったりしてはいたのであるが、何かと結びつくということもなく半ば忘れていたところ、最近になって、ちょっとした経緯で von Neumann projection を再検討する機会があり、そこで、Weyl convolution algebra の行列単位が具体的に書けることに気づき、それに気をよくして、というかついでの勢いで、自由密度作用素のべき乗の問題を共分散形式の言葉で書き直したものが free dynamics と結びつけられることに思い至り、わかってしまえば簡単という、よくあることながら、今回のスケール流の解釈にたどり着いた。

ということで、これそのものに物理的な価値はおそらくないのであるが、熱平衡状態の温度スケールに関する極限として、真空状態が得られる、それも最初の平衡状態に依存した形で、同値でない真空が選び出されるという点は、free dynamics とは言え示唆的なものを感じる。

せっかく見つけたことなので、これについてあれこれしつこく調べるべきかもしれないが、欲がないというか根性がないというか、そういうことではいい仕事ができないとわかっている、そういう気になれないのは困ったものである。

最後は愚痴になってしまったが、予定の枚数に達したので、醜態はここまでにとどめおくことにして。

平成最後の年の瀬に、相生山の麓にて。