数理解析研究所講究録 第2114巻 2019年 174-177

集合値写像のベクトル化における各ベクトルのグラフについて

芝浦工業大学　木村　健志
Kenji Kimura
Shibaura Insutitute of Technology,

Abstract

集合値写像をベクトル値関数化する際に、各ベクトルはコンパクト集合上の連続関数などで表現される．本稿では、それらの関数がどのようなグラフになるのかを考察する．

1 Introduction

集合同士の比較による集合最適化において、集合値をベクトル値として扱い、ベクトル値関数に対する微分などを取り入れて、集合値の最適化を考える手法が [1] により発表された．この内容の一部をわかりやすい形で表現しなおし, さらに類似のベクトル化関数をいくつか追加したものが [2] である．これらのベクトル化において, もとの集合値写像とベクトル化された関数との関係性を考察する際に図を用いて考えることがあるが, その際各ベクトル値のグラフがどのようになるか, ある程度わかっていると便利である．本稿では, 各ベクトル値のグラフについて考察する．

2 Preliminary

本稿では $\mathbb{R}^n$ における集合のベクトル化を考える．まず, 順序錘を $C=\mathbb{R}_+$(非負象限）とする, また, C の base を $B=\mathrm{co}\,\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ としておく．ただし, $\boldsymbol{e}_i$ は第 i 成分のみ 1 で残りの成分が 0 の基本ベクトルとする．また集合 A に対して $\mathrm{co}\,A$ は A の凸包を表す．空でない C-bounded な集合 $A\in\mathbb{R}^n$ に対応するベクトル $V(A)$ を次のように定義する．簡単のため $A+C$ は C-convex かつ C-compact であると仮定する．

$$\boldsymbol{k}\in B \text{ に対して，} \varphi(\boldsymbol{k};A)=\min\{\langle\boldsymbol{k},a\rangle|a\in A\}.$$

$\varphi(\boldsymbol{k};A)$ は各 A に対応して得られる B 上の連続関数であり, コンパクト集合上の連続関数の空間と考えることで $\varphi(\boldsymbol{k};A)$ を 1 つのベクトルとみなすことができる．

またこの設定において, $A_1,A_2\in\mathbb{R}^n$ に対して, $(A_1+C)\supset A_2\Leftrightarrow\varphi(\boldsymbol{k};A_1)\leq\varphi(\boldsymbol{k};A_2),\forall\boldsymbol{k}\in B$ となることが知られている．つまり集合としての順序とベクトル化したものの順序が一致しているのである．また, $||\varphi(\boldsymbol{k}:A)||=\max_{\boldsymbol{k}\in B}|\varphi(\boldsymbol{k};A)|$ のノルムを導入することでベクトル値関数に対する微分を考えることができ, 順序の対応から集合値写像への微分を考えることができる．

3 $\varphi(\boldsymbol{k}:A)$ のグラフ

Figure 1 は $\mathbb{R}^2$ において $A=\{(3,1)\}$ とした場合のグラフである．定義域 $B=\mathrm{co}\,\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ を $t\boldsymbol{e}_1+(1-t)\boldsymbol{e}_2,t\in[0,1]$ と表現し, 横軸値が 0 のところが $t=0$, つまり $\boldsymbol{e}_2$, 右端が $t=1$, つまり $\boldsymbol{e}_1$ である．このとき, グラフは $\varphi(\boldsymbol{e}_2,A)=1,\varphi(\boldsymbol{e}_2,A)=3$ を結ぶ線分となっている．これは $(3,1)$ に対応して $(\boldsymbol{e}_1,3),(\boldsymbol{e}_2,1)$ になっていると考えられる．実際,A が 1 点の場合, $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,A=\{\boldsymbol{x}\},\boldsymbol{k}=\sum_{i=1}^n t_i\boldsymbol{e}_i,(\sum_{i=1}^n t_i=1)$ に対して $\varphi(\boldsymbol{k};A)=\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle=\sum_{i=1}^n t_ix_i$

Figure 2 は $\mathbb{R}^2$ において $A=\mathrm{co}\,\{(3,1),(2,3)\}$ とした場合のグラフである．途中で折れているが左側の線分は Figure 1 のグラフと一致している．右端は $(\boldsymbol{e}_1,2)$ となっている, これは $(2,3)$ の第 1 成分の値に対応していると考えられる．つまり $\mathrm{co}\,\{(\boldsymbol{e}_2,1),(\boldsymbol{e}_1,3)\}$ と $\mathrm{co}\,\{(\boldsymbol{e}_2,3),(\boldsymbol{e}_1,2)\}$ の 2 つの線分の値が小さい方

のグラフになっていると考えられる．実際 A が 2 点を結ぶ線分の場合（この φ の場合 2 点のみでも同様）$A = \mathrm{co}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ に対して，$\varphi(\boldsymbol{k}; A) = \min\{\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}\rangle, \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{y}\rangle\}$ であり，$\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{y}\rangle$ となる $\boldsymbol{k}$ のところで折れ曲がる．

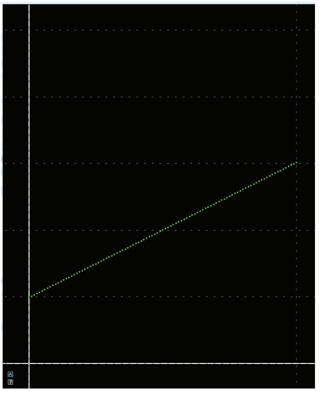

Figure 1: $A = \{(3, 1)\}$

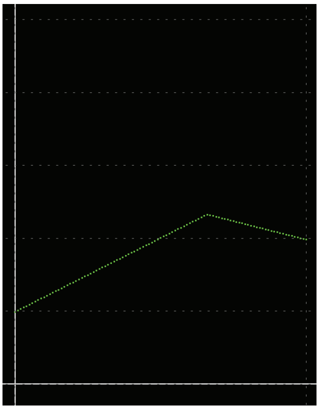

Figure 2: $A = \{\mathrm{co}\{(3, 1), (2, 3)\}\}$

次に $B_1 = \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n | ||\boldsymbol{k}|| = 1\}$ とした場合のグラフを考察してみることにする．

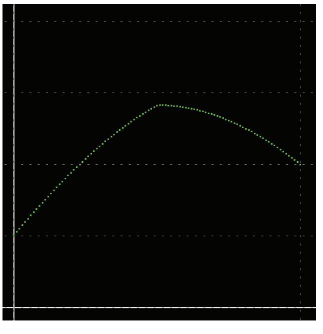

Figure 3: $B_1 = \{||\boldsymbol{k}|| = 1\}, A = \mathrm{co}\{(3, 1), (2, 2)\}$

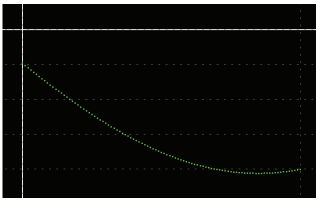

Figure 4: $A = \{(-4, -1)\}$

Figure 3 は base を $B_1 = \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n | ||\boldsymbol{k}|| = 1\}$ とし $A = \mathrm{co}\{(3, 1), (2, 2)\}$ とした場合のグラフである．端点については，先ほどまでの場合と同様に，$(\boldsymbol{e}_2, 1), (\boldsymbol{e}_1, 1)$ となっている．またグラフが折れる点についても，$\mathrm{co}\{(3, 1), (2, 2)\}$ と $\boldsymbol{k}$ が垂直となる点であることがわかる．実際 base の形を変えても，ベクトル化関数の式はほぼ同じで，A が 2 点を結ぶ線分の場合（この φ の場合 2 点のみでも同様）$A = \mathrm{co}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ に対して，$\varphi(\boldsymbol{k}; A) = \min\{\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}\rangle, \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{y}\rangle\} = \min\{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i, \sum_{i=1}^{n} t_i y_i\}$ と表される．但し，$\boldsymbol{k} = (t_1, \ldots, t_n), \sum_{i=1}^{n} (t_i)^2 = 1$．また，Figure 3 のグラフでは 2 つの線分ではなく 2 つの凹な曲線分となっている．これは A が正象限の点で構成されているからで，第 3 象限にあるときは凸関数，第 2，4 象限にあるときはどちらでもない形になる考えられる．実際 $A = (-4, -1)$ のときは Figure 4 のように凸関数になる．

今度は φ のスカラー化部分を線形のスカラー化ではなく非線形のスカラー化にした場合について考察してみたい．

$$\boldsymbol{k} \in B \text{ に対して，} \varphi_1(\boldsymbol{k}; A) = \min\{t \in \mathbb{R} | (t \cdot \boldsymbol{k} - C) \cap A \neq \emptyset\}.$$

このベクトル化関数の場合は, $A+C$ が C-convex ではなくても順序が保たれるという利点がある. では, φ_1 のグラフがどのようになるのか見ていくことにする.

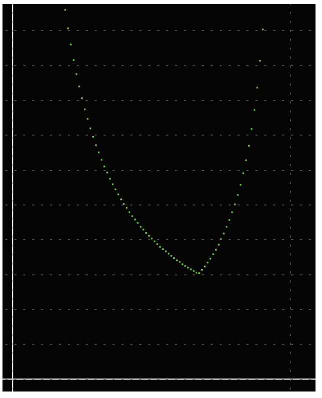

Figure 5: Nonlinear, $A=\{(2,1)\}$

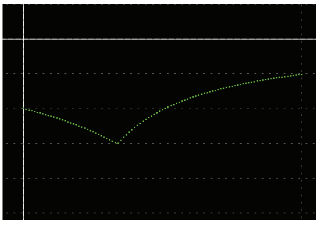

Figure 6: Nonlinear, $A=\{(-1,-2)\}$

Figure 5 は $A=\{(2,1)\}$ としたときの $\varphi_1(\boldsymbol{k};A)$ のグラフである. $A\subset \operatorname{int} C$ のときには $\varphi_1(\boldsymbol{k};A)$ は定義域の端で ∞ となる. また $\boldsymbol{k}$ と $(2,1)$ が平行となるところで, つまり $\boldsymbol{k}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ でグラフが折れていることもわかる.

Figure 6 は $A=\{(-1,-2)\}$ としたときの $\varphi(\boldsymbol{k};A)$ のグラフである. $(\boldsymbol{e}_2,-2),(\boldsymbol{e}_1,-1)$ となるところは φ と同様である. また $\boldsymbol{k}$ と $(-1,-2)$ が平行な点, つまり $\boldsymbol{k}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ のところでグラフが折れていることもわかる.

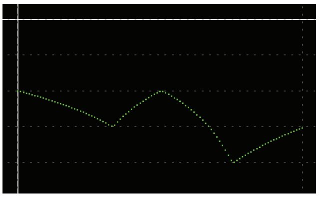

Figure 7: Nonlinear, $A=\{(-3,-1),(-1,-2)\}$

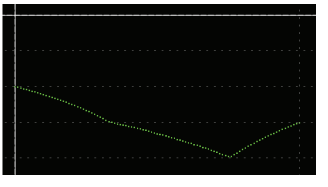

Figure 8: Nonlinear, $A=\operatorname{co}\{(-3,-1),(-1,-2)\}$

Figure 7 は $A=\{(-3,-1),(-1,-2)\}$ に対する $\varphi_1(\boldsymbol{k};A)$ のグラフである. 端点は $(\boldsymbol{e}_2,-2),(\boldsymbol{e}_1,-3)$ となっている. また $\boldsymbol{k}$ と $(-3,1),(-1,-1),(-1,-2)$ が平行となる点でグラフが折れている.

Figure 8 は $A=\operatorname{co}\{(-3,-1),(-1,-2)\}$ に対する $\varphi_1(\boldsymbol{k};A)$ のグラフである. 端点は $(\boldsymbol{e}_2,-2),(\boldsymbol{e}_1,-3)$ となっている. また $\boldsymbol{k}$ と $(-3,1),(-1,-2)$ が平行となる点でグラフが折れている.

$A=\{(-3,-1),(-1,-2)\}$ のときよりもグラフが下になっていて, φ では区別が付かなかった $\{(-3,-1),(-1,-2)\}$ と $\operatorname{co}\{(-3,-1),(-1,-2)\}$ の順序にも対応できていることが確認できる.

4 まとめ

線形のスカラー化関数を利用したベクトル化では, ベクトル化された関数のグラフは複数の直線（超平面）の中での最小値として表現でき, 比較的簡単に計算できるように思える. その代わり, 集合最適化に用いる際には, $A+C$ が C-convex でなければ順序が保たれない.

非線形のスカラー化関数を用いたベクトル化では, 各集合の形状についての制約がなく広い範囲に適用できる. ただし, 手作業でグラフを描くのは困難な計算量となる. 集合全体を平行移動し, 各集合が $(-C)$ と

共通部分を持つようにできれば, 微分なども利用しやすくなる.

References

[1] D. Kuroiwa and T. Nuriya, *A generalized embedding vector space optimization*, Proceedings of the Fourth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, pp.297–303, 2007, Yokohama Publishers.

[2] Johannes Jahn, *Vectorization in Set Optimization*, J. Optim. Theory Appl. **167**, pp.783–795 (2015).

Shibaura Institute of Technology
Saitama 337–8570
Japan
E-mail:kimura.kenji.d7@sic.shibaura-it.ac.jp

芝浦工業大学　木村　健志