数理解析研究所講究録 第2114巻 2019年 144-151

THE ATTRACTIVE POINTS SET OF A MAPPING IN STRICTLY CONVEX BANACH SPACES

狭義凸 Banach 空間における写像の吸引点集合

高橋非線形解析研究所　竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)
Takahashi Institute for Nonlinear Analysisl

1. 主題

Strictly convex Banach 空間の集合 D で定義された写像列 $\{T_n\}$ について, 次の 2 つの lemma を示します. また, その証明の構造 (attractive point 集合の役割) を議論します.

Lemma A. D を *strictly convex Banach* 空間 E の部分集合とし, $\{T_n\}$ は D から E への写像の列で $\cap_j F(T_j) \subset \cap_j A(T_j)$ を満たすとする. このとき, 次の (1) と (2) が成立する:

(1) D が凸集合ならば, $\cap_j F(T_j) = (\cap_n A(T_n)) \cap D$ は凸集合である.
(2) D が閉集合ならば, $\cap_j F(T_j) = (\cap_n A(T_n)) \cap D$ は閉集合である.

Lemma B. D を *strictly convex Banach* 空間 E の部分集合とし, $\{T_n\}$ は D から E への写像の列で $\emptyset \neq \cap_n F(T_n) \subset \cap_n A(T_n)$ を満たすとする. $\{a_n\}$ を $(0,1)$ の数列で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ を満たすとし, D から E への写像 T を次の様に定義する:

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j T_j x \qquad \text{for} \quad x \in D.$$

このとき, T は $F(T) = \cap_n F(T_n)$ を満たす *quasi–nonexpansive* 写像である.

上記 lemma に使用した概念と必要な事項を説明しておきます. E を実 Banach 空間とし, D は常に E の空ではない部分集合とします. 従って, “空ではない” という記述は, 煩わしいので省略しています. R を実数の集合, N を正整数の集合, N_0 を非負整数の集合とします. $i \leq j$ を満たす $i, j \in N_0$ について, $N(i,j) = \{k \in N_0 : i \leq k \leq j\}$ とします.

Banach 空間 E が strictly convex とは, $\|\cdot\|^2$ が strictly convex, 即ち, 次の関係が成立することです: $x \neq y$ である $x, y \in E$ と $a \in (0,1)$ について

$$\|(1-a)x + ay\|^2 < (1-a)\|x\|^2 + a\|y\|^2.$$

T を Banach 空間 E の部分集合 D で定義された写像とします. このとき, 次の集合 $A(T)$ の要素を T の attractive point (吸引点) と呼びます:

$$A(T) = \{\ v \in E : \ \|Tx - v\| \leq \|x - v\| \quad \text{for all} \quad x \in D\ \}.$$

次の集合 $F(T)$ の要素は T の fixed point (不動点) と呼ばれ重要な研究対象です:

$$F(T) = \{\ v \in D : \ Tv = v\}.$$

T は次の条件を満たすとき quasi–nonexpansive と呼ばれます:

$$F(T) \neq \emptyset, \qquad \|Tx - u\| \leq \|x - u\| \quad \text{for} \quad x \in D,\ u \in F(T).$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10.
Key words and phrases. Attractive point, fixed point.

T が quasi–nonexpansive とは, $A(T)$ を使えば, $\emptyset \neq F(T) \subset A(T)$ を満たすことです.

T が nonexpansive とは, $x, y \in D$ について, $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ を満たすことです. Nonexpansive 写像 T が $F(T) \neq \emptyset$ を満たせば, T は quasi–nonexpansive です.

2. $A(T)$, $F(T)$, QUASI–NONEXPANSIVE 写像

高橋先生と著者 [12] は, 2010 年に, 写像 T の attractive point という概念を導入しました. “$A(T)$ が閉凸集合” という顕著な特質が現れるため, Hilbert 空間という枠組みを選んでいます. 本節では, Banach 空間で $A(T)$ を簡単に考察します. Alber の 2 変数関数 V を用いた, attractive point の異なる定義には触れません; see Lin and Takahashi [7].

$A(T)$, $F(T)$, quasi–nonexpansive 写像.

D を Banach 空間 E の部分集合, T を D から E への写像とします. 何故 $A(T)$ を定義しその性質を考えるのか, その理由の一端を述べます. 不動点や不動点近似の理論において, $F(T)$ の定義そのものからは意味のある結果はほとんど何も導かれません. $F(T) \subset D$ だけが分かります. 定義に norm が現れないので, 何ものかを導く力が弱いことは納得できるでしょう. 意味のある結果を得たいと思えば, $F(T)$ の定義と協力する T の何らかの性質が必要になります. このため, quaisi–nonexpansive 写像 T が研究対象としてしばしば選ばれます. このとき, ここまでの説明を考慮すると, まず $A(T)$ の性質を考察することは自然です. しかし, Hilbert 空間を除いて, 例えば $A(T)$ の凸性をそのまま議論することは難しい様です. この様なとき, $A(T)$ に代えて $A(T) \cap D$ の性質を考察します.

次に, $A(T)$ が自然な概念であることを見るために, 簡単な例を提示します. 2 次元の Euclid 平面で, 原点を中心とする 30° の回転 S と y 軸を対称の軸とする折り返し T を考えます. ドーナツ型の集合 $D = \{(a, b) \in R^2 : 1 \leq a^2 + y^2 \leq 4\}$ をとれば, S と T は D 上の 2 つの変換 (self–mapping) と考えられます. このとき, S は明らかに不動点を持ちません. しかし, $A(S) = \{(0, 0)\}$ であり, $(0, 0)$ は回転の中心です. $(0, 0)$ を均質な物体 D の重心とも捉えられます (重心は図形 D の中にあるとは限りません). 2 つめの例では, $F(T)$ は分断された 2 線分 (y 軸と D の共通部分) ですが, $A(T)$ は対称の軸 (y 軸) です.

Banach 空間では, $A(T)$ は Hilbert 空間ほど顕著な性質を持ちません. しかし, $A(T)$ は常に閉集合であり, $A(T) \cap D$ の要素は常に不動点です (4 節で確認します).

T を Banach 空間 E の部分集合 D で定義された写像とします. T を quasi–nonexpansive とすると, 強い制約 $\emptyset \neq F(T) \subset A(T)$ が生じます. $A(T) \cap D \subset F(T)$ と併せて,

- T が quasi–nonexpansive ならば, $\emptyset \neq F(T) = A(T) \cap D$ です.

本稿では議論しませんが, 次の事実は重要です; see Atsushiba and co–authors [1].

- $A(T) \cap D \neq \emptyset$ を満たし quasi–nonexpansive ではない写像 T が多数存在します.

$A(T)$, $F(T)$ と quasi–nonexpansive 写像の理解を深めるために, DeMarr [4] による例を示します. R^2 は 2 次元線形空間とします. R^2 には複数の norm が考えられます.

Example 2.1. $D = \{x = (s, t) \in R^2 : s, t \in [-1, 1]\}$ とします. D 上の self–mapping T を次の様に定義します:

$$Tx = T(s, t) = (|t|, t) \quad \text{for} \quad x = (s, t) \in D.$$

このとき, $F(T) = \{(|t|, t) \in R^2 : t \in [-1, 1]\} \subset D$ です.

T の定義は norm と無縁であり (R の norm $|\cdot|$ は使っています), $F(T)$ が凸でないことも norm と無縁です. また, どの様な norm を選んでも D は有界な閉凸集合です.

(i) $\|\cdot\|_2$ を選んだとき, と (ii) $\|\cdot\|_\infty$ を選んだときを対比します.

(i) $\emptyset \neq F(T)$ かつ $A(T) \cap D = \emptyset$ (T は quasi–nonexpansive ではない).

(ii) $\emptyset \neq F(T) = A(T) \cap D$ (T は quasi–nonexpansive かつ nonexpansive).

重要な事実を抜き出し列挙します. D 上の quai–nonexpansive (nonexpansive) 写像 T について, $F(T)$ は常に凸とは限りません. $F(T)$ という概念は, T の定義式が norm を含まない限り norm と無関係です. 一方, $A(T)$ という概念は norm に依存します. Quasi–nonexpansive という概念は norm と写像 T の定義域 D の双方に依存します.

写像列 $\{T_n\}$ の条件 $\cap_n F(T_n) \subset \cap_n A(T_n)$.

D を strictly convex Banach 空間 E の部分集合とします. $\{T_n\}$ を D から E への写像列とし, 次の表記を使用します; $A = \cap_{j\in N} A(T_j)$, $F = \cap_{j\in N} F(T_j)$. 条件 $\emptyset \neq F(T) \subset A(T)$ と比較しながら, 本稿の裏の主題である次の条件を簡単に考察します:

$$(\emptyset \neq) F = \cap_n F(T_n) \subset \cap_n A(T_n) = A.$$

説明を複雑にしないために, D を閉凸部分集合とし, D から E への写像の列 $\{S, T\}$ を考えます. 収束定理への応用も考慮し, 本稿の主題には不要なことも若干記述します. $F = F(S) \cap F(T)$, $A = A(S) \cap A(T)$ です. このような設定で共通不動点への収束定理を得るには, $\emptyset \neq F \subset A$ という条件が必須だと思われます.

S と T に quasi–nonexpansive という強い制約を課せば, $\{S, T\}$ は次の性質を持ちます:

(i) $F \subset A$.

(ii) $F(S)$, $F(T)$, F の総てが閉凸集合.

次のことに注意してください:

(a) $F \subset A$ という条件は, $F(S) \subset A(S)$ も $F(T) \subset A(T)$ も意味しません.

(b) $F \subset A$ という条件がなければ, $F \neq \emptyset$ は $A \neq \emptyset$ を意味しません.

(c) $F \subset A$ という条件なしでは, F が閉凸かどうかを判断できません.

(d) 距離射影が考えられる空間では, $A \neq \emptyset$ という条件から $F \neq \emptyset$ が導出されます. しかし, $A \neq \emptyset$ から $F \subset A$ は導出されません.

(c) 及び (ii) については 4 節で触れます.

$S = T$ という特殊な場合を考えれば, 条件 $\emptyset \neq F \subset A$ は $\emptyset \neq F(S) \subset A(S)$ となり, S は quasi–nonexpansive です. 一般には, (a) の言い代えですが, 次のことが重要です:

$\emptyset \neq F \subset A$ であっても, S と T は quasi–nonexpansive である必要はない.

$\emptyset \neq F \subset A$ を満たし, S も T も quasi–nonexpansive でないような D と $\{S, T\}$ の対は豊富に存在します (quasi–nonexpansive という概念は D にも依存します). 参考のために, 2 次元 Euclid 空間 R^2 で例を示します; see Ibaraki and Takeuchi [5].

Example 2.2. $D = \{x = (s, t) \in R^2 : s \in [0, 1], t \in [\frac{1}{2}s, 2s]\}$ とします. $x = (s, t) \in D$ について, $u_x = (\frac{1}{2}t, t)$, $z_x = (s, \frac{1}{2}s)$ とし, T_1 と T_2 を次の様に定義します:

$$T_1 x = \tfrac{1}{2}(x + u_x) = \tfrac{1}{2}((s, t) + (\tfrac{1}{2}t, t)) = (\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{4}t, t),$$
$$T_2 x = \tfrac{1}{2}(x + z_x) = \tfrac{1}{2}((s, t) + (s, \tfrac{1}{2}s)) = (s, \tfrac{1}{4}s + \tfrac{1}{2}t) \qquad \text{for } x = (s, t) \in D.$$

D は compact な凸集合です. 次のことは自明です:

$$F(T_1) = \{(s, 2s) \in R^2 : s \in [0, 1]\}, \ F(T_2) = \{(s, \tfrac{1}{2}s) \in R^2 : s \in [0, 1]\},$$
$$A(T_1) = \{(s, t) \in R^2 : s \le 0\}, \ A(T_2) = \{(s, t) \in R^2 : t \le 0\}.$$

次のことを容易に確認できます:

- $\emptyset \neq \cap_{j=1}^{2} F(T_j) \subset \cap_{j=1}^{2} A(T_j)$.
- T_1 と T_2 ともに quasi–nonexpansive ではない (hemi–contractive でさへない).
- T_1 と T_2 は可換ではない.
- $I - T_j$ は demiclosed at 0 ($j = 1, 2$).

また, strictly convex な空間では, $B = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$ が T_1 や T_2 より良い性質を持つことが期待できます. 事実, B は $F(B) = \{(0,0)\} = \cap_{j=1}^{2} F(T_j)$ を満たし nonexpansive です. この T_1 と T_2 は身近な写像だと思います.

3. Strictly convex Banach 空間の特性

次の lemma は, Banach 空間 E が strictly convex であることの言い換えにすぎません; refer to Nilsrakoo and Saejung [9]. しかし, この lemma は便利です.

Lemma 3.1. $\{a_n\}$ を $(0,1)$ の数列で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ を満たすとする. *E を strictly convex Banach 空間とし,* $\{x_n\}$ を E の点列とする. このとき, 次の (1) と (2) が成立する.

(1) ある $l \in R$ が存在し, $\|x_n\| \leq l$ であり, $l = \lim_n \|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\|$ とする.
このとき, ある $v \in E$ が存在して, 総ての $n \in N$ について $x_n = v$ となる.

(2) ある $u \in E$ が存在し, $\|x_n\| \leq \|u\|$ であり, $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ とする.
このとき, 総ての $n \in N$ について $x_n = u$ となる.

Proof. $\|x\| \leq \|y\|$ と $\|x\|^2 \leq \|y\|^2$ は同値, また $\|\cdot\|^2$ は strictly convex です.

(1) を示します. $x_i \neq x_j$ となる $i, j \in N$ の存在を仮定します. $b = a_i/(a_i + a_j) \in (0,1)$ とすると, $1 - b = a_j/(a_i + a_j)$ です. $n \geq \max\{i, j\}$ を任意に固定します. このとき, ある $\delta_1 > 0$ が存在して, 次の不等式が成立します.

$$\|bx_i + (1-b)x_j\|^2 = b\|x_i\|^2 + (1-b)\|x_j\|^2 - \delta_1 \leq l^2 - \delta_1,$$
$$\begin{aligned}\|\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\|^2 &\leq (a_i + a_j)\|bx_i + (1-b)x_j\|^2 + \textstyle\sum_{k\neq i,j}^{n} a_k \|x_k\|^2 \\ &\leq (a_i + a_j)(l^2 - \delta_1) + \textstyle\sum_{k\neq i,j}^{n} a_k l^2 \\ &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k l^2 - (a_i + a_j)\delta_1 \leq l^2 - (a_i + a_j)\delta_1.\end{aligned}$$

$\lim_n \|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\| = l$ ですから, $l^2 \leq l^2 - (a_i + a_j)\delta_1 < l^2$ となり矛盾を得ます. 背理法によって, 総ての $i, j \in N$ について $x_i = x_j$ となります. $x_1 = v$ として結論を得ます.

(2) を示します. $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ より, $\lim_n \|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\| = \|u\|$ が従います. $\|u\| = l$ とすれば, (1) より, 総ての $n \in N$ について $x_n = v$ となる $v \in E$ が存在します. 従って, 総ての $n \in N$ について, $x_n = v = \sum_{j=1}^{\infty} a_j v = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j = u$ を得ます. □

Lemma 3.2. $m \in N$ とし. $\{b_k\}_{k=1}^{m}$ を $(0,1)$ の数列で $\sum_{k=1}^{m} b_k = 1$ を満たすとする. $\{y_k\}_{k=1}^{m}$ を *strictly convex Banach* 空間 E の有限点列で $u = \sum_{k=1}^{m} b_k y_k$ と $\|y_k\| \leq \|u\|$ を満たすとする. このとき, 総ての $k \in N(1,m)$ について $y_k = u$ となる.

4. Lemma A

最初に, 適切な条件の下で $A(T)$ と $A(T) \cap D$ の性質を調べ, 基本的な Lemma 4.1 と Lemma 4.2 を提示します. この 2 つの lemma から Lemma A が得られます.

Lemma 4.1. D を *Banach* 空間 E の部分集合とし, T を D から E への写像とする. このとき, 次の (1) と (2) が成立する:

(1) $A(T) \cap D \subset F(T)$.
(2) $A(T)$ は閉集合.

Proof. $z \in A(T) \cap D$ とすれば $\|z - Tz\| \le \|z - z\| = 0$ です, (1) を得ます.
(2) を示します. $\{z_n\}$ をある $z \in E$ に収束する $A(T)$ の点列とします. このとき, $n \in N$ と $y \in D$ について, $z_n \in A(T)$ より, 次の不等式が成立します:

$$\|z - Ty\| \le \|z - z_n\| + \|z_n - Ty\| \le \|z - z_n\| + \|z_n - y\|.$$

$\|\cdot\|$ は連続ですから, $\|z - Ty\| \le \|z - y\|$ となり $z \in A(T)$ です. □

Banach 空間 E の部分集合 K について, $C_l(K)$ を次の様に定義します:

$$C_l(K) = \{cz_1 + (1-c)z_2 : z_1, z_2 \in K,\ c \in [0,1]\}.$$

$K_1, K_2 \subset E$ について, $K_1 \cap K_2 \subset C_l(K_1 \cap K_2) \subset C_l(K_1) \cap C_l(K_2)$ は明らかです. $\{K_n\}$ についても事情は同じです. また, K が $C_l(K) \subset K$ を満たせば K は凸です.
$K = \{z_1, z_2, z_3\}$ を 2 次元平面 R^2 の直線上にはない 3 点の集合とします. このとき, K の凸包 $\mathrm{co}(K)$ は z_1, z_2, z_3 の作る 3 角形の境界と内部を含めた全体であり, $C_l(K)$ は境界となる 3 辺上の点の集合です. $C_l(K)$ と $\mathrm{co}(K)$ は異なる概念です.
一般には, T が閉凸集合 D 上の nonexpansive 写像でも, $F(T)$ や $A(T) \cap D$ は凸とは限りません. $A(T) \cap D$ の凸性に関連する議論は strictly convex Banach 空間で行います.

Lemma 4.2. *D を strictly convex Banach 空間 E の凸部分集合とし, T を D から E への写像とする. このとき, $C_l(A(T) \cap D) \subset F(T)$ が成立する.*

Proof. D が凸より, $C_l(A(T) \cap D) \subset D$ を得ます. $z \in C_l(A(T) \cap D)$ として, $z \in F(T)$ を示します. Lemma 4.1 (1) より, $z \notin A(T) \cap D$ を仮定して $z \in F(T)$ を示せば十分です. 定義より, $c_1 + c_2 = 1$ と $z = c_1 z_1 + c_2 z_2$ を満たす $z_1, z_2 \in A(T) \cap D$ と $c_1, c_2 \in (0,1)$ が存在します. $v_1, v_2 \in E$ を次の様に設定します:

$$v_i = \frac{1}{2}(z_i - Tz) + \frac{1}{2}(z_i - z) \quad \text{for} \quad i \in N(1,2).$$

このとき, $z_1 - z_2 = v_1 - v_2$ と $\|z_1 - z_2\| \le \|v_1\| + \|v_2\|$ は明らかです.
$i \in N(1,2)$ について, $z_i \in A(T)$ より, 次の不等式が成立します:

$$\|v_i\| = \|\tfrac{1}{2}(z_i - Tz) + \tfrac{1}{2}(z_i - z))\| \le \tfrac{1}{2}\|z_i - Tz\| + \tfrac{1}{2}\|z_i - z\| \le \|z_i - z\|.$$

この式から, $\|v_1\| < \|z_1 - z\|$ とすれば, 次の様に矛盾を得ます:

$$\begin{aligned}\|v_1\| + \|v_2\| &< \|z_1 - z\| + \|z - z_2\| \\ &= c_2\|z_1 - z_2\| + c_1\|z_1 - z_2\| = \|z_1 - z_2\| \le \|v_1\| + \|v_2\|.\end{aligned}$$

従って, $\|v_1\| = \|z_1 - z\|$ です. $z_1 \in A(T)$ より次の関係を得ます:

$$\|z_1 - Tz\| \le \|z_1 - z\| = \|v_1\|.$$

もちろん, $v_1 = \frac{1}{2}(z_1 - Tz) + \frac{1}{2}(z_1 - z)$ です.
この様にして, Lemma 3.2 より, $z_1 - Tz = z_1 - z = v_1$, 即ち, $z = Tz$ を得ます. □

Lemma A. *D を strictly convex Banach 空間 E の部分集合とし, $\{T_n\}$ は D から E への写像の列で $\cap_j F(T_j) \subset \cap_j A(T_j)$ を満たすとする. このとき, 次の (1) と (2) が成立する:*
(1) D が凸集合ならば, $\cap_j F(T_j) = (\cap_j A(T_j)) \cap D$ は凸集合である.
(2) D が閉集合ならば, $\cap_j F(T_j) = (\cap_j A(T_j)) \cap D$ は閉集合である.

Proof. まず, $\cap_j F(T_j) \subset \cap_j A(T_j)$ です. (1) を示します. D が凸集合と Lemma 4.2 より,

$$\begin{aligned}\cap_j F(T_j) &= (\cap_j F(T_j)) \cap D \subset (\cap_j A(T_j)) \cap D = \cap_j (A(T_j) \cap D) \\ &\subset C_l\big(\cap_j (A(T_j) \cap D)\big) \subset \cap_j C_l(A(T_j) \cap D) \subset \cap_j F(T_j).\end{aligned}$$

従って, $(\cap_j A(T_j)) \cap D = \cap_j F(T_j)$ は凸集合です. (2) を示します. D は閉集合, Lemma 4.1 (2) より $A(T_j)$ も閉集合です. Lemma 4.1 (1) によって次の関係が成立します:

$$\cap_j F(T_j) = (\cap_j F(T_j)) \cap D \subset (\cap_j A(T_j)) \cap D = \cap_j (A(T_j) \cap D) \subset \cap_j F(T_j).$$

従って, $(\cap_j A(T_j)) \cap D = \cap_j F(T_j)$ も閉集合です. □

Lemma A から, 良く知られた次の lemma が導かれることは明らかです.

Lemma 4.3. *D を strictly convex Banach 空間 E の閉凸部分集合とし, T を D から E への quasi–nonexpansive 写像とする. このとき, $F(T)$ は閉凸集合である.*

Lemma 4.2 の枠組みで, $C_l(A(T) \cap D) \subset F(T)$ が成立しても, これは $C_l(A(T) \cap D) \subset A(T) \cap D$ を意味しません. しかし, $F(T) \subset A(T) \cap D$ という強力な制約を加えると,

$$F(T) \subset A(T) \cap D \subset C_l(A(T) \cap D) \subset F(T)$$

を直ちに得ます. $F(T) = A(T) \cap D$ は凸集合です.

ここまでの議論から, Lemma 4.1 と Lemma 4.2 が Lemma 4.3(Lemma A) の主張を成立させる基本構造だと著者は考えます. 従来のものと, 証明手法は本質的に異なりませんが, 視点が異なることを理解いただければ幸いです.

5. Lemma B

最初に Bruck の lemma を提示します.

Lemma 5.1. *D を strictly convex Banach 空間 E の閉凸部分集合とする. $\{T_n\}$ は D から E への quasi–nonexpansive 写像の列で $\emptyset \neq \cap_n F(T_n)$ を満たすとする. $\{a_n\}$ を $(0,1)$ の数列で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ を満たすとし, D から E への写像 T を次の様に定義する:*

$$Tx = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j T_j x \qquad \text{for} \quad x \in D.$$

このとき, T は $F(T) = \cap_n F(T_n)$ を満たす quasi–nonexpansive 写像である.

Bruck [3] の original lemma では, $\{T_n\}$ は nonexpansive 写像の列で結論の T も nonexpansive 写像です. しかし, Bruck の議論そのままに, Lemma 5.1 が得られることは良く知られています. この lemma の条件の下で, 可算個の列 $\{T_n\}$ の共通不動点を求めることと, 1 つの写像 T の不動点を求めることが同等になります. Bruck 先生は, 1970 年代に, この様な素晴らしい結果を多く提出しています. しかし, Lemma 5.1 の結果を得るだけなら, Lemma 5.1 の条件は強すぎるのではないかと著者は感じました. Lemma 5.1 の条件をどこまで緩められるかという興味が, Lemma B を提示する動機です.

Lemma B. *D を strictly convex Banach 空間 E の部分集合とし, $\{T_n\}$ は D から E への写像の列で $\emptyset \neq \cap_n F(T_n) \subset \cap_n A(T_n)$ を満たすとする. $\{a_n\}$ を $(0,1)$ の数列で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ を満たすとし, D から E への写像 T を次の様に定義する:*

$$Tx = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j T_j x \qquad \text{for} \quad x \in D.$$

このとき, T は $F(T) = \cap_n F(T_n)$ を満たす quasi–nonexpansive 写像である.

Proof. 写像列 $\{A_n\}$ を, $\{T_n\}$ から次の様に生成します: $n \in N$ ごとに,

$$A_n = \sum_{j=1}^n a_j T_j.$$

まず, 次の (a) を示します.

(a) $x \in D$ ごとに, $\{A_n x\}$ はある $u_x \in E$ に強収束する.

$x \in D$ を固定します. 仮定より $u \in \cap_n F(T_n) \subset \cap_n A(T_n)$ が存在します. このとき, $\|T_n x - u\| \le \|x - u\|$, 即ち, $\|T_n x\| \le \|x-u\| + \|u\|$ が $n \in N$ について成立します. 従って, $\sup_{n\in N} \|T_n x\| \le M$ となる $M > 0$ が存在します. よって, $k, l \in N$ について,

$$\|A_{k+l}x - A_k x\| = \|\sum_{j=1}^{k+l} a_j T_j x - \sum_{j=1}^{k} a_j T_j x\| \le \sum_{j=k+1}^{k+l} a_j \|T_j x\| \le (\sum_{j=k+1}^{k+l} a_j) M$$

が得られます. $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$ より, l と関りなく, $\lim_k (\sum_{j=k+1}^{k+l} a_j) M = 0$ です. これは, $\{A_n x\}$ がコーシー列であることを意味し, $\{A_n x\}$ はある $u_x \in E$ に強収束します.

(a) と $u_x = \lim_n A_n x = \sum_{j=1}^\infty a_j T_j x$ より, T は well–defined です. 従って, 結論を得るには次の (b) を示せばよいことになります:

(b) T は, $F(T) = \cap_n F(T_n)$ を満たす quasi–nonexpansive 写像である.

また, $\emptyset \ne F(T) = \cap_n F(T_n) = A(T) \cap D$ を示せば, (b) を示したことになります.

最初に $\cap_n F(T_n) \subset A(T) \cap D \subset F(T)$ を示します. 仮定より, $u \in \cap_n F(T_n) \subset \cap_n A(T_n)$ とします. $y \in D$ を任意に固定すると, $k \in N$ について次の関係を得ます:

$$\begin{aligned}\|Ty - u\| &\le \|Ty - A_k y\| + \|A_k y - u\| \\ &\le \|Ty - A_k y\| + \sum_{j=1}^k a_j \|T_j y - u\| + (\sum_{j=k+1}^\infty a_j)\|u\| \\ &\le \|Ty - A_k y\| + \|y - u\| + (\sum_{j=k+1}^\infty a_j)\|u\|.\end{aligned}$$

$\lim_k \|Ty - A_k y\| = 0$ と $\lim_k \sum_{j=k+1}^\infty a_j = 0$ より, $\|Ty - u\| \le \|y - u\|$ を得ます. 即ち, $u \in A(T) \cap D$ です. Lemma 4.1 (1) より, $\emptyset \ne \cap_n F(T_n) \subset A(T) \cap D \subset F(T)$ を得ます.

次に $F(T) \subset \cap_n F(T_n)$ を示します. $\emptyset \ne F(T)$ は既に示しました. 任意に $v \in F(T)$ をとり, $u \in \cap_n F(T_n) \subset \cap_n A(T_n)$ をとります. 総ての $n \in N$ について, $\|T_n v - u\| \le \|v - u\|$ です. また, 次の等式が容易に得られます:

$$v - u = Tv - u = \sum_{n=1}^\infty a_n T_n v - \sum_{n=1}^\infty a_n u = \sum_{n=1}^\infty a_n (T_n v - u).$$

従って, Lemma 3.1 (2) によって, $T_n v - u = v - u$ が $n \in N$ について成立します. よって, $v \in \cap_n F(T_n)$ を得ます. 即ち, $F(T) \subset \cap_n F(T_n)$ を得ます.

ここまでの議論から, $\emptyset \ne F(T) = \cap_n F(T_n) = A(T) \cap D$ が成立します. □

Lemma B を提示し, 総ての T_j が quasi–nonexpansive という強い条件は, Lemma 5.1 の結論を得るために不要なことを示しました. また, D の閉性や凸性も不要です. 有限な写像列 $\{T_j\}_{j=1}^k$ についても対応する結果が得られます ($\sum_{j=1}^k b_j = 1$ を満たす $(0,1)$ の数列 $\{b_j\}_{j=1}^k$ など適切な条件の変更を伴います). 次のことも述べておきます.

Lemma B の条件の下で, $\{A_n\}$ と次の $\{B_n\}$ を考えます: $B_1 = T_1$ とし, $n \in N$ ごとに,

$$B_{n+1} = \sum_{j=1}^n a_j T_j + (\sum_{j=n+1}^\infty a_j) T_{n+1} = A_n + (\sum_{j=n+1}^\infty a_j) T_{n+1}.$$

このとき, $x \in D$ ごとに, $\{A_n x\}$ と $\{B_n x\}$ は同じ点に強収束することを容易に示せます.

$\{T_n\}$ の共通不動点への収束定理を得るには, 通常, 総ての T_j が閉凸集合 D 上の self–mapping とします. 証明に D の閉性と凸性が必要と思われます. この条件下でも, 各 A_n は self–mapping とは限りません. このため, $\{B_n\}$ またはその代替を併せて考えます. ここまでの議論から, Lemma B の条件の下で, 次のことを確認できます:

- T は $F(T) = \cap_n F(T_n)$ を満たす quasi–nonexpansive 写像.
- D が凸集合, 各 T_j が self–mapping ならば, $\{B_n\}$ は D 上の self–mapping の列.
- D が閉凸集合, 各 T_j が self–mapping ならば, T は D 上の self–mapping.

Lemma B の条件 $\emptyset \neq \cap_n F(T_n) \subset \cap_n A(T_n)$ の下では, $\{B_n\}$ が他に顕著な性質を持つかは不明です. これに対して, Lemma 5.1 の, 総ての T_j が quasi–nonexpansive という強い条件下では, $\{B_n\}$ は特筆すべき性質を持ちます: 総ての B_n が quasi–nonexpansive 写像で $F(B_n) = \cap_{j=1}^{n} F(T_j)$ を満たします. 総ての T_j が quasi–nonexpansive ならば, $k \in N$ ごとに $\cap_{j=1}^{k} F(T_j) \subset \cap_{j=1}^{k} A(T_j)$ が成立しますから, 確認は難しくありません.

*****

東京工業大学 高橋 渉 先生には平素からの丁寧なご教示に感謝いたします. また, 新潟大学 田中 環 先生には, この論稿を発表する機会をいただいたことにお礼申し上げます.

References

[1] S. Atsushiba, S. Iemoto, R. Kubota and Y. Takeuchi, *Convergence theorems for some classes of nonlinear mappings in Hilbert spaces*, Linear Nonlinear Anal., 2 (2016), 125–153.

[2] R. E. Bruck, *A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., 53 (1974), 59-71.

[3] R. E. Bruck, *Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 179 (1973), 251–262.

[4] R. DeMarr, *Common fixed points for commuting contraction mappings*, Pacific J. Math., 13 (1963), 1139–1141.

[5] T. Ibaraki and Y. Takeuchi, *New convergence theorems for common fixed points of a wide range of nonlinear mappings*, submitted.

[6] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math., 80 (1979), 493–501.

[7] L-J. Lin and W. Takahashi, *Attractive point theorems for generalized nonspreading mappings in Banach spaces*, J. Convex Anal., 20 (2013), 265–284.

[8] J. Linhart, *Beiträge zur Fixpunkttheorie nichtexpandierender Operatoren*, Monatsh. Math., 76 (1972), 239–249 (German).

[9] W. Nilsrakoo and S. Saejung, *Strong convergence to common fixed points of countable relatively quasi-nonexpansive mappings*, Fixed Point Theory and Applications, vol. 2008, 19 pages, 2008.

[10] T. Suzuki, *Convergence theorems to common fixed points for infinite families of nonexpansive mappings in strictly convex Banach spaces*, Nihonkai Math. J., 14 (2003), 43–54.

[11] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[12] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal, 12 (2011), 399–406.