数理解析研究所講究録 第2114巻 2019年 197-201



# DC最適化問題の双対性に対する制約想定の考察

島根大学大学院総合理工学研究科 村上卓見（Takumi Murakami）
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学大学院総合理工学研究科 角田侑也（Yuya Sumida）
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学総合理工学部 黒岩大史（Daishi Kuroiwa）
Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

## 1 はじめに

本講究録では次のようなDC最適化問題に対する [8] における結果を紹介する:

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{P}) & \text{minimize} & f_0(x)-g_0(x) \\ & \text{subject to} & f_i(x)-g_i(x) \leqq 0, \forall i \in I,\end{array}$$

ただし, $I=\{1,\ldots,m\}$ とし $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ \forall i \in \{0\}\cup I$ は凸関数とする. この問題の先行研究としては Lemaire [2] や Martínez-Legaz and Volle [5], Harada and Kuroiwa [6] などが挙げられる. これらの研究においては, 問題 (P) を次のような凸最適化問題 $(\mathrm{P}(y_0,\ldots,y_m))$ に分割することが本質的である:

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{P}(y_0,\ldots,y_m)) & \text{minimize} & f_0(x)-\langle x,y_0\rangle+g_0^*(y_0) \\ & \text{subject to} & f_i(x)-\langle x,y_i\rangle+g_i^*(y_i) \leqq 0, \forall i \in I.\end{array}$$

このような分割を考慮した上で, 上記の Lemaire [2] や Martínez-Legaz and Volle [5] においては Slater 条件が, Harada and Kuroiwa [6] においては FM(Farkas Minkowski, M.A. Goberna, V. Jeyakumar and M.A. López [5]) という条件が重要な役割をなし, DC最適化問題の双対定理を導いている. 本講究録では, V. Jeyakumar,G.Y.Li [7] が示した結果に注目することで得られた, 先行研究とは別のDC最適化問題の双対定理を紹介する. またこの定理が先行研究 Harada and Kuroiwa [6] の結果の拡張になっていることも述べる.

## 2 準備

まずは準備として, 関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ に対して, $f$ のエピグラフと $f$ の実行定義域をそれぞれ次のように定義する:

$$\mathrm{epi} f=\{(x,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} | x\in\mathrm{dom} f, f(x)\leq r\},$$

$$\mathrm{dom} f=\{x\in\mathbb{R}^n | f(x)<+\infty\}.$$

$f$ のエピグラフ epi$f$ が凸集合, 閉集合, 非空のとき, $f$ はそれぞれ凸関数, 閉関数, 真関数であるという. $f$ の共役関数を

$$f^*(y)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\langle x,y\rangle-f(x)\}$$

と定義すると, $f^*$ は常に閉凸関数であり, $f$ が真凸関数ならば $f^*$ は閉真凸関数であり, また $f$ が閉真凸関数ならば $f = f^{**}$ であることが知られている. また明らかに $f(x) + f^*(y) \geq \langle y, x \rangle$ (the Young-Fenchel inequality) が成立する. 任意の $x \in \mathrm{dom} f$ に対して, $f$ の $x$ における劣微分を次のように定義する:

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n | \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in \mathbb{R}^n\}.$$

このとき, 次の同値関係が成立する:

$$f(x) + f^*(y) = \langle y, x \rangle \Leftrightarrow y \in \partial f(x).$$

また問題 (P) について, 制約集合を

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leqq 0, \forall i \in I\}$$

とおき, $y_0, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^n$ に対して, $(\mathrm{P}(y_0, \ldots, y_m))$ の制約集合を

$$S(y_1, \ldots, y_m) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - \langle x, y_i \rangle + g_i^*(y_i) \leqq 0, \forall i \in I\}$$

とおく.

次に, 本講究録の定理に関連する先行研究を紹介する. 初めに, 本講究録のモチベーションとなった Harada and Kuroiwa([6]) の結果を紹介する.

**定理 2.1 (R. Harada, D. Kuroiwa, [6])** $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in \{0\} \cup I)$ を凸関数とし, $S \neq \emptyset$, $\bigcup_{x \in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0$, $\bigcup_{x \in S}(\prod_{i=1}^m \partial g_i(x)) \subseteq D$ とする. 任意の $(y_1, \ldots, y_m) \in D \cap \prod_{i=1}^m \mathrm{dom} g_i^*$ に対して

- $S(y_1, \ldots, y_m) \neq \emptyset$,
- $\mathrm{cone\,co} \bigcup_{i=1}^m (\mathrm{epi} f_i^* - (y_i, g_i^*(y_i))) + \{0\} \times [0, +\infty)$ が閉集合

ならば, 次の等式が成り立つ:

$$\inf_{x \in S}(f_0(x) - g_0(x)) = \inf_{(y_0, \ldots, y_m) \in D_0 \times D} \max_{\lambda_i \geqq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \begin{array}{l} f_0(x) - \langle x, y_0 \rangle + g_0^*(y_0) \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^m \lambda_i (f_i(x) - \langle x, y_i \rangle + g_i^*(y_i)) \end{array} \right\}.$$

この定理は, 凸最適化問題

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{Q}) & \text{minimize} & f_0(x) \\ & \text{subject to} & f_i(x) \leqq 0, \forall i \in I, \end{array}$$

(ただし $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in \{0\} \cup I)$ は凸関数) に対する次の結果を用いている:

**定理 2.2 (M.A. Goberna, V. Jeyakumar, M.A. López, [5])** $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ を凸関数, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \leqq 0, \forall i \in I\} \neq \emptyset$ とする. このとき次の二つは同値である:

(1) $\mathrm{cone\,co} \bigcup_{i=1}^m \mathrm{epi} f_i^* + \{0\} \times [0, +\infty)$ が閉集合である,

(2) 任意の凸関数 $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\inf_{f_i(x) \leqq 0, \forall i \in I} f_0(x) = \max_{\lambda_i \geqq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \right\}.$$

また凸最適化問題に対して, 双対問題の値のみに着目すると, 次のような双対定理が V. Jeyakumar, G.Y.Li [7] によって得られている:

**定理 2.3 (V. Jeyakumar, G. Y. Li, [7])** $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ を凸関数とし, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \leqq 0, \forall i \in I\} \neq \emptyset$ とする. このとき次の二つは同値である:

(1) epi$h^{\Diamond}$ が閉集合である, ただし

$$h^{\Diamond}(x^*) = \inf_{\lambda_i \geqq 0} \left\{ \left( \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \right)^* (x^*) \right\}, \forall x^* \in \mathbb{R}^n,$$

(2) 任意の凸関数 $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\inf_{f_i(x) \leqq 0, \forall i \in I} f_0(x) = \sup_{\lambda_i \geqq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \right\}.$$

# 3 主結果

凸関数 $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ と $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^n$ に対して, 関数 $h^{\Diamond}_{y_1,\ldots,y_m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を次のように定義する:

$$h^{\Diamond}_{y_1,\ldots,y_m}(x^*) = \inf_{\lambda_i \geqq 0} \left\{ \left( \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (f_i - y_i + g_i^*(y_i)) \right)^* (x^*) \right\}, \forall x^* \in \mathbb{R}^n.$$

このとき, DC 最適化問題 (P) の凸最適化問題 (P$(y_0, \ldots, y_m)$) への分割と, V. Jeyakumar, G.Y.Li [7] によって示された定理 2.3 を用いることで, 次のような定理が得られる:

**定理 3.1 (Kuroiwa, Murakami, Sumida, [8])** $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in \{0\} \cup I)$ を凸関数とし, $S \neq \emptyset$, $\bigcup_{x \in S} \partial g_0(x) \subseteq D_0$, $\bigcup_{x \in S} (\prod_{i=1}^{m} \partial g_i(x)) \subseteq D$ と仮定する. 任意の $(y_1, \ldots, y_m) \in D$ に対して,

- epi$h^{\Diamond}_{y_1,\ldots,y_m}$ が閉集合
- $S(y_1, \ldots, y_m) \neq \emptyset$

をみたすとき, 次の等式が成り立つ:

$$\inf_{x \in S} (f_0(x) - g_0(x)) = \inf_{(y_0,\ldots,y_m) \in D_0 \times D} \sup_{\lambda_i \geqq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \begin{array}{l} f_0(x) - \langle x, y_0 \rangle + g_0^*(y_0) \\ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (f_i(x) - \langle x, y_i \rangle + g_i^*(y_i)) \end{array} \right\}.$$

**注意 3.1** 定理 *3.1* は定理 *2.1* の拡張になっている. つまり定理 *3.1* の仮定は定理 *2.1* の仮定を含んでいる. しかし逆は一般的には成立しない. このことは次の具体例 *([8])* から明らかである.

**例 3.1** 次のような $DC$ 最適化問題を考える.

$$\begin{array}{lll} (P) & minimize & x \\ & subject\ to & x^2 - |x| \leqq 0. \end{array}$$

このとき $f_0(x) = x$, $g_0(x) = 0$, $f_1(x) = x^2$, $g_1(x) = |x|$ となる. $D_0 \supseteq \{0\}$, $D \supseteq [-1, 1]$ とするとこのとき定理 *2.1* の仮定はみたさない. 実際, $y_1 = 0 \in D \cap \mathrm{dom} g_1^* = [-1, 1]$ ならば

$$\mathrm{cone\,co}\,(\mathrm{epi} f_1^* - (y_1, g_1^*(y_1))) + \{0\} \times [0, +\infty) = \mathbb{R} \times (0, \infty) \cup \{(0, 0)\}$$

となり, これは閉ではない. よって定理 *2.1* の仮定をみたさない. 次に定理 *3.1* の仮定をみたすことを確かめていく. 任意の $y_1 \in [-1, 1]$ に対して, 次のように計算できる.

$$\begin{aligned} h_{y_1}^{\diamondsuit}(z) &= \inf_{\lambda_1 \geqq 0} (\lambda_1(x^2 - xy_1 + g_1^*(y_1))^*(z) \\ &= \inf_{\lambda_1 \geqq 0} (\lambda_1(x^2 - xy_1))^*(z) \\ &= \min\{\delta_{\{0\}}(z), \inf_{\lambda_1 > 0} (\lambda_1(x^2 - xy_1))^*(z)\}. \end{aligned}$$

ここで任意の $\lambda_1 > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} (\lambda_1(x^2 - xy_1))^*(z) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{xz - \lambda_1(x^2 - xy_1)\} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{-\lambda_1(x^2 - (\frac{z}{\lambda_1} + y_1)x)\} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{-\lambda_1(x - \frac{1}{2}(\frac{z}{\lambda_1} + y_1))^2\right\} + \frac{1}{4\lambda_1}(z + \lambda_1 y_1)^2 \\ &= \frac{1}{4\lambda_1}(z + \lambda_1 y_1)^2. \end{aligned}$$

$y_1 = 0$ または $z = 0$ ならば, 次のようになる.

$$\inf_{\lambda_1 > 0} (\lambda_1(x^2 - xy_1))^*(z) = 0.$$

$y_1 \neq 0$ かつ $z \neq 0$ ならば, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\lambda_1}(z + \lambda_1 y_1)^2 &= \frac{1}{2} y_1 z + \frac{1}{4}\left(\frac{z^2}{\lambda_1} + \lambda_1 y_1^2\right) \\ &\geqq \frac{1}{2} y_1 z + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z^2}{\lambda_1} \cdot \lambda_1 y_1^2} \\ &= \frac{1}{2} y_1 z + \frac{1}{2}|y_1 z| \\ &= \max\{0, y_1 z\}. \end{aligned}$$

この不等式での等号成立は $\lambda_1 = \left|\frac{z}{y_1}\right| > 0$ のときである. したがって

$$\inf_{\lambda_1 > 0} (\lambda_1(x^2 - xy_1))^*(z) = \max\{0, y_1 z\}.$$

となる. よって

$$\begin{aligned} h_{y_1}^{\diamondsuit}(z) &= \min\{\delta_{\{0\}}(z), \max\{0, y_1 z\}\} \\ &= \max\{0, y_1 z\} \end{aligned}$$

となり, $\mathrm{epi} h_{y_1}^{\diamondsuit}$ は閉となり定理 *3.1* をみたす.

最後に, 定理 3.1 の仮定の特徴付けを与える.

**注意 3.2** 次の二つの条件は同値である *([8]):*

(1) $\mathrm{epi} h^{\diamond}_{y_1,\ldots,y_m}$ が閉集合

(2) $\inf_{\lambda_i \geqq 0} \left\{ \left( \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (f_i - y_i + g_i^*(y_i)) \right)^* \right\} = \left( \sup_{\lambda_i \geqq 0} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left( f_i - y_i + g_i^*(y_i) \right) \right\} \right)^*$

## 参考文献


[1] V. Jeyakumar, A.M.Rubinov, B.M.Glover, Y.Ishizuka. Inequality Systems and Global Optimization. J. Math. Anal. Appl. 202 (1996), no. 3, 900–919.

[2] B. Lemaire. Duality in reverse convex optimization. SIAM J. Optim. 8 (1998), no. 4, 1029–1037.

[3] J.-E. Martínez-Legaz, M. Volle. Duality in DC programming: the case of several DC consrtaints J. Math. Anal. Appl., 237 (1999), pp. 657-671.

[4] Y. Fujiwara, D. Kuroiwa. Lagrange duality in canonical DC programming. J. Math. Anal. Appl. 408 (2013), no. 2, 476–483.

[5] M.A. Goberna, V. Jeyakumar, M.A. López. Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities Nonlinear Anal., 68 (2008), pp. 1184-1194.

[6] R. Harada, D. Kuroiwa. Lagrange-type duality in DC programming. J. Math. Anal. Appl. 418 (2014), no. 1, 415–424.

[7] V. Jeyakumar, G. Y. Li. New dual constraint qualification characterizing zero duality gaps of convex programs and semidefinite programs.Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 12, e2239-e2249.

[8] D. Kuroiwa, T. Murakami, Y. Sumida. An observation of constraint qualifications for DC optimization problems, preprint.